TESTE DE HIPÓTESES

- A população X tem uma função de distribuição F que apresenta **aspectos desconhecidos**.
- A ideia associada ao teste de hipóteses é estabelecer uma **conjetura** sobre os aspetos desconhecidos da distribuição e **verificar se a informação existente suporta ou não esta conjetura**.
- Primeiros conceitos:
  - **Hipótese estatística (definição 8.1):** qualquer conjetura sobre aspectos desconhecidos de F.
  - **Hipótese paramétrica (definição 8.2):** qualquer conjetura que diga **apenas** respeito ao **parâmetro** (escalar ou vector) da distribuição. **A forma funcional de F é suposta conhecida**.

Neste capítulo apenas nos vamos interessar pelas hipóteses paramétricas

Exemplo – Considere-se uma população da qual se estuda um atributo representado pela v.a. X.

- A conjetura "X é uma variável aleatória com distribuição exponencial" constitui uma hipótese estatística **não paramétrica**.
- Caso se assuma que X tem distribuição exponencial, a conjetura "$\mu = 5$" corresponde a uma hipótese estatística **paramétrica**.

- **Hipótese nula e hipótese alternativa**

Seja $X \sim f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$, θ desconhecido. Qualquer hipótese paramétrica estabelece uma partição do espaço-parâmetro Θ em Θ_0 e Θ_1 (Partição: $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$)

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ **hipótese nula** (geralmente, corresponde ao *satus quo* – algo que se pretende manter)

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ **hipótese alternativa**.

Uma hipótese estatística diz-se **simples** quando o respectivo subconjunto do espaço-parâmetro é **formado apenas por um elemento**; diz-se **composta** no caso contrário.

Exemplo 8.2 (livro) – Pretende aferir-se se determinada **moeda é equilibrada**. Codifica-se a saída de "face" pelo valor 1. O modelo teórico é assim dado por $X \sim Ber(\theta)$.

Espaço-parâmetro? Hipótese nula? Hipótese alternativa?

- **Teste de hipóteses** (definição 8.3 do livro)

  - Um **teste de hipóteses é uma regra** que permite especificar um subconjunto do espaço-amostra, $W \subset \mathcal{X}$, tal que:
    - se $(x_1, x_2, ..., x_n) \in W$ rejeita-se H_0 (logo utiliza-se H_1);
    - se $(x_1, x_2, ..., x_n) \notin W$ não se rejeita H_0.

  O conjunto W chama-se **região crítica** ou **região de rejeição**. O complementar do conjunto W representa-se por $\overline{W}$ e corresponde à **região de não rejeição.**

- Assim um teste estatístico introduz uma partição do espaço-amostra em duas regiões, W e $\overline{W}$, tais que $W \cup \overline{W} = \mathcal{X}$ e $W \cap \overline{W} = \emptyset$.

- Em quase todos os casos de interesse prático trabalha-se com uma **estatística-teste** $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$.

  Nestas circunstâncias, a região de rejeição é definida em ternos da estatística, isto é,

  se $t \in W_T$ rejeita-se H_0; se $t \notin W_T$ não se rejeita H_0.

  O conjunto W_T continua a chamar-se **região de rejeição** ou **região crítica**.

Em resumo, os ingredientes de um teste de hipóteses são:

- A **hipótese nula**, H_0, que é defendida até a evidência mostrar o contrário.
- A **hipótese alternativa**, H_1, que é adotada se a hipótese nula for rejeitada.
- Uma **estatística-teste**, $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ e **uma região crítica**, W_T .

- **Exemplo** – Retomando-se o exemplo anterior (moeda é equilibrada?) um possível teste poderia consistir em observar $n = 100$ lançamentos da moeda e definir a estatística-teste, T, como sendo o nº de vezes em que saiu caras. A região de rejeição poderia ser dada por $W_T = \{t: t < 40 \ \vee t > 60\}$.

  Note-se que, qualquer que seja a decisão que se venha a tomar em função da amostra observada, ela poderá sempre conduzir-nos a uma conclusão errada. Com $\theta = 0.5$ pode-se perfeitamente observar um valor de $T \in \ W_T$ (a probabilidade é cerca de 3.5%) e, portanto, rejeitar H_0.

  De forma "oposta", com $\theta \neq 0.5$, pode-se observar um valor de $T \notin \ W_T$. Para calcular a probabilidade de um erro desta natureza torna-se necessário postular um valor concreto para θ, por exemplo $\theta = 0.65$. Neste caso a probabilidade será cerca de 17.24%

- Sendo o teste de hipóteses efectuado com base numa amostra e não no universo, a decisão a tomar pode estar errada. Devem assim considerar-se dois tipos de erros.

Erros de 1ª e 2ª espécie

Situação / **Decisão tomada**	H_0 **verdadeira**	H_0 **falsa**
Rejeitar H_0	**Erro de 1ª espécie**	**Decisão correcta**
Não rejeitar H_0	**Decisão correcta**	**Erro de 2ª espécie**

Hipótese simples contra hipótese simples

- Considere-se o caso mais simples em que o **espaço-parâmetro é composto por apenas dois pontos**, $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ e suponha-se que se quer testar,

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta = \theta_1.$$

- Neste enquadramento, torna-se possível calcular a probabilidade associada a cada um dos tipos de erro, definida a região crítica W.

- Para o teste associado com a região crítica W, a **probabilidade de cometer o erro de 1ª espécie**,

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = P\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid \theta = \theta_0\right],$$

  designa-se por **dimensão do teste.**

- **A probabilidade de cometer o erro de 2ª espécie** é dada por,

$$1 - \beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W \mid \theta = \theta_1\right].$$

  Esta probabilidade não tem designação especial, mas a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de não cometer o erro de 2ª espécie,

$$\beta = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W \mid \theta = \theta_1\right].$$

  designa-se por **potência do teste**.

Probabilidade dos erros de 1ª e 2ª espécie e decisões correctas

Decisão tomada	H_0 **verdadeira**	H_0 **falsa**
Rejeitar H_0	**Erro de 1ª espécie** Probabilidade $=\alpha$	Decisão correcta Probabilidade $=\beta$
Não rejeitar H_0	Decisão correcta Probabilidade $=1-\alpha$	**Erro de 2ª espécie** Probabilidade $=1-\beta$

Exemplo: Seja X uma população $N(\mu,\sigma^2=4)$. Pretende-se testar $H_0:\mu=10$ contra $H_1:\mu=14$.

