Licenciaturas - Economia e Gestão

Matemática I

1° Semestre - 2023/2024

Exame Época de Recurso - 31 de Janeiro, 2024 - Duração: 2h00

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas

Os valores em $[*,*]$ no início de cada pergunta representam a sua cotação na escala $0-20$

1. Seja $A =]2,5[\setminus\{3\}$.
   (a) **[1,0]** Determine o exterior e a fronteira de A.
   (b) **[1,0]** Justifique se A é um conjunto fechado.

2. **[1,5]** Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 3\frac{x^{2n}}{9^n}$ é convergente, e para esses valores, calcule a soma da série.

3. Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+2}-1}{x}, & x<0 \\ x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \end{cases}$$

   (a) **[1,0]** Verifique se a função f admite prolongamento por continuidade ao ponto $x=0$.
   (b) **[1,0]** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}$.
   (c) **[1,5]** Seja f^{-1} a função inversa da restrição da função f ao intervalo $]-3,-1[$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(0,-2)$.

4. Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$, cujo contradomínio é $[1,+\infty[$, e considere a função

$$f(x) = \int_0^{x^2+1} g(t)\,dt.$$

   (a) **[1,5]** Justifique que f tem um único ponto crítico e determine-o.
   (b) **[1,0]** Classifique esse ponto crítico, justificando convenientemente.

5. **[1,0]** Considerando a função $h(x) = \ln(x^2+e)$, determine o seu polinómio de Taylor de ordem 2 centrado em $x=0$.

6. Calcule:
   (a) **[1,5]** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)^7\,dx$.
   (b) **[2,0]** $\displaystyle\int (x^3+1)\cos\left(x^4+4x\right) + xe^x\,dx$.

7. Seja I a matriz identidade de ordem 3 e sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) **[1,0]** Mostre que $A^T A - BA = 3I$.

(b) **[1,0]** Mostre que a matriz A é invertível e indique a sua matriz inversa.

(c) **[1,0]** Os vetores dados pelas linhas da matriz A são linearmente independentes?

8. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ x - 2y + \alpha z = \beta \\ 3y + z = 1 \end{cases}, \quad \text{em que} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) **[1,5]** Classifique o sistema em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) **[1,5]** Determine o conjunto solução do sistema quando $\alpha = 3$ e $\beta = 0$.