Licenciaturas em Economia, em Finanças e em Gestão

Matemática I

2° Semestre - 2023/2024

I - Exercícios de Análise Matemática

1. Topologia em $\mathbb{R}$

Exercício 1.

Determine o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam) dos seguintes conjuntos, e indique quais deles são conjuntos limitados:

(a) $A = [-1, 1]$;

(b) $B =]-1, 1[$;

(c) $C = [2, 3[\cup[4, 10[$;

(d) $D =]5, 7[\cup\{15\}$;

(e) $E = \{1, 5, 20\}$;

(f) $F = \{4.9, 4.99, 4.999, \dots\}$;

(g) $G = [0, +\infty[$;

(h) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(i) $I = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(j) $J = \{(-1)^n\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(k) $K = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

(l) $L = \{m + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 2.

Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados dos seguintes conjuntos, e indique quais deles são conjuntos abertos, fechados e/ou compactos:

(a) $A = [-1, 1]$;

(b) $B =]-1, 1[$;

(c) $C = [2, 3[\cup[4, 10[$;

(d) $D =]5, 7[\cup\{15\}$;

(e) $E = \{1, 5, 20\}$;

(f) $F = \{4.9, 4.99, 4.999, \dots\}$;

(g) $G = [0, +\infty[$;

(h) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(i) $I = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(j) $J = \{(-1)^n\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(k) $K = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

(l) $L = \{m + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

(m) $M = \mathbb{Z}$;

(n) $N = \mathbb{Q}$;

(o) $O = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$;

(p) $P = [2, 3] \cap \mathbb{Q}$;

(q) $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 49\}$;

(r) $R = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 49\}$.

2. Progressões e séries geométricas

Exercício 3.

Determine se cada uma das seguintes sucessões é uma progressão geométrica. Em caso afirmativo, encontre o primeiro termo e a razão da sucessão e determine a sua monotonia.

(a) $a_n = -5$

(b) $a_n = \frac{n-1}{n}$

(c) $a_n = 3n$

(d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-n}$

(f) $a_n = \frac{2n}{7}$

(g) $a_n = n^n$

(h) $a_n = 4 \times 3^{1-n}$

(i) $a_n = (n+1)^3$

(j) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2}$

(k) $a_n = (-2)^n$

(l) $a_n = n(n-1)$

Exercício 4.

Determine os termos a_3, a_6 e a_8 das seguintes progressões geométricas, sabendo que:

(a) $a_1 = 8$ e $a_4 = 320$

(b) $a_9 = 1024$ e $r = 2$

(c) $a_5 = 48$ e $a_6 = 96$

(d) $a_4 = 64$ e $a_7 = -512$

(e) $a_7 = -2$ e $r = -\frac{1}{3}$

(f) $a_7 = -16$ e $r = \sqrt{2}$

(g) $a_3 = -\frac{1}{2}$ e $a_8 = \frac{243}{2}$

(h) $a_4 - a_2 = 8$ e $a_2 + a_3 = 4$

(i) $a_5 = 4a_3$ e $a_3 + a_6 = 63$

Exercício 5.

Calcule:

(a) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{2}{5^3} + \dots$

(b) $27 + 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} \dots$

(c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} - \dots$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$

Exercício 6.

Estude a convergência de cada uma das seguintes séries geométricas e calcule, quando possível, a respetiva soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{n+1}}{5^{n-1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \times 6^{n+1}}{9^{n-2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3\cos(n\pi)5^{-n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7 \times 5^n}{3^{2n+2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2 \times 5^{2n-1}}{3^{4n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5 \times (-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$

Exercício 7.

Exprima os seguintes números racionais como soma de uma série geométrica convergente e escreva-os na forma $\dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

(a) $0,77777\dots$

(b) $0,52525252\dots$

(c) $0,123123123\dots$

(d) $0,811111\dots$

Exercício 8.

Recorrendo à soma de uma série geométrica convergente, escreva os seguintes números reais na forma a^b com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Q}$.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}$

(b) $\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\dots}}}}}$

Exercício 9.

Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ cada uma das seguintes séries geométricas é convergente, e em caso afirmativo, calcule a respetiva soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3x-4}{5}\right)^n$

3. Domínios de funções reais de variável real

Exercício 10.
Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(b) $g(x) = \ln(1-x)$

(c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

(d) $j(x) = \sqrt{e^{x^2}-1}$

(e) $l(x) = \sqrt{|x-2|-4}$

(f) $m(x) = \ln(\ln x)$

(g) $n(x) = \frac{1}{-1+\ln x}$

(h) $o(x) = \frac{2}{\sqrt{2-|x-1|}}$

4. Funções trigonométricas inversas

Exercício 11.
Calcule:

(a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) $\arctan(1)$

(d) $\arcsin(-1)$

(e) $\arctan(-1)$

(f) $\arccos(-1)$

Exercício 12.
Calcule:

(a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$;

(b) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$;

(c) $\tan(\arctan(e))$;

(d) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

(e) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$;

(f) $\arctan(\tan(e))$.

(g) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

(h) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

(i) $\arcsin\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercício 13.
Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões e apresente, para cada uma delas, uma expressão equivalente que não envolva funções trigonométricas.

(a) $\cos(\arcsin(x))$;

(b) $\sin(\arccos(x))$;

(c) $\tan(\arccos(x))$;

(d) $\tan(\arcsin(x))$;

(e) $\cos(\arctan(x))$;

(f) $\cos(2\arctan(x))$;

(g) $\sin(2\arccos(x))$;

(h) $\sin^2(\arcsin(x))$;

(i) $\cos^2(\arccos(x))$.

5. Limites e continuidade

Exercício 14.
Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x^2-3x+4$;

(f) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x-3x^2+4}$;

(g) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{4x^3-5x+1}{2x^2-3x+5}$;

(h) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x(x^2-1)}{x^2(2x+3)}$;

(i) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Exercício 15.
Considere a função real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2x + \arccos(x) & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ \frac{x+5}{3} & , \quad 1 < x \leq 4 \end{cases} .$$

(a) Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.

(b) Aplicando o Teorema de Bolzano, mostre que existe $c \in]2,4[$ tal que $h(c) = c$.

Exercício 16.
Determine os valores de a e b tais que, nos pontos indicados, tornam contínuas as seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 7, & x \geq 3 \\ ax + 3, & x < 3 \end{cases}$, em $x = 3$;

(b) $h(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

(c) $g(x) = \begin{cases} x + a, & x < -2 \\ 3ax + b, & -2 \leq x \leq 1 \\ ax + 3, & x > 1 \end{cases}$,
em $x = -2$ e $x = 1$.

Exercício 17.
Mostre que as seguintes funções têm um prolongamento por continuidade ao ponto $x = 0$ e defina esse prolongamento:

(a) $f(x) = \frac{1-e^{3x}}{5x}$;

(b) $g(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{x}$;

(c) $h(x) = 1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. Cálculo diferencial

Exercício 18.
Sabendo que f é uma função bijetiva, que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f'(3) = 7$ e $f'(1) = 9$, calcule $(f^{-1})'(3)$.

Exercício 19.
Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto indicado, nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^3 + 3$, ponto $(4, 1)$;

(b) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 1$, ponto $(1, 0)$;

(c) $f(x) = 5x^2 e^{2x-4}$, ponto $(20, 2)$.

Exercício 20.
Considere a função «seno hiperbólico» definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$f(x) := \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Justifique que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção e obtenha uma expressão para a respetiva função inversa «argsinh.»

(b) Obtenha uma expressão para $\operatorname{argsinh}'$ e calcule $\operatorname{argsinh}'(0)$.

(c) Calcule de novo $\operatorname{argsinh}'(0)$ utilizando desta vez o Teorema da derivada da função inversa.

Exercício 21.

Considere a função $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \dfrac{x+2}{x-3}$.