Admita-se por agora que se tinha fixado $W=\{\bar{x}:\bar{x}>k\}$ sendo k=12.5 e que a amostra tinha dimensão $n=2$.

$$\alpha = P(\text{Rej } H_0|H_0\text{verd}) = P(\bar{X}>12.5|\,\mu=10) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{12.5-10}{2/\sqrt{2}}\,|\,\mu=10\right) = 1-\Phi\left(\frac{2.5}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1-\Phi(1.77) = 1-0.9616 = 0.0384$$

$$1-\beta = P(\text{não rej } H_0|H_0\text{falsa}) = P(\bar{X}\le 12.5|\,\mu=14) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{12.5-14}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\,|\,\mu=14\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{1.5}{\sqrt{2}}\right) = 1-\Phi(1.06) = 1-0.8554 = 0.1446$$

Alternativamente, em vez da probabilidade do erro de 2ª espécie, pode-se calcular a potência do teste $\beta=1-0.1446=0.8554$ ou, se não se tivesse previamente calculado $1-\beta$, fazendo

$$\beta = P(\text{Rej } H_0|H_0\text{falsa}) = P(\bar{X}>12.5|\,\mu=14) = 1-\Phi\left(\frac{12.5-14}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\right) = 0.8554$$

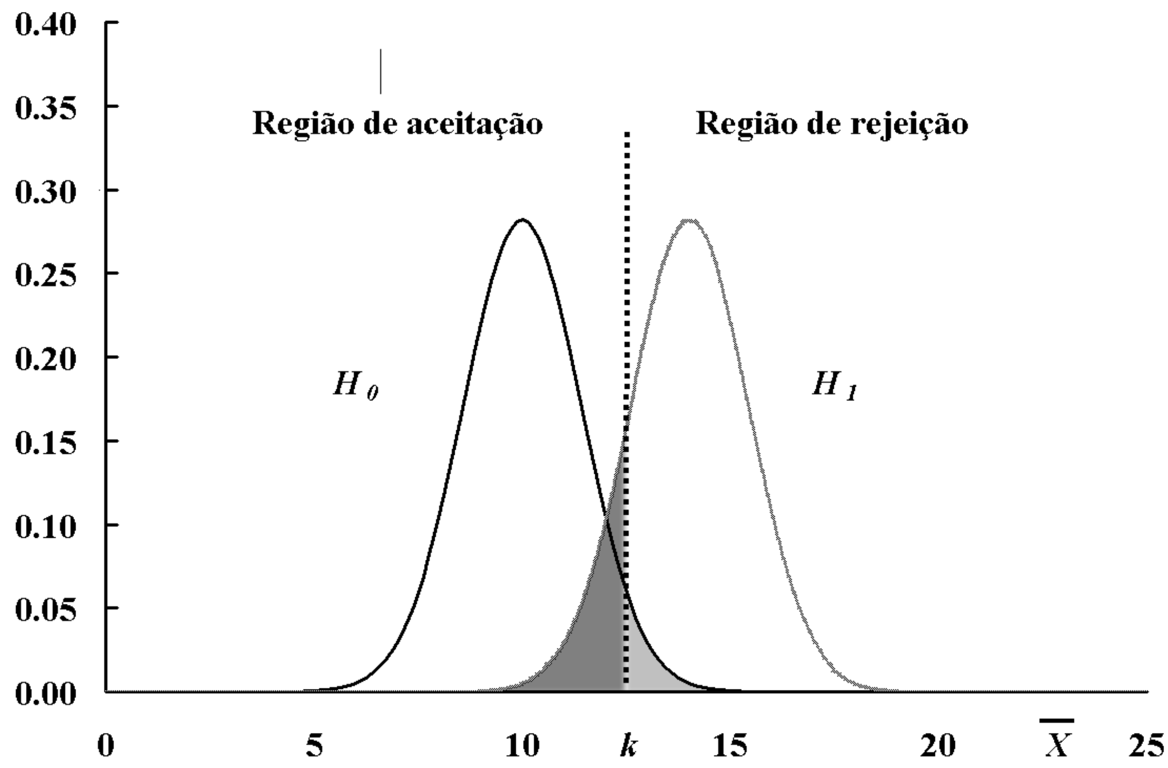


Fig. 8.3 – Probabilidade de um erro de 1ª espécie (sombreado claro) e de um erro de 2ª espécie (sombreado mais escuro) quando k=12.5 $(n = 2)$

O que permite sublinhar alguns aspetos importantes:

- A redução das duas probabilidades (ou de uma delas, supondo a outra fixa) só se consegue aumentando a dimensão da amostra.
- Alterando a fronteira da região crítica, isto é o valor de k, obtêm-se outros valores para α e β.
- Neste caso, aumentando (diminuindo) o valor de k, diminui-se (aumenta-se) a probabilidade de erro de 1ª espécie e em contrapartida aumenta-se (diminui-se) a probabilidade de erro de 2ª espécie para o mesmo valor de n.

	Dim. amostra	RC $W=\{\bar{x}:\bar{x}>k\}$	$\alpha=P(T\in W_T \mid \mu=10)$	$1-\beta = P(T\notin W_T \mid \mu=14)$
a)	n=1	$W=\{x_1 : x_1 > 12.5\}$	0.1056	0.2266
b)	n=2	$W=\{(x_1,x_2):\bar{x}>12.5\}$	0.0384 ↓	0.1446 ↓
c)	n=2	$W=\{(x_1,x_2):\bar{x}>13.5\}$	0.0068 ↓	0.3632 ↑

Não se podendo minimizar simultaneamente a probabilidade dos 2 tipos de erros, torna-se necessário introduzir um critério alternativo.

A filosofia que se vai seguir consiste em

- Fixar a probabilidade de um erro de 1ª espécie num valor adequado
- Fixado α, definir a região de rejeição que minimiza $1-\beta$ ou que maximiza a potência do teste

Esta filosofia baseia-se em 2 considerações muito importantes:

- As consequências dos erros de 1ª e 2ª espécies podem ser bem diferentes e, portanto, não existe fundamento para lhes dar peso idêntico;
- O lema de Neyman-Pearson permite definir o teste mais potente nas condições anteriores

O lema de Neyman-Pearson será objeto de tratamento mais adiante. “Saltando” as especificidades matemáticas, pode-se enunciar a seguinte regra intuitiva:

No teste de médias, variâncias ou proporções a região de rejeição está do lado da alternativa quando se utiliza a estatística “natural”.

Assim, o procedimento prático para realizar determinado teste será:

- Fixar α num valor adequado ao problema que se quer resolver
- Escolher a estatística de teste (cuja distribuição, sob H_0, deve ser conhecida)
- Definir a região de rejeição W
- Realizar o teste e concluir (só nesta última etapa se utiliza a amostra observada)

Exemplo 1: Retome-se o exemplo anterior $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu = 14$ numa população normal de variância conhecida e igual a 4. Vai utilizar-se uma amostra de dimensão $n = 2$

- Fixar α, por exemplo $\alpha = 0.05$
- Teste para a média da população → estatística "natural": $\bar{X}$

  Sendo a variância conhecida utiliza-se, sob H_0, $Z = \frac{\bar{X}-10}{2/\sqrt{2}} \sim n(0,1)$

  Está escolhida a estatística de teste.

