Matemática II (1.º semestre, 2023/2024)
Exame da Época de Recurso
1 de fevereiro de 2024

Proposta de resolução

1. Seja $A \in M_{2\times 2}$ tal que existem $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, tais que $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ e $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(1 val.) (a) Indique, justificando, os valores próprios de A.

(1 val.) (b) Indique, justificando, se A é invertível.

($1\frac{1}{2}$ val.) (c) Justifique se A é diagonalizável.

($1\frac{1}{2}$ val.) (d) Sejam $u = (-1, 1)$ e $v = (1, 1)$. Calcule A^{2024}. Justifique.

Resolução:

(a) Um vetor próprio de A é um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste caso, o escalar λ é um valor próprio de A.

Do enunciado, podemos concluir que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores próprios de A, com valores próprios associados $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente.

(b) A matriz é de tipo 2×2, portanto tem 2 valores próprios. Na alínea (a) encontrámos ambos. Como 0 (zero) não é valor próprio, a matriz é invertível.

(c) A matriz A é diagonalizável; tem 2 valores próprios distintos.

(d) Como A é diagonalizável, sabemos que existe uma matriz de mudança de base P tal que A é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é $A = PDP^{-1}$ com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos usar esta igualdade para calcular A^{2024}.

A inversa de P é

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A^{2024} = (PDP^{-1})^{2024} &= PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}PDP^{-1}\\
&= PD(P^{-1}P)DP^{-1}\cdots PD(P^{-1}P)DP^{-1}\\
&= PD^{2024}P^{-1}\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{2024} & 0\\ 0 & (-1)^{2024}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(2 val.) 2. Determine, para o conjunto de $\mathbb{R}^2$ seguinte, o interior, a fronteira, e o fecho (ou aderência). Indique, ainda, se o conjunto é aberto, fechado e/ou limitado.

$$A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Resolução:

Temos que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$, $\operatorname{fr}(A) = A \cup \{(0,1)\}$, e $\operatorname{ad}(A) = \operatorname{fr}(A)$. Portanto, o conjunto não é nem aberto (porque $A \neq \operatorname{int}(A)$), nem fechado (porque $A \neq \operatorname{ad}(A)$). O conjunto é limitado: por exemplo, $A \subset B_2(0,0)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

(1½ val.) (a) Mostre que a função f não é contínua no ponto $(0,0)$.

(1½ val.) (b) Que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

(1 val.) (c) Calcule as primeiras derivadas parciais da função f.

Resolução:

(a) Para mostrar que a função não é contínua no ponto $(0,0)$ vamos mostrar que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

não existe.

Para isso, começamos por considerar o conjunto $\mathcal{R}_0 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$, isto é, a reta de equação $x = 0$, e determinar o limite relativo a este conjunto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

Por outro lado, se considerarmos o conjunto $\mathcal{R}_x = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$, isto é, a reta com equação $y = x$, observamos que o limite relativo é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_x}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Podemos concluir que o limite não existe, porque o valor do limite é diferente dependendo do caminho ao longo do qual estamos a aproximar-nos do ponto $(0,0)$ e, portanto, a função f não é contínua em $(0,0)$.

(b) Como a função não é contínua no ponto $(0,0)$, podemos concluir que não é diferenciável.

(c) As derivadas parciais de $f(x,y)$ em ordem a x e y no ponto (x_0,y_0) estão definidas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}\end{aligned}$$

respetivamente. Se os limites existirem e forem finitos, dizemos que $f(x,y)$ admite derivada parcial em ordem a x e y, respetivamente. Vamos usar estas definições para calcular as derivadas parciais da função $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$.

- Se $(x_0,y_0) = (0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\ \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0\end{aligned}$$

  A função $f(x,y)$ não é contínua no ponto $(0,0)$, mas as derivadas parciais existem.

No entanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, podemos calculá-las usando as regras de derivação que já conhecemos, e.g. para calcular a derivada parcial f_x, consideramos que a variável y é constante.

· Para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{y\cos(xy)(x^2+y^2) - 2x\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left.\frac{x\cos(xy)(x^2+y^2) - 2y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

4. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$.

(1 val.) (a) Determine os pontos críticos, ou de estacionaridade, de f.

