Licenciaturas - Economia e Gestão

Matemática I

1º Semestre - 2023/2024

Exame Época Normal - 10 de Janeiro, 2024 - Duração: 2h00

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas

Os valores em $[*,*]$ no início de cada pergunta representam a sua cotação na escala $0-20$

1. Considere o conjunto $A = [2,5[\cup \{6\}$.
   (a) **[1,0]** Determine o interior e a fronteira de A.
   (b) **[1,0]** Justifique se A é um conjunto aberto.

2. **[2,0]** Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3-x}{2}\right)^n$ é convergente e, para esses valores, calcule a soma da série.

3. **[2,0]** Determine a área da região do plano delimitada pelas linhas de equações $y = x+1$ e $y = -x^2 + x + 2$ usando o integral definido.

4. **[2,0]** Considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1-x), & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{2x} e^{t^2} - t\,dt, & x > 0 \end{cases},$$

   verifique se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que a função f seja contínua em $x = 0$.

5. Calcule:
   (a) **[1,5]** $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{-2x} + x\right)\,dx$.
   (b) **[2,0]** $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - x - 2}\,dx$.

6. **[1,5]** Verifique se o vetor $u = (4,2,3)$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores $v = (-2,0,-1)$ e $w = (1,1,1)$.

7. **[1,5]** Determine para que valores do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ os vetores $u = (-1,2,3)$ e $v = (2,\alpha,-6)$ são linearmente independentes.

8. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + (\alpha + 1)z = 3 \end{cases} \quad , \qquad \text{em que } \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) **[1,5]** Determine, caso existam, os valores de α tais que o sistema é possível.

(b) **[1,0]** Considerando $\alpha = 0$, determine o conjunto solução do sistema.

9. Sejam $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade de ordem 3 tais que

$$A^3 - 3A^2 = 2I \qquad \text{e} \qquad \det(3I - A) = 4.$$

(a) **[1,5]** Mostre que A^2 é invertível, e indique a sua matriz inversa em função de A e de I.

(b) **[1,5]** Calcule o determinante da matriz inversa de A^2.