– Região de rejeição: Como a alternativa é $H_1: \mu = 14 > 10 = \mu_0$ vem $W = \{(x_1, x_2): \bar{x} > k\}$

Para determinar k, faz-se

$$\alpha = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(\bar{X} > k |\ \mu = 10) = P\left(Z > \frac{k-10}{2/\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k-10}{\sqrt{2}}\right)$$

Logo

$\Phi\left(\frac{k-10}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \alpha = 0.95$ e portanto $\frac{k-10}{\sqrt{2}} = 1.645$ isto é $k = 10 + 1.645\sqrt{2}$=12.3264

A região de rejeição é então $W = \{(x_1, x_2): \bar{x} > 12.3264\}$

– Realização do teste: Calcula-se $\bar{x}$ com base na amostra observada e decide-se em conformidade.

Alternativamente, e de forma talvez mais simples, pode-se definir a região de rejeição em termos da estatística de teste $Z = \frac{\bar{X}-10}{2/\sqrt{2}}$, fazendo-se $W = \{(x_1, x_2): z > 1.645\}$

Observada a amostra (10.7, 13.3) obtém-se $\bar{x} = 12$ ou $z = \frac{12-10}{\sqrt{2}} = 1.4142$ (valores equivalentes) que conduzem à não rejeição de H_0.

Exemplo 2: Observou-se a amostra (15.2, 20.1, 17.4, 15.3) de uma população normal com o propósito de testar $H_0: \mu = 20$ contra $H_1: \mu = 15$.

a) Assumindo que a variância da população é 16, realize o teste para $\alpha = 0.01$.

b) Qual a potência do teste definido na alínea anterior?

c) Considerando agora que a variância da população é desconhecida, efectue o teste proposto para $\alpha = 0.05$.

a) $H_0: \mu = 20$ contra $H_1: \mu = 15$

- Teste para a média da população → estatística "natural": $\bar{X}$

  Sendo a variância conhecida utiliza-se, sob H_0, $Z = \frac{\bar{X}-20}{\sqrt{4}/\sqrt{4}} = (\bar{X} - 20) \sim n(0,1)$

- $H_1: \mu = 15 < 20$ logo $W = \{(x_1, \dots, x_4): z \leq k^*\}$ ou $W = \{(x_1, \dots, x_4): \bar{x} \leq k\}$

  k^*: $\alpha = 0.01 = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(Z \leq k^*) = \Phi(k^*)$ logo $k^* =$ -2.326 e portanto $W = \{(x_1, \dots, x_4): z \leq -2.326\}$. Como $z = \bar{x} - 20 = -3 < -2.326$ logo **rejeita-se H_0**.

  alternativamente

  k: $\alpha = 0.01 = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(\bar{X} \leq k) = \Phi(k - 20)$ logo $k - 20 =$ -2.326 e portanto $W = \{(x_1, \dots, x_4): \bar{x} \leq 17.674\}$ e, como $\bar{x} = 17 < 17.674$, **rejeita-se H_0**.

b)

$$\beta = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \leq 17.674 |\, \mu = 15) = \Phi\left(\frac{17.674 - 15}{\sqrt{4}/\sqrt{4}}\right) = \Phi(2.674) = 0.9962$$

c)

– Teste para a média da população → estatística "natural": $\bar{X}$

Sendo a variância desconhecida utiliza-se, sob H_0, $T = \frac{\bar{X}-20}{S'/\sqrt{4}} = \frac{\bar{X}-20}{S'/2} \sim t_{(3)}$

– $H_1: \mu = 15 < 20$ logo $W = \{(x_1, \ldots, x_4): t \leq k^*\}$ ou $W = \{(x_1, \ldots, x_4): \bar{x} \leq k\}$

k^*: $\alpha = 0.05 = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(T \leq k^*)$ logo k^* = -2.353 e portanto $W = \{(x_1, \ldots, x_4): t \leq -2.353\}$. Como $t = \frac{\bar{x}-20}{s'/2} = \frac{17-20}{2.3022/2} = -2.606 < -2.353$, rejeita-se H_0.

Teste mais potente. Lema de Neyman-Pearson

- Na impossibilidade de minimizar simultaneamente os dois tipos de erros, torna-se necessário definir uma abordagem que permita considerá-los de alguma forma.
    - **Filosofia de Neyman-Pearson**: fixar a probabilidade associada ao erro de 1ª espécie e minimizar a probabilidade do erro de 2ª espécie ou, dito de outra forma, **fixar a dimensão** do teste e **maximizar a sua potência**.
    - Esta forma de proceder atribui **maior importância ao erro de 1ª espécie**, uma vez que é fixado num valor conveniente, enquanto a potência vem a maior possível dentro dos condicionantes existentes.
    - Geralmente, fixa-se a dimensão do teste, α, em 0.1, 0.05 ou 0.01. Apenas se rejeita H_0 se houver uma forte evidência estatística contra esta hipótese.

- **Teste mais potente**: Fixada a probabilidade de cometer o erro de 1ª espécie (dimensão do teste) o teste mais potente é aquele em que se escolhe a região crítica que minimiza a probabilidade do erro de 2ª espécie (ou seja maximiza a potência).

- Como definir testes mais potentes?

  Recorrendo ao **lema de Neyman-Pearson**.

Lema de Neyman-Pearson – (Livro)

$X \sim f(x|\theta), \quad \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ e $(X_1, X_2, ..., X_n)$ amostra casual dessa população,

Seja $C > 0$, e $W \subset \Re^n$ o conjunto do espaço-amostra definido por

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_0)} > C \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \in W, \quad \text{em que } P\left[(X_1, X_2, ..., X_n) \in W \mid \theta = \theta_0\right] = \alpha .$$

O teste associado com a região crítica W é o teste mais potente de dimensão α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$.

Exemplo anterior:

Seja X uma população $N(\mu, \sigma^2)$ com $\sigma^2 = 4$.

Quer-se testar $H_0 : \mu = 10$ contra $H_1 : \mu = 14$.

Amostra casual de dimensão n.

Deduza a região crítica mais potente de dimensão 0.05

Fase 0

Construir a função de verosimilhança $\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$

Fase 1

Escrever a condição sobre a razão de verosimilhanças e simplificá-la

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \mu_0)} = \frac{L(\mu_1 \mid x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\mu_0 \mid x_1, x_2, ..., x_n)} > C \Leftrightarrow \bar{x} > k$$

Fase 2

Obter o valor fronteira, utilizando a dimensão do teste

$$\alpha = P(\bar{X} > k \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{logo } \Phi\left(\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad k = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ onde } \Phi(z_\alpha) = 1-\alpha$$

Se $\alpha = 0.05$ e $n = 2$ vem $k = 10 + 1.645 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 12.3264$ ficando definida a região crítica

$W = \{(x_1, x_2) : \bar{x} > 12.3264\}$

Uma vez obtida a região de rejeição realiza-se o teste calculando a média observada da amostra e comparando-a com o valor de referência.

