



Lisbon School  
of Economics  
& Management  
Universidade de Lisboa

# Estatística I

Licenciatura em Economia  
2.º Ano/2.º Semestre  
2023/2024

# Aula Teórica N.º 1 (Semana 1)

**Docente:** Elisabete Fernandes

**E-mail:** efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

# Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas  
(Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**  
Probabilidades

Aulas Teóricas  
(Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis  
Aleatórias  
Unidimensionais

Aulas Teóricas  
(Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis  
Aleatórias  
Multidimensionais

Aulas Teóricas  
(Semanas 8 a 13)

- **Capítulo 5:**  
Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:**  
Amostragem.  
Distribuições por  
Amostragem.

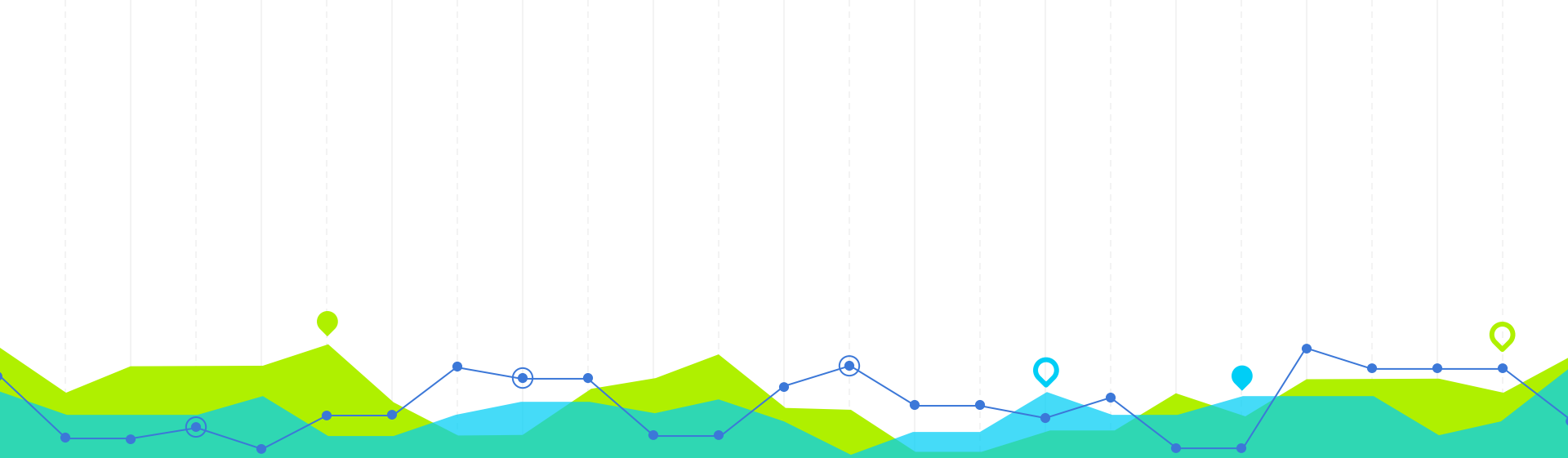
**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia:** B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 1

Apresentação da disciplina. **Início do capítulo 1:** Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimento. Realização de acontecimento. Álgebra de acontecimentos. Axiomática de Kolmogorov. Propriedades da probabilidade. Exemplo. Interpretações do conceito de probabilidade. Regras de contagem: arranjos, combinações e permutações. A regra fundamental da contagem.



# O Que é a Estatística?

1



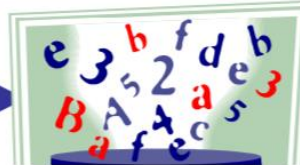
A **Estatística** pode ser definida  
como um conjunto de métodos  
para **Recolha, Análise** e  
**Interpretação** de DADOS.



