Análise Matemática IV

LISTA 4

EDO's: Existência e unicidade de soluções. Forma normal de Jordan

(1) Determine se a função $f(y) = y^2$ é Lispchitz em $\mathbb{R}$.

(2) Seja $g\colon A \to \mathbb{R}^m$, com $A \subset \mathbb{R}^d$. Mostre que:

   (a) * Se g está definida num conjunto convexo compacto e é C^1, então é Lipschitz.

   (b) Se g é Lipschitz, então é contínua.

(3) Considere o PVI:

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Determine o maior intervalo onde seja garantida a existência e unicidade da solução.

(4) Seja $w\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leq w(t) \leq L \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds$$

e $A = \max w$.

   (a) Mostre que

      (i)

$$w(t) \leq LA(t - t_0).$$

      (ii)

$$w(t) \leq \frac{AL^2(t-t_0)^2}{2}.$$

      (iii)

$$w(t) \leq \frac{AL^n(t-t_0)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Determine $w(t)$.

(5) Considere o PVI

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

com $f \in [t_0, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \to \mathbb{R}^d$ contínua em t e Lipschitz em y. O teorema de existência e unicidade garante que existe uma única solução para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ com $\alpha = \min\{a, b/M\}$, $M = \max \|f\|$. Mostre que se f pode ser extendida a $[t_0 - \alpha, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \to \mathbb{R}^d$ com a mesma regularidade e o mesmo valor de M, então a solução existe e é única em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(6) Dada uma matriz quadrada A, determine $\frac{d}{dt}e^{At}$.

(7) Calcule a exponencial das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$