Por simples curiosidade, pode-se partir de $k = 12.3264$ e, efetuando-se as operações inversas daquelas que se efetuaram na fase 1, obter o valor inicial $C = \exp\left(-\frac{n\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)-2\,n\,k\,(\mu_1-\mu_0)}{2\,\sigma_0^2}\right) \approx 1.92$

Neste caso, rejeitamos H_0 quando a verosimilhança de $\mu = 14$ é 1.92 vezes superior à verosimilhança de $\mu = 10$

Resumindo e voltando ao caso geral

- A primeira fase de aplicação do lema de Neyman-Pearson permite definir 2 aspectos essenciais:
    - **a estatística-teste**
    - **o tipo de região de rejeição** que lhe está associado: inferior ou superior a uma constante k.
- A segunda fase serve para definir o valor da constante k em função da dimensão do teste que se encontra pré-fixada.

- CUIDADO: O lema só tem utilidade prática quando se conhece **a distribuição por amostragem da estatística-teste**.

- **O lema serve de base à regra intuitiva: No teste de médias, variâncias ou proporções a região de rejeição está do lado da alternativa quando se utiliza a estatística "natural".**

Testes envolvendo hipóteses compostas unilaterais

Depois de estudar os testes de hipóteses numa situação pouco comum, em que o espaço-parâmetro é composto por apenas dois pontos, $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ vamos agora testar uma hipótese simples contra alternativa **unilateral**)

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0 \text{ (ou contra } H_1 : \theta < \theta_0\text{).}$$

Em situações deste tipo:

- Nada se altera no que se refere à probabilidade do erro de 1ª espécie já que apenas depende de H_0.

  Recorde-se que $\alpha = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(\text{Rej } H_0 | \theta = \theta_0)$

- Deixa de haver um valor para a probabilidade de um erro de 2ª espécie e para a potência do teste, sendo necessário definir o conceito de **função potência** (definição 8.7 do livro)

  A função potência do teste $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$ com região crítica W, é dada por,
  $\beta(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta) = P\left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W \mid \theta\right]$ para $\theta \in \Theta_1$, onde $\Theta_1 = \{\theta : \theta > \theta_0\}$.

- Em vez de teste mais potente fala-se agora em teste **uniformemente mais potente** (**UMP**) – Uma definição formal está dada no livro (definição 8.8). Em termos intuitivos, um teste é UMP se for o mais potente contra cada uma das hipóteses simples abrangidas por H_1.

- Nas situações que vamos considerar existe, geralmente, um teste UMP que é obtido "generalizando" o lema de Neyman-Pearson (teorema de Karlin-Rubin) mas **nada obriga a que existam sempre testes UMP**!!!

- **A regra intuitiva (médias, variâncias e proporções) mantém-se** já que a relação entre qualquer valor da alternativa e o valor especificado pela hipótese nula é sempre a mesma: todos superiores ou todos inferiores. Daí a importância de se considerar uma alternativa **unilateral**.

Exemplo: Adapte-se o exemplo que se utilizou anteriormente:

- Universo normal com variância conhecida σ^2
- $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu > \mu_0$
- amostra de dimensão n

- Estatística natural $\rightarrow \bar{X}$
- Região crítica: Como em H_1 se tem $\mu > \mu_0$, a região crítica será dada por $\bar{x} > k$ (generalização do lema de Neyman-Pearson ou regra intuitiva).
- Para obter k, fixa-se α e utiliza-se $\alpha = P(\bar{X} > k \mid \mu = \mu_0)$, obtendo-se o teste UMP.
- A função potência vem $\beta(\mu) = P(\bar{X} > k \mid \mu) = 1 - \Phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, $\mu > \mu_0$.

- Exemplifique-se para $\mu_0 = 10$, $\sigma = 2$, $n = 2$, $\alpha = 0.05$
  - Para $\alpha = 0.05$, $k = 10 + 1.645 \times 2 / \sqrt{2} = 12.3264$ (já tinha sido visto)
  - $\dfrac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{12.3264-\mu}{1.4142}$ logo $\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(\dfrac{12.3264-\mu}{1.4142}\right)$
  - Função para $\mu > 10$ (para $\mu = 10$ tem-se $\beta(\mu) = \alpha$). Quanto mais afastado de 10 estiver μ, maior a potência.

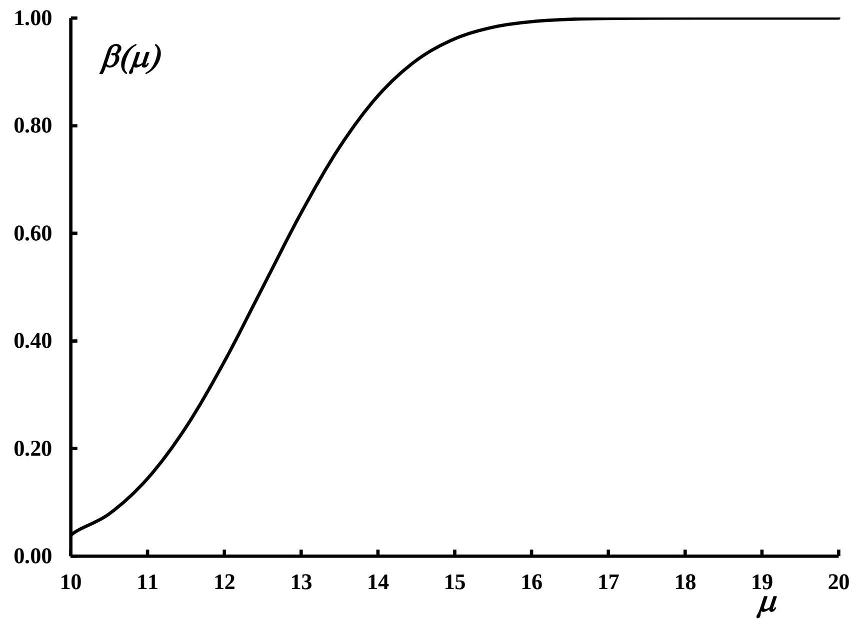


Fig. 8.6 – Função potência para testar $H_0 : \mu = 10$ contra $H_1 : \mu > 10$.

O que acontece à função potência quando n cresce, mantendo-se α?

Como é intuitivo a potência também cresce já que se dispõe de mais informação.