(a) Mostre que f é invertível e que para todo o $x \neq 1$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

(b) Utilizando a alínea anterior mostre que para todo o $x \neq 1$, $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$.

(c) Obtenha novamente a expressão de $(f^{-1})'(x)$ utilizando desta vez o teorema de derivação da função inversa.

Exercício 22.

Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(ex) - 1}{\sin(3x-3)}$

(c) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{5y}{\tan(2y)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(2x-5)}{x^2-9}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(f) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\arctan(t)}$

(g) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos(\alpha y)}{1 - \cos(\beta y)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(h) $\displaystyle\lim_{r\to 1} \frac{\sqrt[5]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - 1}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x)}{\sin(5x)}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{xe^{3x}}\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{y\to +\infty} y(2\arctan(3y) - \pi)$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{4x}}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{\frac{x}{4}}$

(p) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

Exercício 23.

Verifique se o Teorema de Rolle é aplicável a:

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ no intervalo $[1, 2]$;

(b) $g(x) = |x - 1|$ no intervalo $[0, 2]$.

Exercício 24.

Utilize o Teorema de Lagrange para demonstrar as seguintes desigualdades:

(a) $|\sin(x)| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(b) $|\cos(x) - 1| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(c) $e^x > 1 + x$, para todo o $x > 0$.

Exercício 25.
Considere as funções definidas pelas expressões

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad h(x) = \ln(x), \quad \text{e} \quad i(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Calcule os polinómios de Taylor de ordens $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ de:

(i) f, centrados no ponto $a = 0$;

(ii) g, centrados no ponto $a = 1$;

(iii) h, centrados no ponto $a = 1$;

(iv) i, centrados no ponto $a = 16$.

(b) Trace (com uma calculadora ou um computador) o gráfico de cada uma destas funções e dos gráficos dos respetivos polinómios de Taylor de ordens 1 e 2.

(c) Utilize os polinómios de segunda ordem obtidos na primeira alínea para obter aproximações de

$$\sqrt[10]{e}; \qquad \frac{1}{\sqrt{0,8}}; \qquad \ln(1,1); \qquad \sqrt{17}.$$

Verifique com uma calculadora a qualidade destas aproximações.

Exercício 26.
Considere a função i definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Obtenha uma aproximação de $\sqrt{17}$ com a ajuda do polinómio de Taylor de ordem 1 (a aproximação linear) centrado em $a = 16$ da função i.

(b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 centrada em $a = 16$ para a função i.

(c) Mostre que o erro cometido com a aproximação linear obtida para $\sqrt{17}$ na alínea (a) não excede $\frac{1}{512}$.

Exercício 27.
Considere as funções f e g definidas por $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.

(a) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 0$ para a função f.

(b) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 1$ para a função h.

(c) Utilizando as alíneas anteriores, majore o erro cometido no Exercício **??** nas aproximações de segunda ordem de $\sqrt[10]{e}$ e de $\ln(1,1)$.

Exercício 28.
Determine o polinómio de MacLaurin de ordem n das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) e^{3x} (b) $\ln(1 + 2x)$ (c) $\sinh(2x)$ (d) $\sqrt{x + 1}$

Exercício 29.
Determine os pontos críticos das seguintes funções e, para cada um deles, averigue se se trata de um minimizante local, de um maximizante local ou de um ponto de sela.

(a) $4x^3 - 8x - 12$

(b) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

(c) $x(x - 3)^2 + 4$

(d) $x + \frac{1}{x}$

(e) $x^3 - \frac{2}{x}$

(f) $\frac{x}{e^x}$

(g) $\frac{x}{3^x}$

(h) $\frac{x}{1 - x^2}$

(i) xe^x

(j) $x\ln(x)$

(k) $e^x(x^2 - 1)^3$

(l) $e^{2x-1}(x^2 - 3)^2$

Exercício 30.

