Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aula Teórico-Prática N.º 1 (Semana 1)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1 Distribuição do Qui-Quadrado

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

Definição: A v. a. contínua X segue uma **distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade**, i. e., $\boldsymbol{X \sim \chi^2_n}$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0,\ n > 0,}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

O parâmetro caracterizador desta distribuição é n.

Principais características:

- A v. a. só toma valores positivos;
- É uma função não simétrica.

A forma da distribuição depende dos graus de liberdade (Figura 5.12), tornando-se menos assimétrica com o aumento do número de graus de liberdade. Esta distribuição está tabelada (Anexo B).

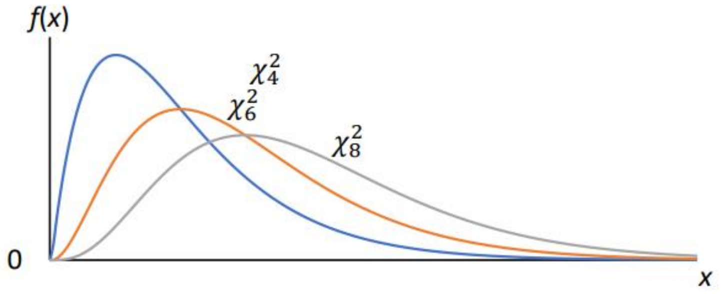


***Figura 5.12:** Função densidade de probabilidade distribuição Qui-Quadrado para diferentes graus de liberdade.*

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- A distribuição do qui-quadrado (χ^2) é uma distribuição de probabilidade contínua.
- É uma das distribuições de probabilidade mais usadas em inferência estatística – *ex.*, testes de hipóteses, construção de intervalos de confiança.
- A distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade 'surge' quando tomamos o quadrado de uma distribuição normal padrão.

  (*i.e.*, a distribuição de uma soma de quadrados de n variáveis aleatórias independentes normalmente distribuídas)

- Se X tem uma distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade, escreve-se

$$\boxed{X \sim \chi^2\,(n)}$$

- A distribuição do qui-quadrado tem um parâmetro: n – nº de termos independentes num somatório de quadrados (*i.e.*, o número de Xis)

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Teorema da aditividade**

Se X_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ são variáveis aleatórias independentes e

se $X_i \sim \chi^2 (n_i)$

então: $\Sigma X_i \sim \chi^2_{(m)}$

(*i.e.*, ΣX_i é uma distribuição do qui-quadrado com $m = \Sigma n_i$ graus de liberdade)

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Outros teoremas**

  - Se Z tem uma distribuição normal padrão, então Z^2 tem distribuição do qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

$$\boxed{Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \cap \chi^2_{(1)}}$$

  - Se X_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média μ_i e desvio-padrão σ_i, então:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \cap \chi^2_{(n)}}$$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- É uma distribuição positiva e não simétrica.
- E[X] = n
- Var[X] = 2n
- Está tabelada para algumas probabilidade e $n \leq 30$.
- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal:

$$\boxed{\sqrt{2X} - \sqrt{2n} \mathrel{\dot\frown} N(0,1)}$$

Na tabela dada, a distribuição Qui-Quadrado está tabela para n > 30

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Se $X \sim \chi^2_n$, então $\mu_X = E(X) = n$ e $\sigma^2_X = Var(X) = 2n$.

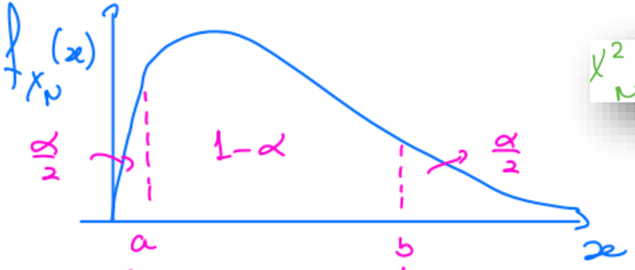
Usualmente utiliza-se a notação $\chi^2_{n;\,\alpha}$ para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim \chi^2_n$. Portanto, $\chi^2_{n;\,\alpha}$ corresponde ao menor valor k tal que $P(X \leq k) = \alpha$.