No exemplo vem

$$\beta_n(\mu) = P\left[\overline{X} > k(n) \mid \mu\right] = P\left[\frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}} > \frac{k(n)-\mu}{2/\sqrt{n}}\right], \quad \mu > 10, \text{ com } \quad k(n) = 10 + 1.645 \times \frac{2}{\sqrt{n}},$$

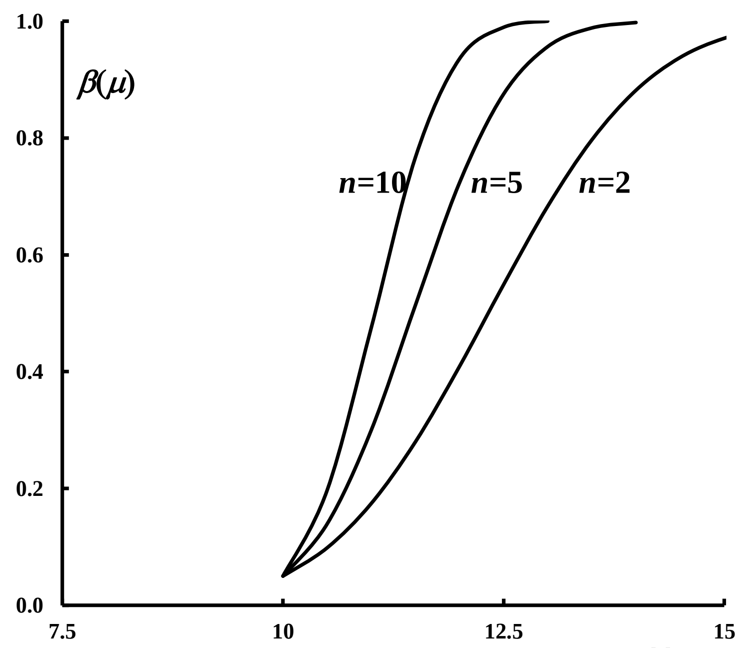


Fig. 8.7 – Função potência no teste de $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu > 10$

para amostras de dimensão $n = 2$, 5 e 10.

Considere-se agora que quer H_0 quer H_1 são hipóteses compostas unilaterais

$H_0: \theta \leq \theta_0$ contra $H_1: \theta > \theta_0$ ou $H_0: \theta \geq \theta_0$ contra $H_1: \theta < \theta_0$

- Considere-se o primeiro caso $H_0: \theta \leq \theta_0$ contra $H_1: \theta > \theta_0$ já que o segundo é em tudo semelhante

- A probabilidade do erro de 1ª espécie passa a depender do valor de θ em H_0 que se considere. Define-se a **dimensão do teste** como sendo o valor máximo desta probabilidade. Este valor corresponde a utilizar o ponto fronteira $\theta = \theta_0$. Em termos práticos está-se a proceder como se se tivesse $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta > \theta_0$.

  Consequência importante: **A igualdade está sempre em H_0**

- **Exemplo**: Universo normal com variância conhecida σ^2
    - $H_0: \mu \leq 10$ contra $H_1: \mu > 10$
    - amostra de dimensão n

$$\alpha = P(\text{Rej } H_0 | H_0 \text{verd}) = P(\text{Rej } H_0 | \mu \leq 10)$$

Estatística natural $\longrightarrow \bar{X}$

Região crítica: Como qualquer valor em H_1 é superior a qualquer valor de H_0, a região crítica será dada por $\bar{x} > k$

Para obter k, fixa-se α, a dimensão do teste, e utiliza-se $\alpha = P(\bar{X} > k | \mu = 10)$, obtendo-se o teste UMP.

Repare-se que a probabilidade de um erro de 1ª espécie é dada por

$$\alpha(\mu) = P(\bar{X} > k | \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \qquad \mu \leq 10$$

Quanto maior for μ, menor $\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ e portanto menor $\Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ logo maior $\alpha(\mu)$. Escolher o pior caso equivale assim a escolher $\mu = 10$.

Testes bilaterais

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- Numa situação destas é fácil entender que **não existe, na generalidade dos casos, um teste UMP**. Para tal retome-se o exemplo que se tem vindo a tratar e admita-se que se queria testar,

  $$H_0 : \mu = 10 \text{ contra } H_1 : \mu \neq 10,$$

  para uma população normal de variância igual a 4. Daquilo que se viu anteriormente, quando $\mu < 10$ a região deveria ser **toda para a esquerda** e, quando $\mu > 10$, **toda para a direita**. Esta situação não pode ocorrer simultaneamente.

- Recorre-se a uma regra intuitiva que consiste em definir uma região de rejeição nas duas caudas da distribuição da estatística–teste, atribuindo igual probabilidade, seja $\alpha / 2$, a cada uma das duas sub-regiões.

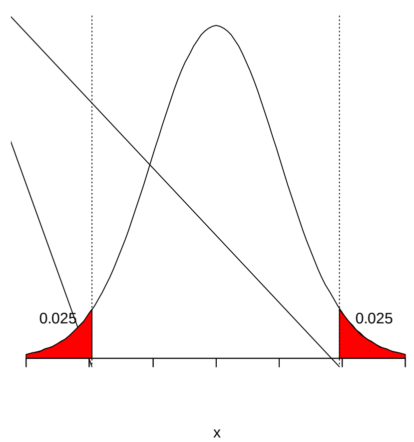
- Retomando o exemplo de população normal com variância conhecida

$$H_0 : \mu = 10 \text{ contra } H_1 : \mu \neq 10,$$

Estatística natural $\rightarrow \bar{X}$ utilizando-se $Z = \frac{\bar{X}-10}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(0,1)$

Fixar α, por exemplo $\alpha = 0.05$

Região crítica: Sendo H_1 bilateral utiliza-se a regra empírica que consiste em considerar a região de rejeição nas 2 caudas da distribuição



Da tabela 5 vem o valor 1.96, donde

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): z < -1.96 \ \vee \ z > 1.96\}$$

que se traduz em

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x} < 7.228 \ \vee \ \bar{x} > 12.772\}$$

assumindo, como habitualmente, $n = 2$ e $\sigma^2 = 4$.

Valor-*p*

- Num teste de hipóteses, **fixada a dimensão** α, o resultado consiste em rejeitar (ou não rejeitar) H_0, não se tendo em conta se o valor da estatística-teste se situa longe ou perto do limiar de rejeição.
- O valor-*p* é uma forma alternativa de reportar o resultado de um teste que permite ultrapassar esta limitação.
- **valor-*p*** (definição 8.9 do livro) - Seja $T(x_1, x_2, ..., x_n) = t_{\text{obs}}$ o valor observado (com a amostra concreta) para a estatística de teste. **O valor-*p* é a probabilidade, p_{obs}, de observar um valor tão ou mais desfavorável para H_0, admitindo H_0 verdadeira**.

  O valor-*p* mede a evidência que os dados fornecem a favor de H_0. Assim, **quanto menor for o valor-*p* (p_{obs})** menor é a consistência dos dados com a hipótese e, portanto, **mais se rejeita** H_0; por exemplo, se $p_{\text{obs}} = 0.0001$, rejeitamos sem problemas H_0 mas se $p_{\text{obs}} = 0.23$ não rejeitaremos H_0. O problema surge com os valores "cinzentos", por exemplo, $p_{\text{obs}} = 0.053$. Caso tenhamos fixado previamente a dimensão desejada para o teste comparamos o valor-p com α:

  Valor-p < $\alpha \rightarrow$ Rejeita-se H_0

  Valor-p > $\alpha \rightarrow$ Não se rejeita H_0

Para calcular o valor-*p*

- Obter a distribuição da estatística de teste assumindo que H_0 (ou o seu valor limite se for uma hipótese composta) é verdadeira.
- Definir acontecimento mais improvável do que o observado (mais para o lado da alternativa)
- Calcular a sua probabilidade.