Estude as concavidades e localize os pontos de inflexão das funções definidas pelas expressões

(a) $5x - x^2$

(b) $x^2 - 4x + 2$

(c) $3x - x^5$

(d) $(x^2 - 9)^3$

(e) $\dfrac{x}{x^2 + 4}$

(f) $\sqrt{3x}$

(g) xe^x

(h) e^{-3x^2}

(i) $\ln(1 - x^2)$

(j) $x - \sin(2x)$

(k) $x \arctan(x)$

(l) $|2x^2 + 9x - 5|$

7. Cálculo integral

Exercício 31.

Calcule as primitivas das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $4x^3 + x^2 - x + 1$;

(b) $\sin(3x) - \dfrac{1}{2}x^5 + \sqrt{x}$;

(c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3}\cos(5x)$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - e^{3x} - \dfrac{2}{1 + x^2} + \dfrac{2}{5}e^{-2x}$;

(e) $\tan(x) + \dfrac{1}{1 + x}$;

(f) $(2 - 4x)^5$;

(g) $\sin(x)e^{\cos(x)}$;

(h) $x^2 e^{x^3} - x\cos(x^2)$;

(i) $x^2(x^3 + 1)^3$;

(j) $\dfrac{(1 + \ln(x))^5}{x}$;

(k) $\dfrac{\arctan x}{1 + x^2} + \dfrac{1}{(1 + x^2)\arctan x}$;

(l) $\dfrac{e^x}{1 + e^x} + \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$;

(m) $\dfrac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} + \dfrac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$;

(n) $\sin^3(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$;

(o) $\dfrac{x + 1}{x + 3} + \dfrac{x + 5}{x + 7}$;

(p) $\dfrac{1}{1 + 4x^2} + \dfrac{1}{3 + 4x^2}$;

(q) $\dfrac{x^2 + 5x - 2}{1 + x^2}$;

(r) $\dfrac{x^2 - 7x + 5}{9 + x^2}$;

(s) $\dfrac{x}{\sqrt{2 - 5x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2 - 5x^2}}$;

(t) $\dfrac{x^4}{e^{x^5}} + \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

Exercício 32.

Primitive as funções racionais definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$;

(b) $\dfrac{1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$;

(c) $\dfrac{x}{x^2 + 4}$;

(d) $\dfrac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$;

(e) $\dfrac{x^3 + 3}{x^2 - 1}$;

(f) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$.

Exercício 33.

(a) Mostre que $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e que $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

(b) Deduza da alínea anterior que $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ e que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Calcule $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$ e $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$.

(c) Inspirando-se nas alíneas anteriores e utilizando o binómio de Newton, calcule

$$\int \cos^4(x)dx \text{ e } \int \sin^6(x)dx.$$

Exercício 34.

Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à fórmula de primitivação por partes:

(a) xe^{2x};

(b) $x^2\sin(2x)$;

(c) $(x^2+x+1)e^{3x}$;

(d) $\arctan(3x)$;

(e) $\ln(x)$;

(f) $\arccos(x)$;

(g) $\arccos(x) + \arcsin(x)$;

(h) $\arctan(x) + \arctan(1/x)$;

(i) $e^x\sin(2x)$;

(j) $e^{2x}\cos(x)$;

(k) $\sqrt{x}\ln(x)$;

(l) $\ln^2(x)$;

(m) $x^2\arctan x$;

(n) $x^3e^{x^2}$;

(o) $x\ln(x)$;

(p) xe^{x-2};

(q) $\sin^2(x)$;

(r) $\cos^2(x)$.

Exercício 35.

Calcule as seguintes primitivas recorrendo à substituição indicada:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$, $x = \tan(t)$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\cos(x)}\,dx$, $t = \cos(x)$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,dx$, $t = \sin(x)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$, $x = \ln(t^2-1)$;

(e) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$, $x = 2\cos(t)$;

(f) $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}\,dt$, com $t = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ a escolher).

Exercício 36.

Considere as funções «cosseno hiperbólico» e «seno hiperbólico» definidas respetivamente por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$,

(i) $\cosh' = \sinh$ e $\sinh' = \cosh$;

(ii) $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$;

(iii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica).