Distribuição do Qui-Quadrado: Resumo

Propriedades:

i) $f_{\chi^2_N}(x) > 0$ para $x > 0$

ii) Não é uma distribuição simétrica



$a = F^{-1}_{\chi^2_{(N)}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad$ $b = F^{-1}_{\chi^2_N}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

χ^2_N lê-se "distribuição do qui-quadrado com N graus de liberdade"

Distribuição do Qui-Quadrado

Formulário

- **QUI-QUADRADO** $X \sim \chi^2(n)$, (n inteiro positivo).

$$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \sim G(n/2;1/2)\ ;\ E(X)=n\ ;\ \text{Var}(X)=2n\ ;\ M_X(s)=(1-2s)^{-\frac{n}{2}},\ s<\frac{1}{2}\ \ ;\ \gamma_1=\sqrt{\frac{8}{n}}\ ;\ \gamma_2=3+\frac{12}{n}$$

Propriedades:

- $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ ($i=1, 2, ..., k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \chi^2_{(n)}$ com $n=\sum_{i=1}^k n_i$
- $X \sim G(n;\lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$
- $X_i \sim N(0,1)$, ($i=1,2,...,n$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow \sqrt{2X}-\sqrt{2n-1} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Distribuição Gama
(ver slides a seguir)

Distribuição do Qui-Quadrado: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de <u>a</u> que garante $P[X \leq a] = 0,9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de <u>a</u> e <u>b</u> que garantem:

   $$P[X < a] = 0,95 \text{ e } P[X > b] = 0,975$$

   b) Calcule <u>c</u> e <u>d</u> tais que $P[c < X < d] = 0,9$.

   c) Calcule $P[X > 30,6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

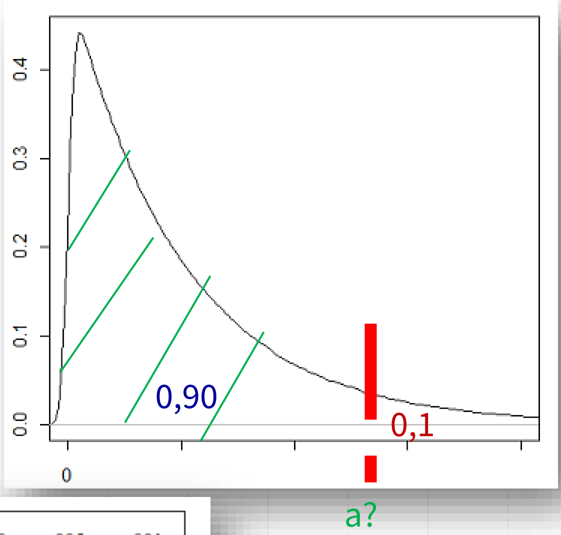
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 1

Área total é igual a 1



$$P(X \leq a) = 0{,}90 \Leftrightarrow a = F(0{,}90)^{-1} = 15{,}987$$

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$

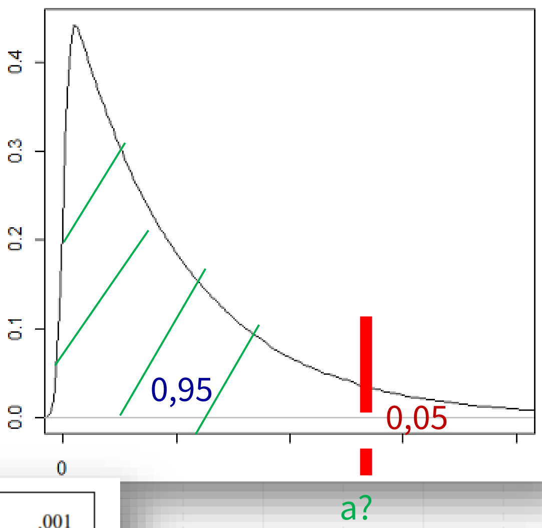
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.