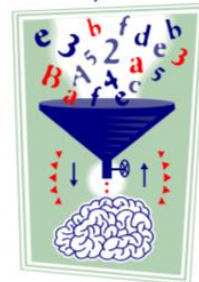
Perguntas



Estudos



Dados



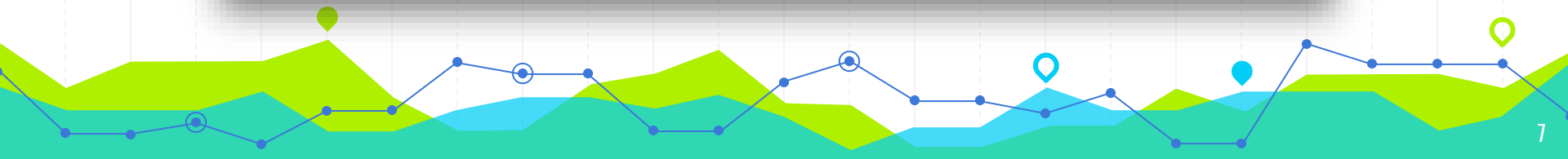
Informação



Respostas

**Estatística**

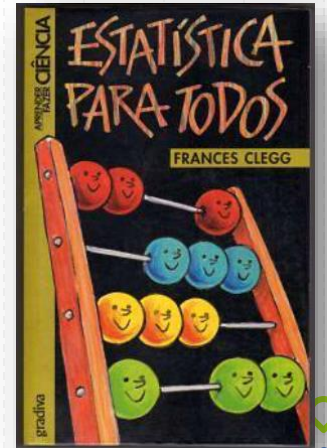
<http://www.est.ufmg.br/~edna/bionutri/NUT-Aula01.pdf>





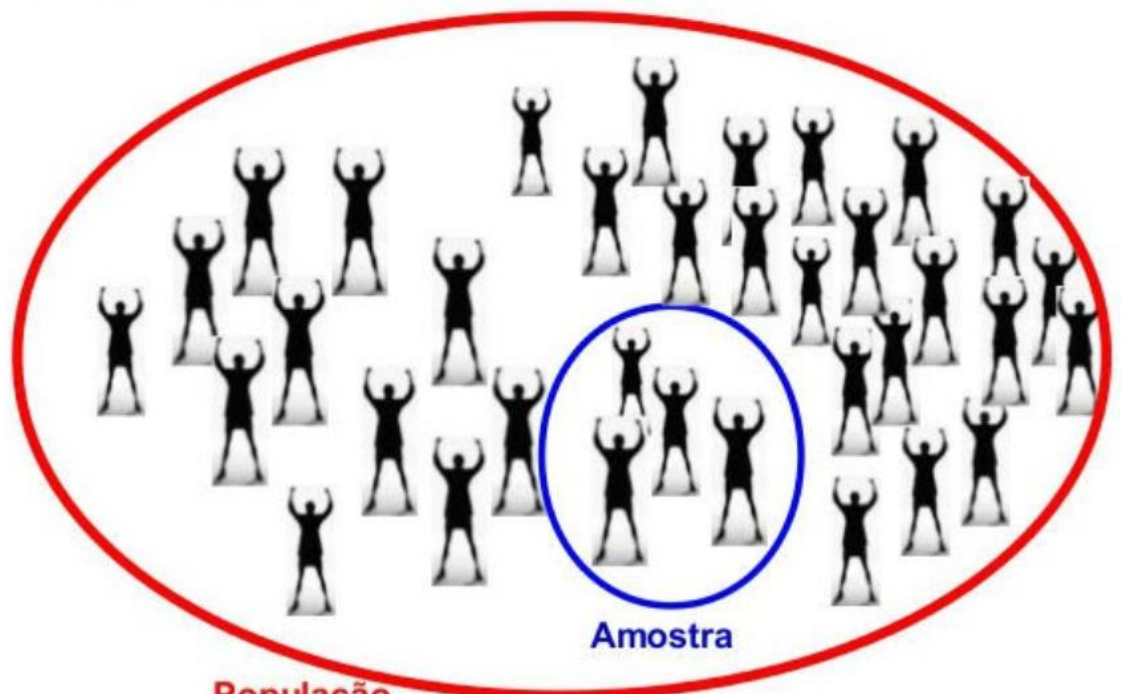
Os *símbolos estatísticos* são semelhantes aos símbolos usados em qualquer outro idioma. Para adquirir fluência num idioma necessitamos apenas de Tempo, Esforço e Prática.

A Estatística é para todos!