(b) Recorrendo à mudança de variável $t = 2\sinh(x)$ calcule $\displaystyle\int \sqrt{4+t^2}\,dt$.

Exercício 37.

Calcule geometricamente os seguintes integrais. Para verificar os resultados, calcule os integrais também de forma analítica. A expressão $\lfloor x \rfloor$ nas alíneas (c) e (e) representa a função $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

(a) $\displaystyle\int_0^3 (2x-4)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 (4x-2)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^3 \lfloor x \rfloor\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 t\cos(t)\,dt$

(e) $\displaystyle\int_1^0 \lfloor 3x \rfloor\,dx$

(f) $\displaystyle\int_a^b x\,dx$

Exercício 38.

Calcule cada um dos seguintes integrais definidos:

(a) $\displaystyle\int_0^2 4x^3\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^3 (6x^2-1)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_4^5 (4x+3)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^4 \left(3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(g) $\displaystyle\int_2^3 -\frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^1 3(x^4+4x)(x^5+10x^2)^6\,dx$

(m) $\displaystyle\int_\pi^0 \sin(x)\cos^3(x)\,dx$

Exercício 39.

Usando o integral definido, calcule a área da região do plano definida por:

(a) $y \leq 9-x^2$, $y \geq x^2$

(b) $y \geq x$, $y \leq 2-x^2$

(c) $y \leq 5$, $y \geq -5x+5$, $y \geq \ln(x)$

(d) $y \leq \frac{1}{x}$, $0 < y \leq x$, $x \leq 4$

(e) $y = x^4-4x^2$, $y = \sqrt{4-x^2}$

(f) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$

(g) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = x^2$

(h) $x^2 \leq y \leq \frac{1}{x}$, $x \geq 0$, $y \leq 2$

(i) $0 \leq y \leq x^2$, $y \leq \frac{1}{x^2}, 0 \leq x \leq 2$

Exercício 40.

Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então f possui pelo menos uma raiz em $[a,b]$.

Exercício 41.

Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$ define-se a «média de f no intervalo $[0;x]$» por

$$M_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

(a) Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0} M_f(x)$.

(b) Prove que M_f é constante se e só se f é constante.

(c) Prove que o contradomínio de M_f está contido no de f.

Exercício 42.

Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(t^2+1)\,dt}{x^3}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt}{x^2}$.

Exercício 43.

Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das seguintes funções:

(a) $G(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^2}\,dt$; (b) $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$; (c) $I(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \ln(t+2)\,dt$.

Exercício 44.

Seja, para $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}}\,dt$. Mostre que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

Exercício 45.

Para $t \in [0;1]$ considere $x = \arctan(t)$.

(a) Mostre que $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e que $\sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

(b) Seja $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)(1+\sin^2(x))}\,dx$. Procedendo à substituição $x = \arctan(t)$, mostre que

$$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+2t^2)(t+1)}\,dt.$$

(c) Calcule I.

Exercício 46.

Calcule os seguintes integrais impróprios (ou mostre que são divergentes):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x-3}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

II - Exercícios de Álgebra Linear

1. Vetores

Exercício 47.
Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstre as seguintes propriedades:

(a) $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(b) $u + v = v + u$;

(c) $\mathbf{0} + v = v$;

(d) $v + (-v) = \mathbf{0}$;

(e) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

(f) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

(g) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$;

(h) $1u = u$.

Exercício 48.
Sejam $u = (-1, 3, 4), v = (2, 1, -1), w = (-2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Calcule:

(a) $||u||$;

(b) $||v||$;

(c) $||u + v||$;

(d) $|| - u||$;

(e) $u \cdot (v + w)$;

(f) $d(u, v)$.

Exercício 49.
Mostre que:

(a) $||u|| \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$;

(b) $||v|| = 0$ se e só se $v = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$;

(c) $||\alpha u|| = |\alpha|\, ||u||, \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

Exercício 50.
Considere o vetor $v = (2, 4, -3)$. Determine se v é ou não combinação linear dos seguintes vetores:

(a) $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 0, 1)$;

(b) $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 1)$;

(c) $a = (2, 0, 0)$, $b = (1, 3, 0)$, $c = (1, 1, 1)$;

(d) $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 0, 2)$, $c = (3, 1, 3)$.