   c) Calcule $P[X > 30,6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 a)

Área total é igual a 1



$P(X < a) = 0,95 \Leftrightarrow a = F(0,95)^{-1} = 18,307$
$P(X > b) = 0,975 \Leftrightarrow b = F(0,025)^{-1} = 3,247$

$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$

ε / n	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$

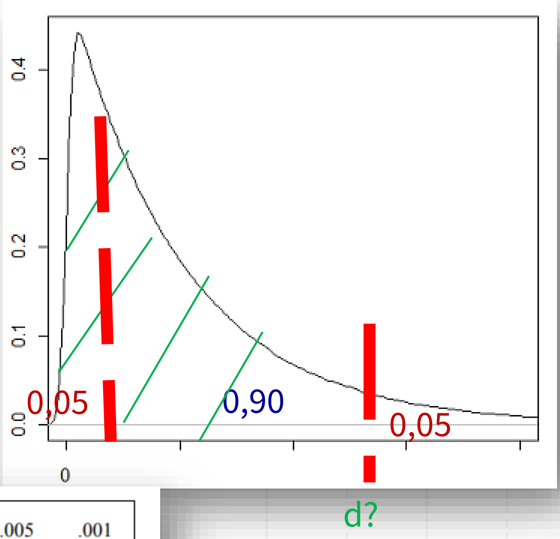
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.

   c) Calcule $P[X > 30,6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 b)

Área total é igual a 1



$P(c < X < d) = 0,90 \Leftrightarrow P(X < d) - P(X < c) = F(d) - F(c) = 0,90$

Logo, tem-se $d = F(0,95)^{-1} = 18,307$ e $c = F(0,05)^{-1} = 3,940$

$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Área total é igual a 1

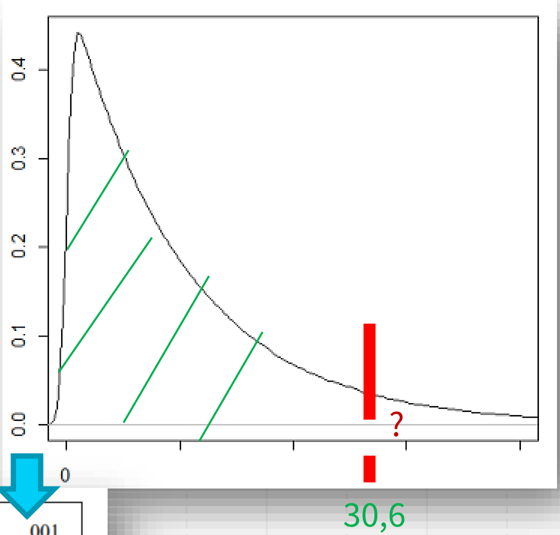
Exercício 2 c)

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.
2. Suponha que : $X \sim \chi^2_{(10)}$.
   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.
3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.



$P(X > 30{,}6) \sim P(X > 29{,}588) = 0{,}001$

$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \le a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

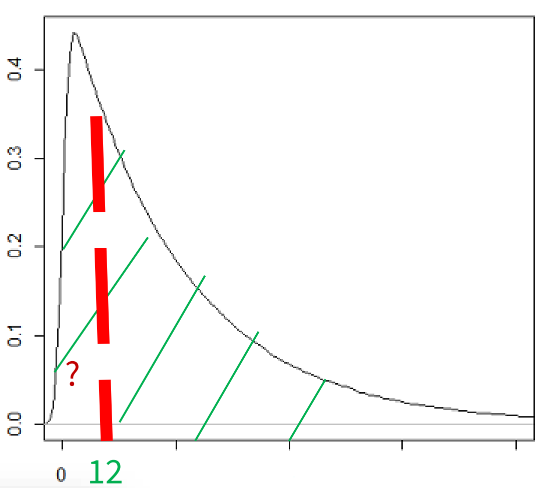
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 3