<https://www.custojusto.pt>





<https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc/conteudo/>

➤ **POPULAÇÃO:**

- é uma coleção completa de todos os elementos a serem estudados

➤ **AMOSTRA:**

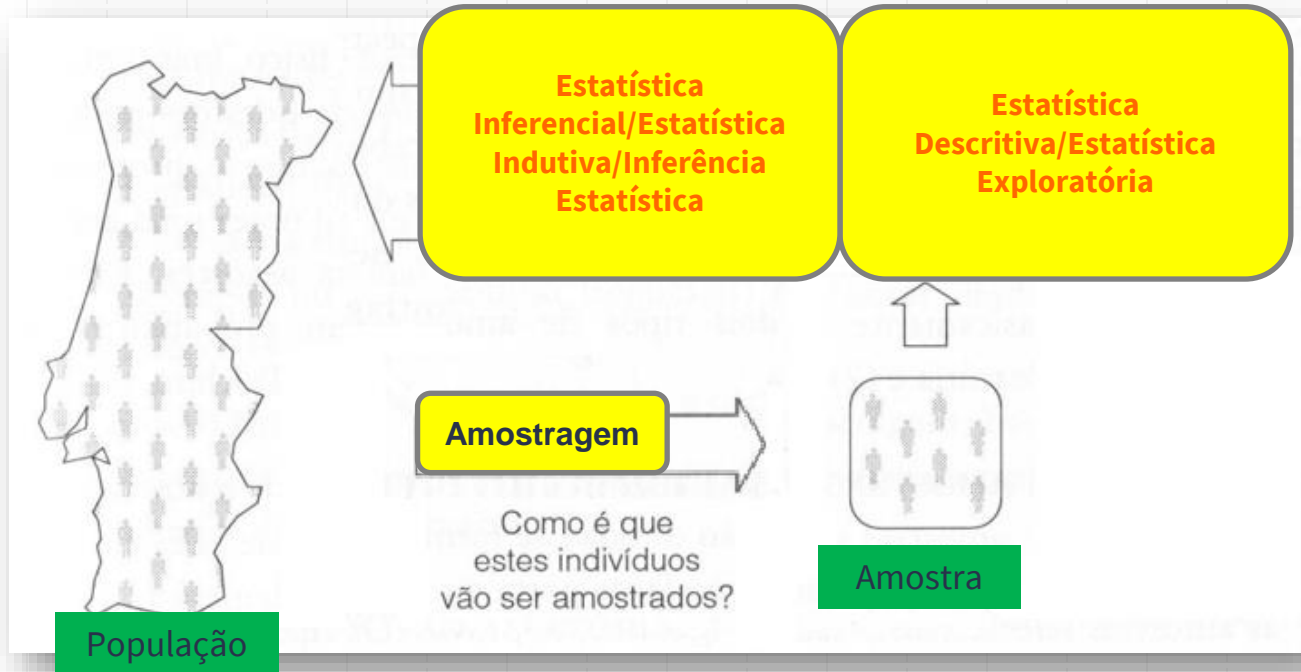
- é um subconjunto da população

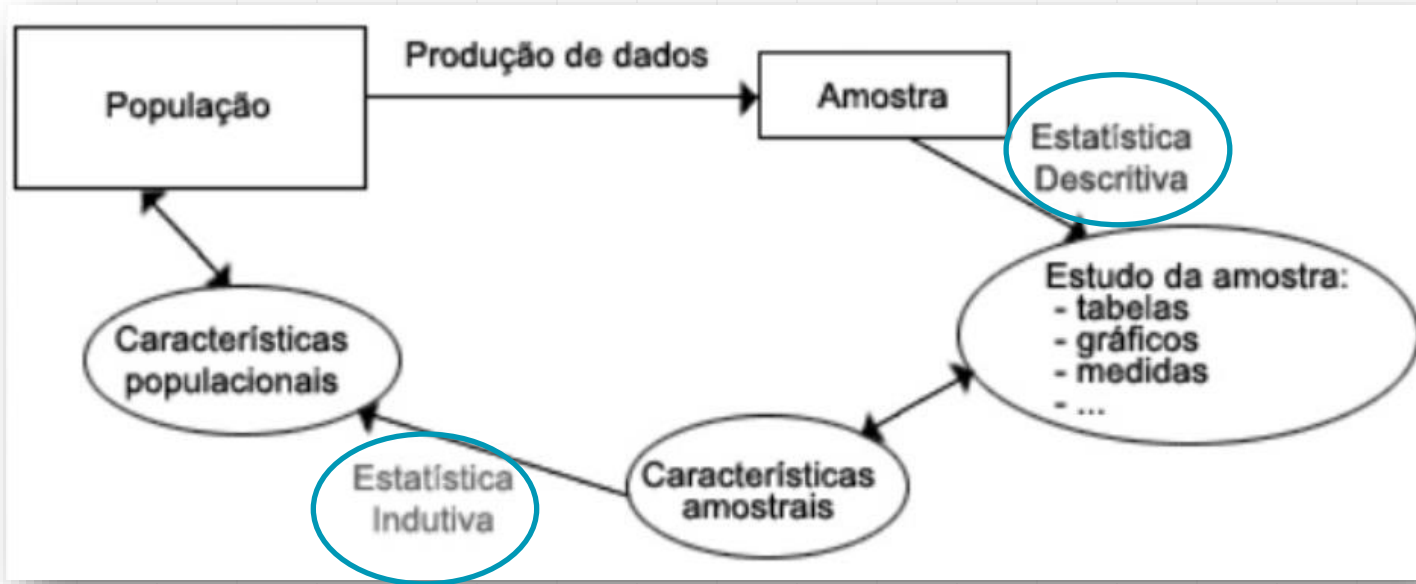
➤ **CENSO:**

- é uma coleção de dados relativos a todos os elementos de uma população:

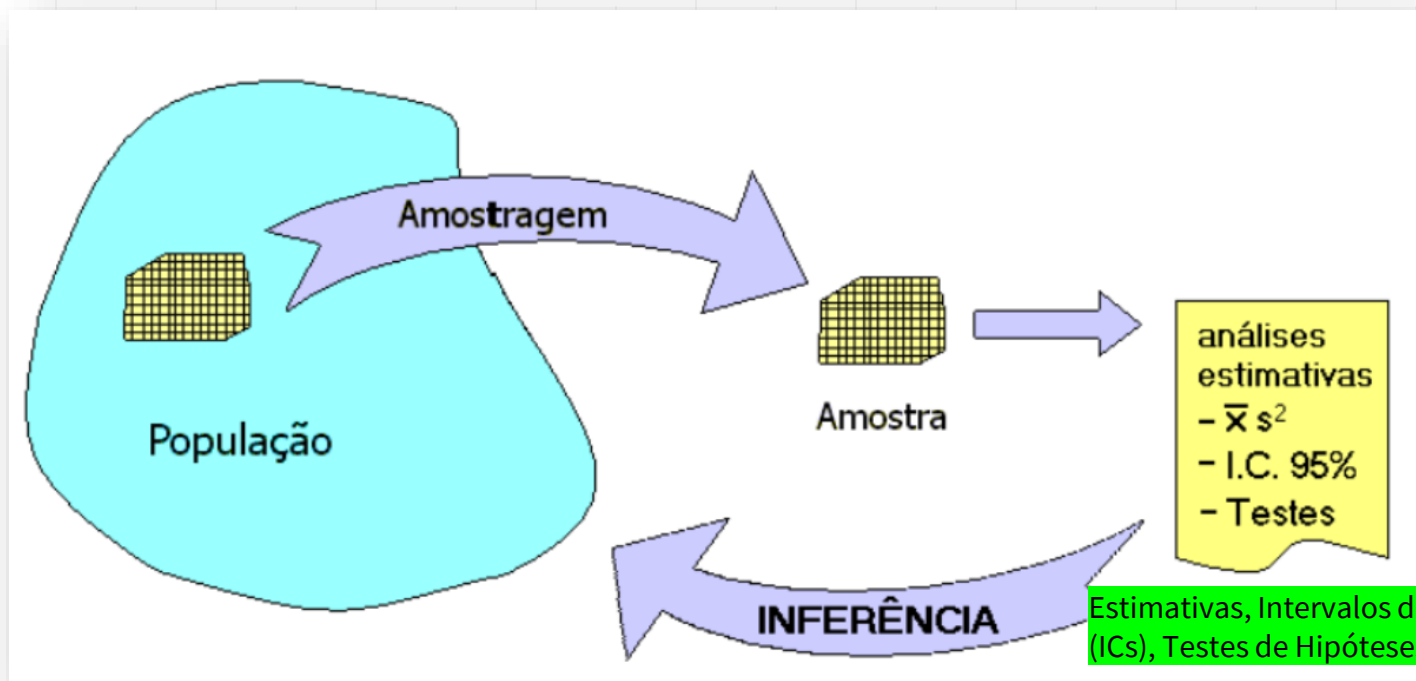
<https://slideplayer.com.br/slide/2627398>

# Estadística Exploratória vs. Estatística Inferencial





<https://umolharmatematico.weebly.com/descritivaindutiva.html>



Estimativas, Intervalos de Confiança (ICs), Testes de Hipóteses...

<https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc>

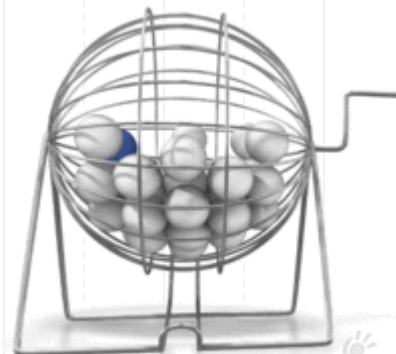
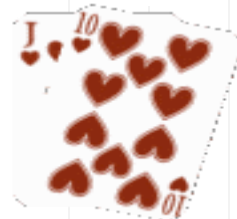


# Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

# 2

# Experiência Aleatória

É toda a experiência que, mesmo repetida várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentro dos resultados possíveis.