(1½ val.) (b) Encontre o valor máximo da função f no conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Resolução:

(a) O único ponto crítico da função é $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

(b) Para calcular o valor máximo da função em A, dividimos o problema em duas partes: em primeiro lugar, calculamos os pontos críticos da função no interior de A. A seguir, calculamos os pontos críticos na fronteira do conjunto, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Na alínea (a) calculámos os pontos críticos da função. Podemos observar que o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ se encontra no interior de A, sendo, portanto, um candidato a maximizante da função em A.

Por outro lado, a função de Lagrange de f é

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + x - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Resolvendo o sistema $\nabla\mathcal{L}(x,y;\lambda) = \mathbf{0}$, obtemos os pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.

Comparando os valores de f nestes três pontos, podemos concluir que o valor máximo da função é atingido no ponto $(1,0)$, com $f(1,0) = 2$.

(2 val.) 5. Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem da função

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

numa vizinhança do ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Apresente a solução como um polinómio em potências de $(x-1)$ e $(y - \frac{\pi}{2})$.

Resolução:

O polinómio de Taylor de segunda ordem da função $f(x,y) = e^x \cos y$ numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ é

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \approx f(x_0, y_0) + d_{\mathbf{h}} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2_{\mathbf{h}} f(x_0, y_0).$$

No ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, temos $f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = e^1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Precisamos de calcular os diferenciais de primeira e segunda ordem de f segundo $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

· *Diferencial de primeira ordem.*

$$d_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

As derivadas parciais da função $f(x, y) = e^x \cos y$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y$$

que, avaliadas no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, são

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = -e.$$

Portanto, o diferencial de primeira ordem é igual a

$$d_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = -e \cdot h_2.$$

· *Diferencial de segunda ordem.*

$$d^2_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Pelas expressões para $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y &\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = e^1 \cos \tfrac{\pi}{2} = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -e^x \sin y &\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = -e^1 \sin \tfrac{\pi}{2} = -e \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y &\Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = -e^1 \cos \tfrac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

Então,

$$d^2_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = -e \cdot h_1 h_2.$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned}
f\left(1 + h_1, \tfrac{\pi}{2} + h_2\right) &\approx f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) + d_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!} d^2_{\mathbf{h}} f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right). \\
&= f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) - e \cdot h_2 - e \cdot h_1 h_2.
\end{aligned}$$

O enunciado pede a expressão de um polinómio de segunda ordem que aproxime $f(x, y)$ em potências de $(x - 1)$ e $(y - \frac{\pi}{2})$, portanto basta fazer a substituição

$$\begin{array}{c} x = 1 + h_1 \\ y = \frac{\pi}{2} + h_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} h_1 = x - 1 \\ h_2 = y - \frac{\pi}{2} \end{array}$$

para obter

$$f(x, y) \approx -e(y - \tfrac{\pi}{2}) - e(x - 1)(y - \tfrac{\pi}{2}) = -ex(y - \tfrac{\pi}{2}).$$

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = y$ e considere a região R, limitada pelo triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(2,1)$.

(1½ val.) (a) Escreva $\iint_R f(x,y)\,dA$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis. (Recomendação: esboce a região.)

(1 val.) (b) Calcule $\iint_R f(x,y)dA$.

Resolução:

(a)

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} y dy dx + \int_1^2 \int_{x-1}^{\frac{x}{2}} y dy dx$$
$$= \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} y dx dy.$$

(b) Temos

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} y dx dy = \int_0^1 y(1-y)dy = \left.\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(2 val.) 7. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} (x+1)y' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Resolução:

A equação diferencial tem variáveis separáveis, sendo que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x+1}dx.$$

Temos, portanto, que a solução geral da equação diferencial é

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x+1}dx \iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x+1}dx \iff \ln y = x - \ln(x+1) + k$$
$$\iff y = Ke^{x-\ln(x+1)} \iff y = K\frac{e^x}{x+1}.$$

Para encontrar o valor de $K \in \mathbb{R}$, impomos a condição $y(0) = 1$, obtendo $y(0) = K\frac{e^0}{0+1} = K$, e portanto, $K = 1$. A solução do problema de valores iniciais é

$$y = \frac{e^x}{x+1}.$$