Área total é igual a 1



$P(Y < 12) \sim 1-P(Y > 35{,}534) = 1-0{,}995 = 0{,}005$

Alternativamente, pelo TLC (aproximação à distribuição Normal)

$P(Y < 12) \sim P([Y-n]/(2n)^{-0,5} < (12 - 60) / 10{,}95) = P(Z < -4{,}38)$

$= \Phi(-4{,}38) = 1 - \Phi(4{,}48) \sim 1 - 0{,}999978 = 0{,}000022$ (ver na Tabela da distribuição normal)

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε / n	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215	112.317
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334	88.130	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839

3 Distribuição t-Student

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student é uma distribuição de probabilidade contínua.

- A distribuição t-Student geralmente surge quando temos uma população com variância desconhecida (e tem de ser estimada a partir dos dados recolhidos) e uma amostra de dimensão pequena ($n < 30$).

- A distribuição t-Student é dada pelo quociente entre uma normal reduzida e a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida pelo respectivo número de graus de liberdade.

  I.e., se $Z \sim N(0; 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \cap t_{(n)}}$$

- Se X tem distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:

$$\boxed{X \sim t_{(n)}}$$

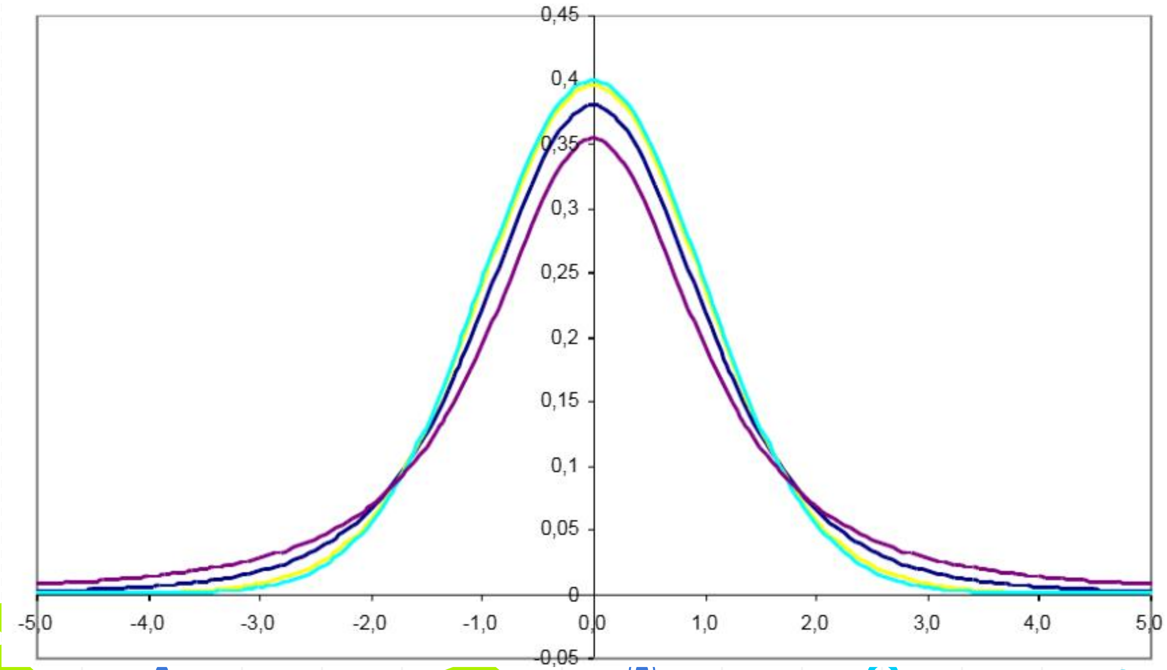
Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student tem um parâmetro: n – o nº de graus de liberdade.
- É uma distribuição simétrica.