# Espaço de Resultados / Espaço Amostral / Universo

- É o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.
- Representa-se por  $S$  ou  $\Omega$ .

# Espaço de Resultados

Qual é o espaço de resultados do lançamento de uma moeda?

$$\Omega = \{\text{Cara, Coroa}\}$$

Qual é o espaço de resultados do lançamento de um dado?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$





# Acontecimento ou Evento

É todo subconjunto de um espaço de resultados  $\Omega$  de uma experiência aleatória.

# Acontecimento ou Evento

No lançamento de um dado, deseja-se que “saíam” valores menores que 4. Qual o evento desta experiência?

$$A = \{1, 2, 3\}$$



# Tipos de Acontecimentos

- Certo;
- Impossível;
- Muito provável;
- Pouco provável;
- Elementar;
- Composto.

# Tipos de Acontecimentos

Obter um número menor que 7 no lançamento de um dado representa que tipo de evento?

E um resultado igual a zero?

E um resultado maior que 5?



# Resumindo....

## Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

**Experiência Aleatória ou casual** caracteriza-se pela impossibilidade de prever o resultado que se obterá, apesar de todos os seus possíveis resultados serem conhecidos à partida.

**Universo, espaço de resultados ou espaço amostral** de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os seus resultados possíveis, denotado por  $\Omega$ .

**Acontecimento** de uma experiência aleatória  $E$  com universo  $\Omega$  é um subconjunto de  $\Omega$ .

### Exemplo:

- Experiência  $E$ : Lançamento de um dado
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,
- Acontecimentos elementares  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ , ...
- Acontecimentos compostos  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ , ...
- Acontecimento certo  $A = \Omega$       Acontecimento impossível =  $\{\}$

Espaço de acontecimentos  
=  $\{\{\}, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \dots\}$



# Conceitos Básicos de Probabilidade

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União,  
Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

# 3

É possível saber a chance/possibilidade de algo acontecer?



Imagem: Webmaster-chx / Creative Commons paternité –  
partage à l'identique 3.0 (non transposée)

# Noção de Probabilidade

Sim, é possível medir a chance/possibilidade de algo acontecer.  
Essa medida é chamada de **PROBABILIDADE!**

**PROBABILIDADE** (proporção ou percentagem) mede a possibilidade de ocorrência de um evento ou acontecimento.



# Definições de Probabilidade

## Definição frequencista de probabilidade

- Probabilidade de um acontecimento  $A$  é o valor para que tende a frequência relativa desse acontecimento quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, e representa-se por

$$P(\hat{A}) \sim \text{frequência}(A)$$

## Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

- Probabilidade de um acontecimento  $A$  é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Então, a probabilidade de  $A$  é dada por

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^\circ \text{ de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

**Nota:** Aplica-se a definição clássica de probabilidade se os acontecimentos possíveis são equiprováveis, ou seja, ocorrem com a mesma probabilidade. Utiliza-se a definição frequencista de probabilidade caso os acontecimentos sejam equiprováveis ou não.

$P(A)$  é um número entre 0 e 1 ou 0% e 100%.

# Tipos de Probabilidades

- Probabilidade simples;
- Probabilidade complementar;
- Probabilidade da união ou reunião;
- Probabilidade da interseção ou conjunta;
- Probabilidade da diferença;
- Probabilidade condicional.



# Probabilidade Simples: Exemplo

Exame com 15 questões com 4 alternativas. Qual é a probabilidade de um aluno acertar todas as questões ao acaso?



# Probabilidade Simples: Exemplo

É fácil acertar em 15 questões, ao acaso, no exame?

$$P(15) = \frac{1}{4^{15}} = 9,31323E-10$$



# Probabilidade Complementar

- Probabilidade de um determinado evento A **não** ocorrer.
- Denota-se por  $P^c$ ,  $P(A^c)$  ou  $P(\bar{A})$
- $A^c = \Omega - A$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

Probabilidade da diferença



# Probabilidade Complementar: Exemplo

No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de não sair a soma 4?

$$\begin{aligned}P(\text{não sair a soma 4}) &= 1 - P(\text{sair a soma 4}) \\ &= 1 - 3/(6 \times 6) = 11/12 \\ &= 0,92 = 92\%\end{aligned}$$