- **Exemplos:** $X \sim N(\mu;4)$, $n=16$ $\sigma^2 = 4$ tendo-se observado $\bar{x} = 9$.

  1. $H_0: \mu = 10$ (ou $\mu \geq 10$) contra $H_1: \mu < 10$
  2. $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu \neq 10$

  Em qualquer dos casos a estatística de teste vai ser $\bar{X}$ que tem distribuição $\bar{X} \sim N(\mu;1/4)$ ou, de forma equivalente $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(0,1)$.

  1. $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu < 10$

Nesta situação os casos tão ou mais desfavoráveis correspondem a observar uma média amostral inferior ou igual ao valor observado (valor mais pequenos de μ tendem a originar amostras com médias amostrais inferiores) $\rightarrow p_{obs} = P(\bar{X} \leq 9 | \mu = 10) = \Phi\left(\frac{9-10}{2/\sqrt{16}}\right) = \Phi(-2) = 0.0228$.

2. $H_0 : \mu = 10$ contra $H_1 : \mu \neq 10$

Nesta situação os casos tão ou mais desfavoráveis correspondem a observar uma média amostral mais "afastada" de 10 do que o valor observado, 9, quer seja para valores superiores quer para valores inferiores . Sendo o afastamento observado $|9 - 10| = 1$ vem

$$p_{obs} = P(|\bar{X} - \mu| \geq 1|\mu = 10) = P\big((\bar{X} - \mu) \leq -1|\mu = 10\big) + P\big((\bar{X} - \mu) \geq 1|\mu = 10\big)$$

$$= 2 \times \ P\big((\bar{X} - \mu) \geq -1|\mu = 10\big) \qquad \text{simetria}$$

$$= 2 \times \left(1 - P\left(\frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{16}}}\right)\right) = 2 \times \big(1 - \ \Phi(2.0)\big) = 2 \times (1 - 0.9772)$$

$$\approx 2 \times 0.0228 = 0.0456.$$

.

Populações normais – testes de médias e variâncias - $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

- Testes de médias **com variância, σ^2, conhecida**

Estatística de teste $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$ ou $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Aplicar a regra intuitiva (no quadro 8.3 do livro apresentam-se todos os casos possíveis).

Exemplo (inspirado no exemplo 8.8 do livro) **–** X quantidade de azeite numa garrafa (dl)

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2 = 0.5$. Quer testar-se $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu \neq 10$ com base numa amostra casual de dimensão $n = 20$. Suponha que se observou $\bar{x} = 9.65$ e $s'^2 = 0.64$.

a) Determine para $\alpha = 0.05$ a região crítica a adotar e efetue o teste.

b) Qual é o valor-p?

Solução: Formalizar o problema $\rightarrow$ Teste bilateral para a média de uma população normal de variância conhecida (logo a informação $s'^2 = 0.64$ não será relevante para o teste)

a) Muito semelhante ao exemplo que se acabou de ver

$H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu \neq 10$

Estatística de teste $Z = \frac{\bar{X}-10}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(0,1)$ já que a variância da população é conhecida

$\alpha = 0.05$ dado no enunciado

Região crítica: Sendo H_1 bilateral utiliza-se a regra empírica que consiste em considerar a região de rejeição nas 2 caudas da distribuição

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): z < -1.96 \lor z > 1.96\}$$

ou

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x} < 9.69 \lor \bar{x} > 10.31\}$$

Utilizando $z_{obs} = \frac{9.65-10}{\sqrt{(0.5/20)}} = -2.21$ no primeiro caso ou simplesmente $\bar{x} = 9.65$ no segundo conclui-se que se **rejeita $\boldsymbol{H_0}$**.

b) $p_{obs} = P(|\bar{X} - \mu| \geq |\bar{x} - \mu| | \mu = 10) = P(|\bar{X} - 10| \geq 0.35 | \mu = 10)$

$$= 2 \times \ P\big((\bar{X} - 10) \geq 0.35 | \mu = 10\big) = 2 \times \left(1 - \Phi\left(\frac{0.35}{\sqrt{\frac{0.5}{20}}}\right)\right) = 2 \times \big(1 - \ \Phi(2.21)\big)$$

$$= 0.0272$$

Sendo o valor-*p* pequeno (inferior à dimensão escolhida para o teste na alínea anterior) rejeita-se H_0

Alternativamente, calcula-se $z = \frac{9.65-10}{\sqrt{\frac{0.5}{20}}} = -2.21$

e $p_{obs} = P(|Z| \geq |-2.21|) = P(|Z| \geq 2.21) = 2 \times \big(1 - \ \Phi(2.21)\big) = 0.0272$

- Testes de médias com **variância desconhecida**

Raciocínio semelhante mas substituindo a estatística de teste anterior por $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(Ver quadro 8.5 do livro que resume os casos possíveis)

Exemplo 8.9 – Retome-se o exemplo anterior, supondo agora que a variância da população é desconhecida.

$$H_0 : \mu = 10 \text{ contra } H_1 : \mu \neq 10$$

Sendo a variância desconhecida, utiliza-se $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, isto é, $T = \frac{\bar{X}-10}{S'/\sqrt{20}} \sim t(19)$

Metodologia Neyman-Pearson:

- Utilizando a estatística *T*: $t_{\alpha/2} = 2.093$ (ver tabela da *t-student* com 19 graus de liberdade)

Logo $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): t < -2.093 \lor t > 2.093\}$

Tendo-se observado $t_{obs} = \frac{9.65-10}{\sqrt{0.64}/\sqrt{20}} = -1.957$ **não se rejeita** H_0.

- Escrevendo a região em termos de $\bar{x}$ e s': Parte-se da região anterior e escrevem-se as 2 desigualdades em termos de $\bar{x}$ e s' (menos habitual)

$$W = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x} < 10 - 2.093 \times \frac{s'}{\sqrt{20}} \vee \bar{x} > 10 - 2.093 \times \frac{s'}{\sqrt{20}}\right\}$$

Considerando os valores observados, $\bar{x} = 9.65$ e $s'^2 = 0.64$, verifica-se que a amostra não pertence à região de rejeição logo **não se rejeita** H_0.

A primeira solução é claramente mais simples do que a segunda.

Utilizando o valor-*p*: Parte-se de $t_{obs} = \frac{9.65-10}{\sqrt{0.64}/\sqrt{20}} = -1.957$. O "desvio" mede-se em relação ao valor 0 que corresponde à situação "ideal", onde a média da amostra é igual à média da população.

$p_{obs} = P(|T| \geq |-1.957|) = 2 \times P(T \geq 1.957) = 0.0652$ (computador)

Recorrendo às tabelas apenas se poderia concluir que o valor se situa entre 0.05 e 0.1 a não ser que se fizesse uma interpolação linear.

- **Testes sobre a variância**

  Estatística de teste $Q=\dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ ou $\dfrac{n\,s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

  (Ver quadro 8.7 do livro)

Exemplo 8.10 – Retome-se o exemplo anterior e suponha-se agora que se pretendia testar $H_0:\sigma^2=0.5$ contra $H_1:\sigma^2>0.5$ para uma dimensão de 2.5%. Que concluir?