- $E[X] = 0$
- $Var[X] = n/(n-2)$, se $n > 2$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student

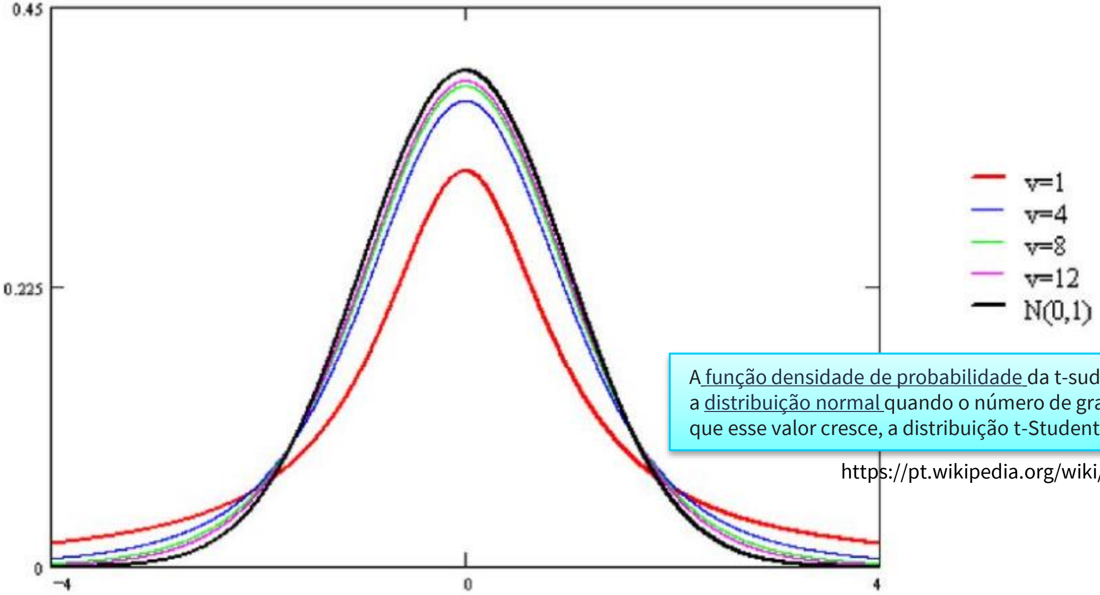


Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

T-Student

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- **...** A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por ν

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \cap t_{(n-1)}$$



A função densidade de probabilidade da t-sudent detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

https://slideplayer.com.br/slide/14561961

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student varia de acordo com os graus de liberdade. Isto significa que a sua curva depende da dimensão da amostra, n.

- Está tabelada para algumas probabilidade e $n \leq 30$, $n = 40$, $n = 60$, $n = 120$ e $n = \infty$.

- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal. Em tais casos, $\mu = 0$ e $Var = n/(n-2)$.

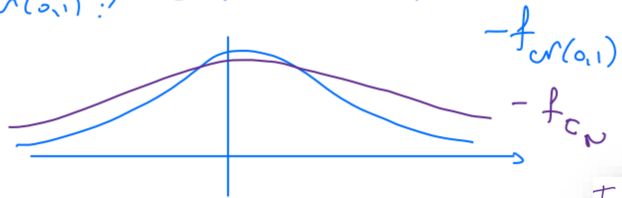
- À medida que n aumenta, a distribuição tende para a distribuição normal. Para n grande, a distribuição t-Student tende a ser muito semelhante à distribuição normal.