Exercício 51.
Averigue se as seguintes famílias de vetores são linearmente independentes:

(a) $\underline{a} = \{(-2, 4), (1, -2)\}$;

(b) $\underline{b} = \{(2, 1), (-6, -3)\}$;

(c) $\underline{c} = \{(2, 3), (3, 2)\}$;

(d) $\underline{d} = \{(0, 0, 3), (0, 1, 1), (2, 0, 1\}$;

(e) $\underline{e} = \{(2, 0, 0, 0), (1, 3, 0, 0), (4, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\}$;

(f) $\underline{f} = \{(1, 1, 1, 1), (0, -2, 3, 5), (3, 3, 3, 3), (1, 2, 2, -7)\}$.

Exercício 52.
Seja $\underline{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma família de p vetores de $\mathbb{R}^n$ não nulos e dois a dois ortogonais.

(a) Mostre que a família $\underline{u}$ é linearmente independente.

(b) Aplicação: mostre que a família $\underline{u} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (-3, 0, 3, 0)\}$ é linearmente independente.

Exercício 53.
Discuta, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a independência linear das seguintes famílias de vetores:

(a) $\underline{u} = \{(3, -1), (1, 1+\lambda)\}$;

(b) $\underline{u} = \{(1, -2), (\lambda, -1)\}$;

(c) $\underline{v} = \{(1, 2, 3), (-2, \lambda, -6)\}$.

Exercício 54.
Considere uma família $\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a família formada pelos vetores $v_1 = 2u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$ e $v_3 = u_1 + 3u_3$ é também linearmente independente.

Exercício 55.
Mostre que um conjunto de k vetores de $\mathbb{R}^n$, com $k \geq 2$, é linearmente dependente se e só se um dos vetores for combinação linear dos restantes.

Exercício 56.
Mostre que se o vetor nulo pertencer a um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$, então o conjunto é linearmente dependente.

2. Matrizes

Exercício 57.
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique quais das seguintes operações estão definidas e calcule, se for o caso, a matriz resultante:

(a) $3A$

(b) $A + B$

(c) $B + C$

(d) $4C - 2D$

(e) AB

(f) $(CD)^T$

(g) $(2A)(5C)$

(h) A^2

(i) $(AC)^2$

(j) $(2A - BD)$

(k) $A^T A$

(l) $BC - CB$

(m) AC.

(n) CA.

Exercício 58.
Determine os valores do parâmetro real α para os quais a matriz seguinte é simétrica:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & -3 \\ \alpha + 1 & 2 & \alpha^2 + 4 \\ -3 & 4\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 59.
Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Explicite as dimensões das seguintes matrizes:

(a) A^T

(b) AA^T

(c) $A^T A$.

Exercício 60.
Sejam A, B e C matrizes quadradas da mesma dimensão. Indique quais das seguintes proposições são necessariamente verdadeiras e forneça um contra-exemplo para as restantes.

(a) $A = B \Rightarrow AC = BC$.

(b) $AC = BC \Rightarrow A = B$.

(c) $AB = BA$.

(d) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$.

(e) $A + C = B + C \Rightarrow A = B$.

(f) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$.

Exercício 61.
Seja A uma matriz quadrada tal que $A^T = 4A$. Mostre que A é a matriz nula.

Exercício 62.
Sejam $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(C_j)_{1 \leq j \leq m}$ as famílias dos vetores linha e dos vetores coluna de uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Mostre que se estas famílias forem ambas linearmente independentes, A é uma matriz quadrada.

Exercício 63.
Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & -12 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 19 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -12 & 20 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 64.
Discuta a característica das seguintes matrizes em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{bmatrix} t & 0 & t^2 - 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & t & t - 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} t + 3 & 5 & 6 \\ -1 & t - 3 & -6 \\ 1 & 1 & t + 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 - t \end{bmatrix}$

Exercício 65. Considere, para $a, b \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ a & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $B = A^{-1}$, determine os valores de a e de b.