Recorrendo ao valor-*p*: Regra intuitiva →região de rejeição para o lado direito

Obter o valor observado: $q_{obs}=\frac{19\times 0.64}{0.5}=24.23$

Calcular o valor-*p*: $p_{obs}=P(Q\geq 24.23)=0.184$ (computador)

entre 0.25 e 0.10 (tabelas)

Conclusão: Não se rejeita H_0 já que o valor-*p* é superior a 0.025.

Em rigor, o recurso ao valor-*p* neste caso dispensaria ter fixado previamente a dimensão do teste já que se trata de um valor "grande".

Pela metodologia de Neyman-Pearson, para $\alpha=0.025$, chegar-se-ia a $W=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):q>32.852\}$.

Calculava-se então $q_{obs}=24.23$ e como q_{obs} não pertence a *W*, não se rejeita H_0

Populações normais – testes à igualdade de duas populações

- 2 populações normais independentes: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, sendo X e Y independentes.
- Não estando em causa a normalidade das populações, testar a igualdade das distribuições equivale a testar a igualdade das médias e/ou a igualdade das variâncias.
- Amostra casual com *m* observações da população *X* e outra com dimensão *n* da população *Y*. Sendo as variáveis independentes, também o serão as estatísticas construídas com base numa e noutra amostra.

1º problema: teste da igualdade das duas médias.

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \text{ ou } H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$$

como habitualmente, as alternativas podem ser de tipo unilateral ou bilateral.

Numa abordagem intuitiva, parece razoável basear a decisão a tomar na estatística $\bar{X} - \bar{Y}$.

Tendo presente os resultados obtidos no capítulo 6 sobre distribuições por amostragem para a diferença de médias $\bar{X} - \bar{Y}$, vão considerar-se 3 situações no que se refere às variâncias:

- σ_X^2 e σ_Y^2 são **conhecidas**;
- σ_X^2 e σ_Y^2 são **desconhecidas e iguais**;
- σ_X^2 e σ_Y^2 são **desconhecidas e diferentes**;

Na situação 1 a estatística-teste vem dada por:

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

Na situação 2 a estatística-teste vem dada por:

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X'^2+(n-1)S_Y'^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

Na situação 3 a estatística-teste vem dada por:

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X'^2}{m}+\frac{S_Y'^2}{n}}}\sim t(r) \text{ sendo r a parte inteira de } r^*=\frac{\left(\frac{s_X'^2}{m}+\frac{s_Y'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_X'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_Y'^2}{n}\right)^2}$$

Exemplos 8.11, 8.12 e 8.13 – Para confrontar dois tipos de máquinas … As produtividades alcançadas foram as seguintes:

Máquina *A*: 8.0, 8.4, 8.0, 6.4, 8.6, 7.7, 7.7, 5.6, 5.6, 6.2; m=10

Máquina *B*: 5.6, 7.4, 7.3, 6.4, 7.5, 6.1, 6.6, 6.0, 5.5, 5.5; n=10

Dados úteis que se calculam a partir das amostras: $\bar{x} = 7.22$, $\bar{y} = 6.39$, $s'^2_X = 1.326$, $s'^2_Y = 0.6188$

Admitindo que as produtividades de ambas as máquinas possuem distribuição normal, o agricultor está inclinado a proceder, para $\alpha = 0.05$, ao teste de,

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \text{ contra } H_1 : \mu_A > \mu_B,$$

para confirmar que a primeira máquina tem melhor rendimento.

Situação 1. Admitindo por agora que se conhecem as variâncias, seja $\sigma_A^2 = 1.5$ e $\sigma_B^2 = 1.0$ (tem de ser dado)

$z_{\text{obs}} = 1.66$ ou $p_{\text{obs}} \approx 0.0485$. **Rejeita-se** mas, o valor-*p* traduz uma certa "indecisão"

Situação 2. Admitindo que as variâncias são desconhecidas mas iguais (a *t* tem 18 graus de liberdade)

$t_{\text{obs}} = 1.882$ ou $p_{\text{obs}} \approx 0.038$

Situação 3. Admitindo que as variâncias são desconhecidas e diferentes

$t_{\text{obs}} = 1.882$ ou $p_{\text{obs}} \approx 0.0397$ sendo $r^* = 15.97$

2º problema: Teste para a igualdade das variâncias

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \text{ ou de forma equivalente } H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1,$$

Estatística de teste $$F = \frac{S_X'^2}{S_Y'^2} \sim F(m-1, n-1) \text{ quando } \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

Ver quadro 8.11 livro

Exemplo 8.14 - Retome-se ainda o exemplo 8.11, para testar,

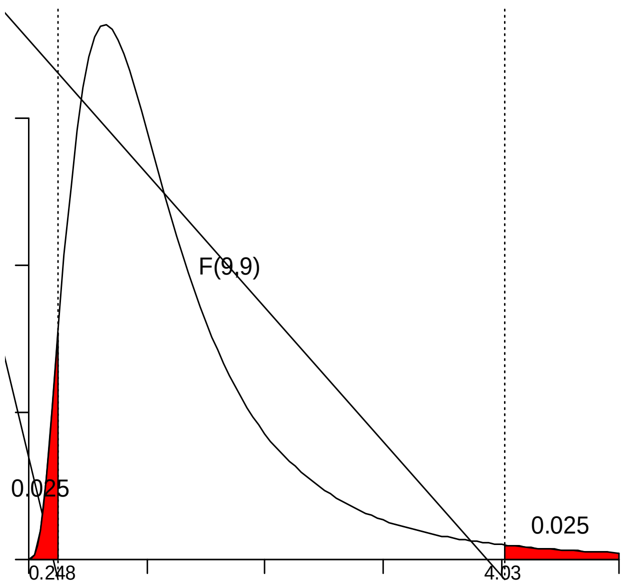
$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \text{ contra } H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2,$$

supondo que a dimensão do teste é $\alpha = 5\%$.

Para estabelecer a região de rejeição e dado que as tabelas da F são "limitadas" utiliza-se a propriedade $F \sim F(m,n) \Longrightarrow \frac{1}{F} \sim F(n,m)$.

Neste caso o resultado pode parecer "mascarado" já que $m = n = 9$.

Estatística de teste $F = \frac{S'^2_X}{S'^2_Y} \sim F(9,9)$



$f_2 : P(F > f_2) = 0.025$

da tabela vem $f_2 = 4.03$

$f_1 : P(F < f_1) = 0.025$

Que pode ser obtido na máquina (computador) mas não na tabela.

Como $P(F < f_1) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_1}\right) = 0.025$

e $\frac{1}{F} \sim F(9,9)$

obtém-se $\frac{1}{f_1} = 4.03$ e portanto $f_1 = \frac{1}{4.03} = 0.248$

Assim $W = \{f : f < 0.248 \vee f > 4.03\}$

Como $f_{obs} = 2.143$, não se rejeita H_0.