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student: Resumo...

propriedades básicas desta distribuição

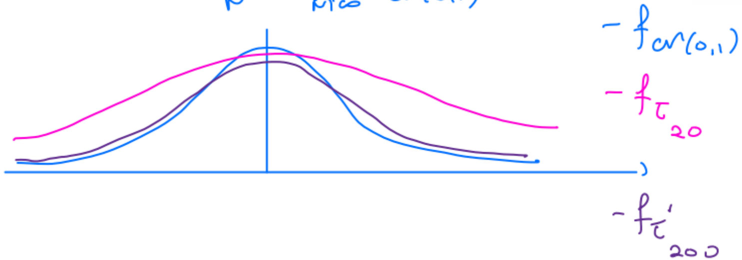
i) a sua função densidade de probabilidade é simétrica em torno de zero e tem uma representação gráfica muito parecida com a da $N(0,1)$:/



t_n lê-se "distribuição t de student com n graus de liberdade"

ii) Quando n é "bastante grande",

$$f_{t_n}(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f_{N(0,1)}(x)$$



Distribuição t-Student

Formulário

- ***t*-“STUDENT”**

$T = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$ com $U \sim N(0,1)$ e $V \sim \chi^2(n)$ independentes

$E(T) = 0\,;\ \mathrm{Var}(T) = \dfrac{n}{n-2}\ (n > 2)\,;\ \gamma_1 = 0\,;\ \gamma_2 = \dfrac{3(n-2)}{n-4}\ (n > 4)$

Propriedade:

- Sendo $T \sim t(n) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F_T(t \mid n) = \Phi(t)$

Distribuição do t-Student: Exercícios

4

Variáveis Aleatórias Contínuas

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.

Exercício a)

Suponha que X ~ t $_{(12)}$.

a) Calcule P[X ≤ 2,7];

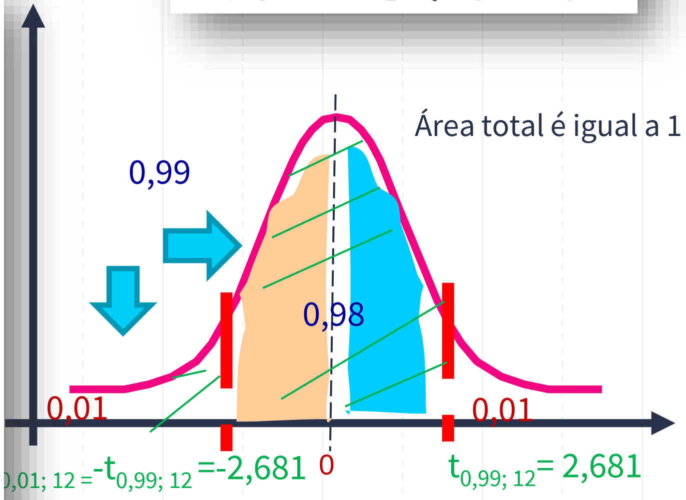
b) Qual o valor de a tal que P[X ≥ a] = 0,95;

c) Qual o valor de b tal que P[X > b] = 0,05;

d) Qual o valor de c tal que P[-c < X < c] = 0,9.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



P(X ≤ 2,7) ~ P(X ≤ 2,681) = 1- P(X > 2,681) = 1-0,01 = 0,99

Exercício b)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

Suponha que X ~ $t_{(12)}$.

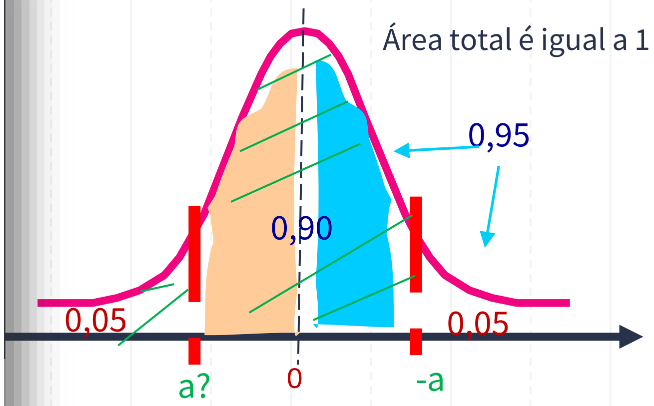
a) Calcule P[X ≤ 2,7];

b) Qual o valor de <u>a</u> tal que P[X ≥ a] = 0,95;

c) Qual o valor de <u>b</u> tal que P[X > b] = 0,05;

d) Qual o valor de <u>c</u> tal que P[-c < X < c] = 0,9.