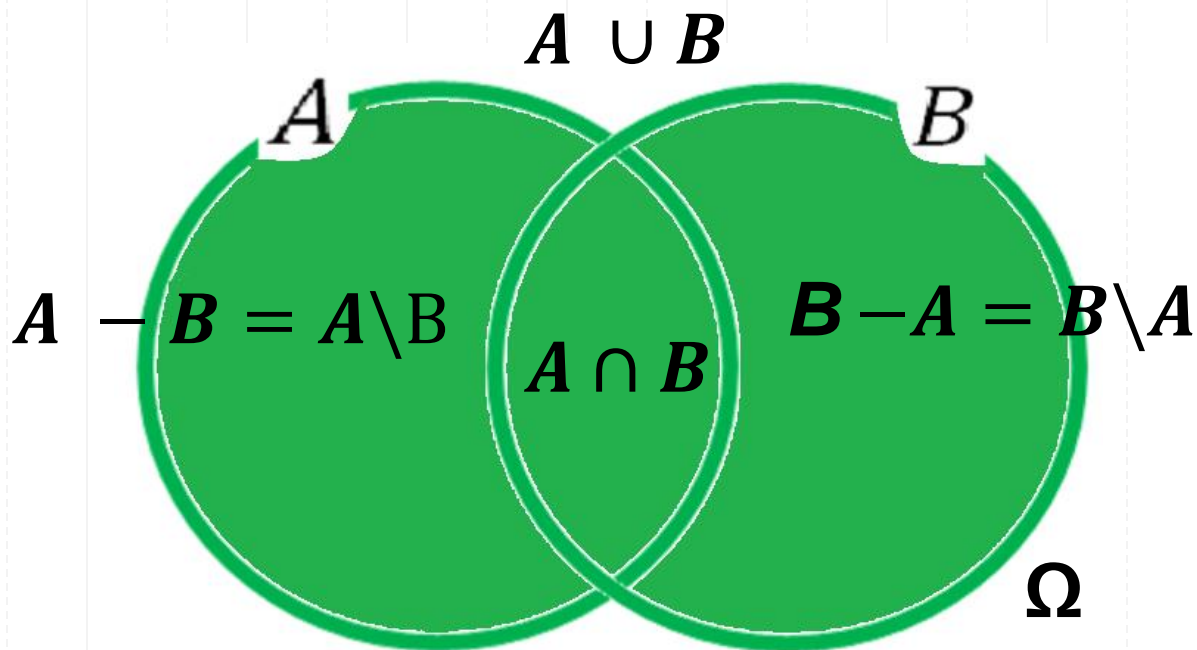


# Axiomática de Probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \text{Espaço dos acontecimentos}$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\{\}) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  e  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Se  $A \subseteq B$  (Se a realização do acontecimento  $B$  implica a realização do acontecimento  $A$ ), então  $P(A) \leq P(B)$   
**Probabilidade da diferença:  $P(A-B) = P(A/B)$  e  $P(B-A) = P(B/A)$**
- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