Exercício 66.
Mostre que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule a respetiva matriz inversa:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 67.
Mostre que uma matriz diagonal é invertível se e só se nenhum elemento da diagonal for nulo.

Exercício 68.
Seja A uma matriz quadrada tal que $5AA^T + 2A + 5I = 0$. Mostre que A é invertível, e deduza a sua inversa em função de A.

Exercício 69.
Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n.

(a) Mostre que $B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB.

(b) Resolva a equação matricial $XA^{-1} + (AB)^{-1} = A$, em ordem a X.

Exercício 70.
Para cada matriz A, efetue o cáculo indicado, deduza que A é invertível e explicite A^{-1}.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, A^2+A. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 - A$. (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A^2 - 6A + 9I$.

3. Determinantes

Exercício 71. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine A^{-1} e B^{-1}.

(b) Calcule o determinante das matrizes A, B, A^T, B^T, $2A$, $3B$, AB, BA, A^{-1}, B^{-1} e $A^{-1}B$, identificando as propriedades que os cálculos ilustram.

Exercício 72.
Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det(A) = 2$. Calcule

(a) $\det(A^2)$ (b) $\det(3A)$ (c) $\det(-A^{-1})$

(d) $\det(2A^T)$ (e) $\det(AA^TA^{-1})$ (f) $\det\left(\frac{1}{2}A^4\right)$.

Exercício 73.

Considere uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertível. Mostre que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exercício 74.

Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & a & a \\ b & b & b & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, onde a e b são dois parâmetros reais.

Sabe-se que $\det(C) = 5$. Calcule o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2a & 2a & 2a & 2a \\ 7b & 7b & 7b & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 75.

Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exercício 76.

Calcule os determinantes das seguintes matrizes em função dos parâmetros reais a, b e c:

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ b & 0 & a & a \\ 0 & b & a & a \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{bmatrix}$

Exercício 77.

Determine para que valores do parâmetro real λ as seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Sistemas de equações lineares

Exercício 78.

Para cada um dos seguintes sistemas lineares:

(1) Explicite a matriz ampliada correspondente e reduza-a a uma matriz em escada;

(2) Classifique o sistema e determine, se pertinente, o respetivo número de graus de liberdade;

(3) Resolva explicitamente o sistema.

(a) $\begin{cases} -2x-3y+z=3 \\ 4x+6y-2z=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ y+2z=1 \\ 2x+y+4z=2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-y+2z+w=1 \\ 2x+y-z+3w=3 \\ x+5y-8z+w=1 \\ 4x+5y-7z+7w=7 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+y-w=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+y-z+w=2 \\ 2x-y+z-3w=1. \end{cases}$

Exercício 79.

Classifique os sistemas seguintes em função dos parâmetros reais a e b:

(a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x-2y+az=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=a \\ x+2y=a^2 \\ x+3y=a^3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} ax+z=2 \\ x+y+z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z-y+2z=a \\ 2x+bz=2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x+y=b \\ 3x+2y+z=0 \\ x+ay+z=2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} by+az=1 \\ y+az=0 \\ x+by=0 \end{cases}$

Exercício 80.

Mostre que o sistema $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-3z=-3. \end{cases}$ é de Cramer e determine a respetiva solução.

Exercício 81.

Mostre que o sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x+z=2 \\ y+z=1. \end{cases}$ é de Cramer e determine o valor da incógnita z da solução.

Exercício 82.

Mostre que, independentemente dos valores dos parâmetros reais a, b e c, o sistema $\begin{cases} 3x+y=a \\ x-y+2z=b \\ 2x+3y-z=c \end{cases}$ é possível e determinado e calcule a respetiva solução de duas formas:

(a) Utilizando as fórmulas ditas de Cramer;

(b) Começando por calcular a matriz inversa de $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.