ε / n	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



P(X ≥ a) = 0,95 ⇔ P(X>-a) = 0,05 ⇔ -a= 1,782 ⇔ a = -1,782

Exercício c)

Suponha que X ~ t $_{(12)}$.

a) Calcule P[X ≤ 2,7];

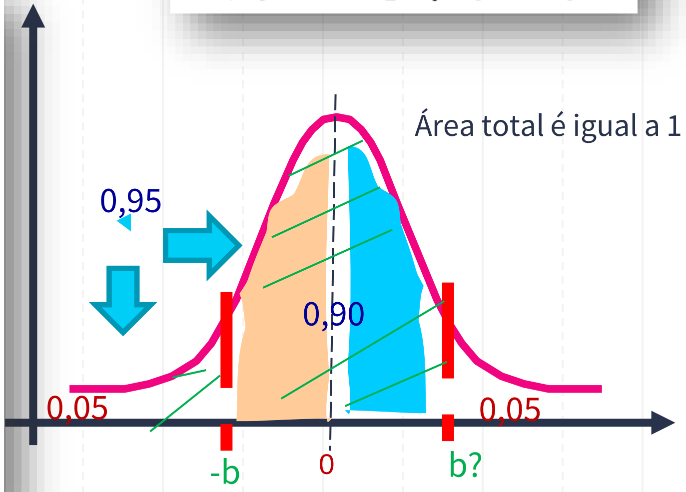
b) Qual o valor de a tal que P[X ≥ a] = 0,95;

c) Qual o valor de b tal que P[X > b] = 0,05;

d) Qual o valor de c tal que P[-c < X < c] = 0,9.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



P(X > b) = 0,05 ⇔ b = 1,782

Exercício d)

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

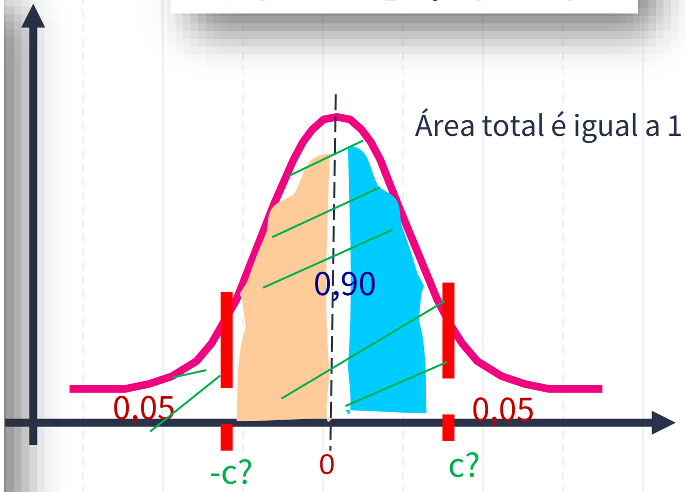
b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



$P(-c < X < c) = 0{,}90 \Leftrightarrow P(X < c) - P(X < -c) = F(c) - F(-c) = F(c) - (1 - F(c))$
$= 2 \times F(c) - 1 = 0{,}90 \Leftrightarrow F(c) = 0{,}95 \Leftrightarrow c = F(0{,}95)^{-1} = 1{,}782$

Obrigada!

Questões?

Cap. 1: Distribuições por amostragem - 1, 2, 4, 5, 12, 16, 19, 20, 21, 22, 23 e 24. (cap. 6 do livro)