**Nota:** A abordagem frequentista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

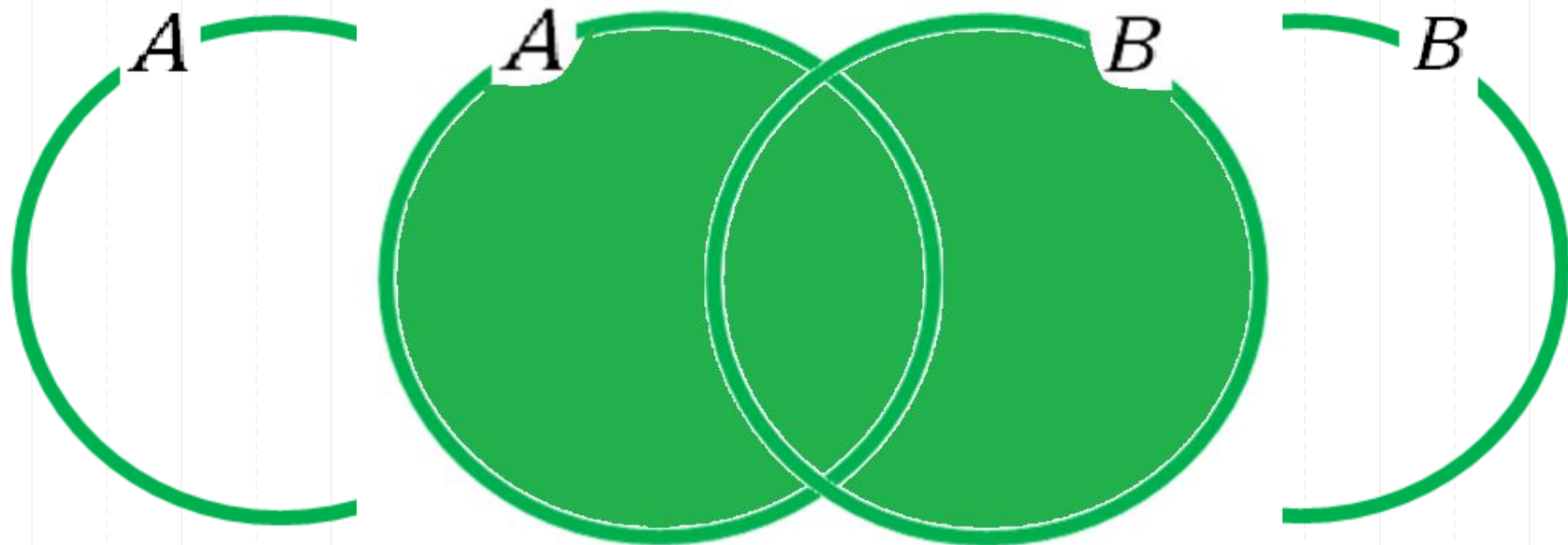
# Diagrama de Venn





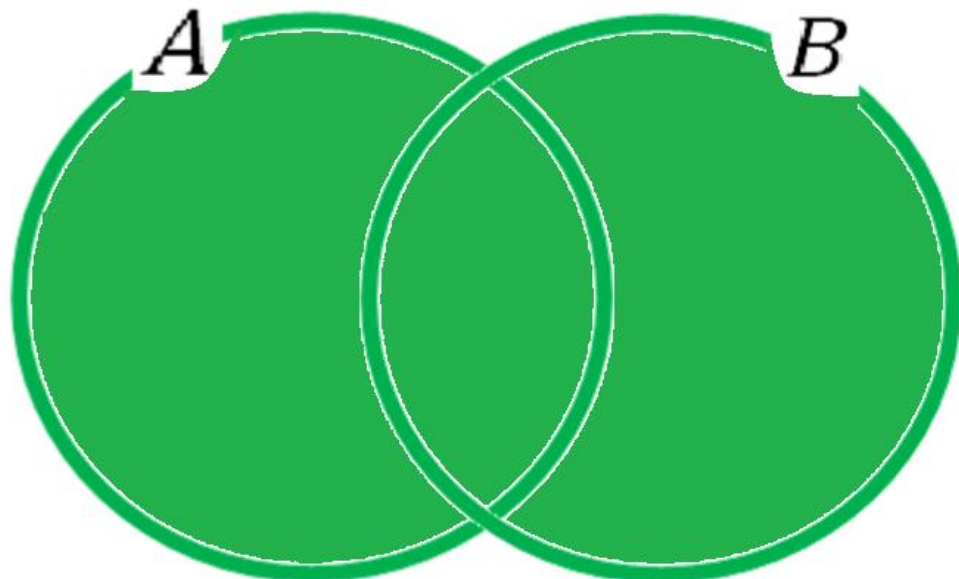
# Probabilidade da União/Reunião

$$A \cup B$$



## Probabilidade da União/Reunião

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



## Probabilidade da União: Exemplo

Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios do clube  $A$ , 300 do clube  $B$  e 200 de ambos. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de  $A$  ou de  $B$ ?

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (400+300-200)/1000 = 0,5 = 50\%\end{aligned}$$



# Axiomática de Probabilidade

➤  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \text{Espaço dos acontecimentos}$

(Probabilidade da reunião de acontecimentos)

Os **acontecimentos disjuntos**, mutuamente exclusivos ou incompatíveis não têm elementos comuns.

○ Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos mutuamente exclusivos ou incompatíveis, definidos em  $\Omega$ , ou seja,  $A \cap B = \emptyset$ , então tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

$$\text{caso contrário } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Escrito de outra forma: } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

$$A, B \in \text{Espaço dos acontecimentos}$$

➤ Regra de Inclusão-exclusão:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**Nota:** A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

# Probabilidade da Interseção: Independência

Quando os resultados do evento A não interferirem e nem influenciaram os resultados do evento B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

# Probabilidade da Interseção: Independência

**Definição 1.6** (Acontecimentos independentes).  $A, B \subset \Omega$  dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

**Propriedades** Se  $A, B \subset \Omega$  independentes, então

1.  $\bar{A}, B$  são independentes,
2.  $A, \bar{B}$  são independentes,
3.  $\bar{A}, \bar{B}$  são independentes.