Amostras emparelhadas

Quando se comparam as médias de duas populações é interessante considerar duas situações:

- Amostras (e populações) independentes (o que temos vindo a fazer);
- Amostras emparelhadas para procurar combater as flutuações aleatórias;

O que são amostras emparelhadas?

Em termos intuitivos, uma amostra emparelhada consiste em submeter cada elemento da amostra às duas situações em análise. Por exemplo, para comparar dois medicamentos contra a insónia, medindo o ganho em horas de sono, faz mais sentido operar com dados emparelhados, submetendo o mesmo paciente aos dois tratamentos. Se assim não for, há um vasto conjunto de características pessoais que afectam os resultados e mascaram o efeito das drogas.

Formalmente, a amostra $(X_i, Y_i),\ i = 1,2,\ldots,n$, composta por pares de observações independentes de populações normais, respetivamente, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ é **uma amostra emparelhada de populações normais**.

Note-se que embora os **pares de observações sejam independentes** – cada (X_i, Y_i) é independente de (X_j, Y_j), com $i \neq j$ – nada se afirmou sobre a independência entre X e Y no mesmo par, **pois não há independência**.

Assim, $Z_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_X - \mu_Y ; \sigma^2_{Z_i})$, $i = 1,2,\ldots,n$, com

$\sigma^2_{Z_i} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y - 2\sigma_{XY}$, $i = 1,2,\ldots,n$

As hipóteses em teste: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ ou $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$

* Como a variância é desconhecida, utiliza-se

$T = \dfrac{\bar{Z} - (\mu_X - \mu_Y)}{S'_z / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$, sendo $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$ e $S'^2_z = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2$

* O valor observado, sob H_0, da estatística-teste é dado por $T_{\text{obs}} = \dfrac{\bar{z}}{s'_z / \sqrt{n}}$ e a região de rejeição é posta de acordo com H_1.

* Nota final: O emparelhamento permite testar H_0 sem necessidade de fazer qualquer suposição sobre as variâncias.

Exemplo – Considere-se o exemplo dos ganhos em horas de sono com os 2 medicamentos contra a insónia. Assuma-se a normalidade dos universos e suponha-se que se observou uma amostra de 5 doentes

(6.3; 4.2), (3.9; 2.9), (5.8; 5.6), (6.9; 7.2), (6.4; 5.2)

sendo o 1º elemento de cada par referente ao ganho com o medicamento A e o segundo com o medicamento B. Pretende-se testar se o medicamento A é mais eficiente, isto é

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \text{ contra } H_1 : \mu_A > \mu_B,$$

para uma dimensão de 5%.

Solução   6.3-4.2   …   6.4-5.2

- Constrói-se $z_i \rightarrow$ 2.1 ; 1.0 ; 0.2 ; -0.3 ; 1.2

- Calcula-se $\bar{z} \approx 0.84$ e $s'_Z \approx 0.929$ logo $T_{obs} \approx 2.022$

valor-p ≈ 0.0567

Populações não normais – grandes amostras

Grandes amostras → Recorre-se ao teorema do limite central

Testes sobre a média de uma população:

- utiliza-se $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, quando a variância é conhecida.

- utiliza-se $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, quando a variância da população é desconhecida onde $\hat{\sigma}^2$ é um estimador consistente para σ^2, por exemplo a variância (ou a variância corrigida) da amostra.

Testes sobre a diferença de médias populações independentes

- utiliza-se $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{m} + \dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, onde $\hat{\sigma}_1^2$ e $\hat{\sigma}_2^2$ são estimadores consistentes para σ_1^2 e σ_2^2, quando estas são desconhecidas.

Caso particular 1 – universo de Bernoulli (Quadro 8.13 do livro)

Estatística de teste $\bar{X} \overset{a}{\sim} N(\theta_0, \theta_0(1-\theta_0)/n)$ ou $Z = \dfrac{\bar{X}-\theta_0}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Exemplo 8.19 – Numa sondagem à opinião pública, em dado círculo eleitoral, foram inquiridas 1000 pessoas e houve 43% que se disseram favoráveis a determinado partido político. Será de rejeitar a hipótese deste partido ter pelo menos 50% das preferências naquele círculo?

Formalização do teste: $X \sim Ber(\theta)$, ($X = 1$ corresponde a votar no partido)

$H_0: \theta \geq 0.5$ contra $H_1: \theta < 0.5$

Estatística de teste (sob H_0): $Z = \dfrac{\bar{X}-0.5}{\sqrt{\left(\frac{0.5\times(1-0.5)}{1000}\right)}} = \dfrac{\bar{X}-0.5}{0.0158} \dot{\sim} n(0;1)$

Valor observado da est.- teste: $z_{obs} = \dfrac{0.43-0.5}{0.0158} = -4.427$

Valor-p: $p_{obs} = P(Z < -4.427) \approx 0$ (em rigor 4.78×10^{-6})

Rejeita-se claramente H_0, isto é, rejeita-se que o partido venha a ter pelo menos 50% dos votos (se nada se alterar, claro)

Caso particular 2 – Comparação de 2 universos de Bernoulli - Teste de $H_0: \theta_X = \theta_Y$ (quadro 8.14)

Estatísitica de teste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})\left(\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}\right)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ com $\hat{\theta} = \dfrac{n_X\,\overline{x} + n_Y\,\overline{y}}{n_X + n_Y}$

Exemplo 8.20 – Retome-se o exemplo e considere-se que, tempos depois, se efectuava uma segunda sondagem, no mesmo círculo, inquirindo 1200 pessoas. A proporção de intenções de voto passou para 45%. Em que medida os dados registados evidenciam uma progressão nas intenções do eleitorado?

Formalização do teste: Diferença de proporções em universos de Bernoulli – amostras independentes

Momento inicial: $X \sim Ber(\theta_X)$ $n = 1000,\ \bar{x} = 0.43$

Segundo momento: $Y \sim Ber(\theta_Y)$ $n = 1200,\ \bar{x} = 0.45$

Assume-se que as amostras são independentes.

Progressão nas intenções de voto significa $\theta_X < \theta_Y$ logo vai-se testar

$H_0: \theta_X \geq \theta_Y$ contra $H_1: \theta_X < \theta_Y$

Estatística de teste (sob H_0): $Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\hat{\theta}(1-\hat{\theta})\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1200}\right)\right)}} \dot{\sim}\ n(0;1)$

Realização do teste:

Valor observado da est.- teste: $\hat{\theta} = \frac{1000\times 0.43+1200\times 0.45}{1000+1200} = 0.44$

$$z_{obs} = \frac{0.43 - 0.45}{\sqrt{\left(0.44 \times 0.56 \times \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1200}\right)\right)}} = -0.941$$

Valor-*p*: $p_{obs} = P(Z \leq -0.941) = 1 - 0.8264 = 0.1736$

Não se rejeita H_0, isto é, com base na informação disponível não se pode garantir que haja progressão nas intenções de voto.
A diferença pode perfeitamente dever-se ao acaso.