### Acontecimentos independentes

Definição 2.9: Diz-se que dois acontecimentos  $A$  e  $B$  de um mesmo espaço de resultados  $\Omega$  são *independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

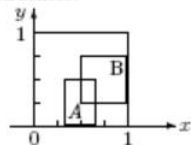
- Todo o acontecimento  $A$  é independente de  $\emptyset$  e  $\Omega$ .
- Se  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes,  $P(A|B) = P(A)$  se  $P(B) > 0$  e  $P(B|A) = P(B)$  se  $P(A) > 0$ .
- Se  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, também o são  $\bar{A}$  e  $B$ ,  $A$  e  $\bar{B}$  e  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ .
- Acontecimentos  $A$  e  $B$  são condicionalmente independentes ao acontecimento  $C$ ,  $P(C) > 0$ , se  $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$ .
- Os acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são completamente independentes, se  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ,  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ ,  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$  e  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ .

Nota: Independência 2 a 2  $\not\Rightarrow$  independência completa dos 3.

- Generalização: Os acontecimentos  $A_1, \dots, A_n$  dizem-se independentes se para todo o  $k=2, \dots, n$  e todo o subconjunto  $\{A_{i_j}, j=1, \dots, k\}$  de  $k$  desses acontecimentos,  $P(\cap_{j=1}^k A_{i_j}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ .

Nota: O número de relações é dado por  $2^n - (n+1)$ .

Exemplo 2.9: Considere o espaço de resultados  $\Omega$  como o quadrado de vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  e  $(1,1)$ . Suponha que a probabilidade de uma região (acontecimento) contida em  $\Omega$  seja a área desta região. Os acontecimentos  $A = \{(x, y) : 1/3 \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq 1/2\}$  e  $B = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1/4 \leq y \leq 3/4\}$  são independentes?



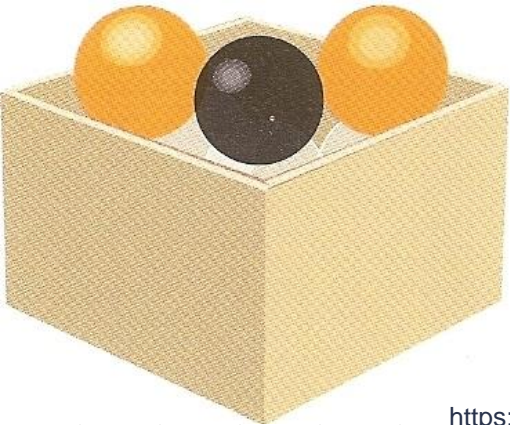
$$P(A) = 1/6, \quad P(B) = 1/4$$

$$P(A \cap B) = 1/24 = P(A) \times P(B)$$

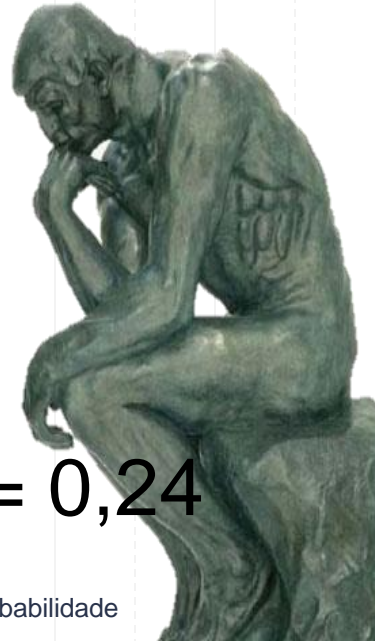
$\therefore$  A e B são independentes.

# Probabilidade da Interseção: Exemplo 1

Numa caixa há 4 bolas pretas e 6 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de tirarmos uma bola preta e uma vermelha, com reposição?



$$\begin{array}{c} \text{4} \\ \downarrow \\ \frac{4}{10} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{6} \\ \downarrow \\ \frac{6}{10} \end{array} = 0,24$$





## Probabilidade de Interseção: Exemplo 2

A probabilidade do Paulo Adriano “tirar” dez na prova de Matemática é  $1/3$  e a probabilidade do Paulo Lucas “tirar” dez na mesma prova é  $2/3$ . Qual é a probabilidade de ambos terem nota dez nesta prova?

$$P(\text{ambos os alunos têm nota 10}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$



# Obrigada!

Questões?

