



Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 13 e 14 (Semana 7)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)

- **Capítulo 1:** Análise Descritiva
- **Capítulo 2:** Probabilidades

Aulas TP (Semanas 3 a 6)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas TP (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas TP (Semanas 10 a 12)

- **Capítulo 5:** Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

4. Variáveis aleatórias multivariadas

4.1. Variáveis aleatórias bidimensionais

4.2. Função de distribuição conjunta

4.3. Função de distribuição marginal

4.4. Independência de variáveis aleatórias multivariadas

4.5. Variáveis aleatórias discretas multivariadas

4.6. Variáveis aleatórias contínuas multivariadas

4.7. Funções de distribuição condicionais

4.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias multivariadas

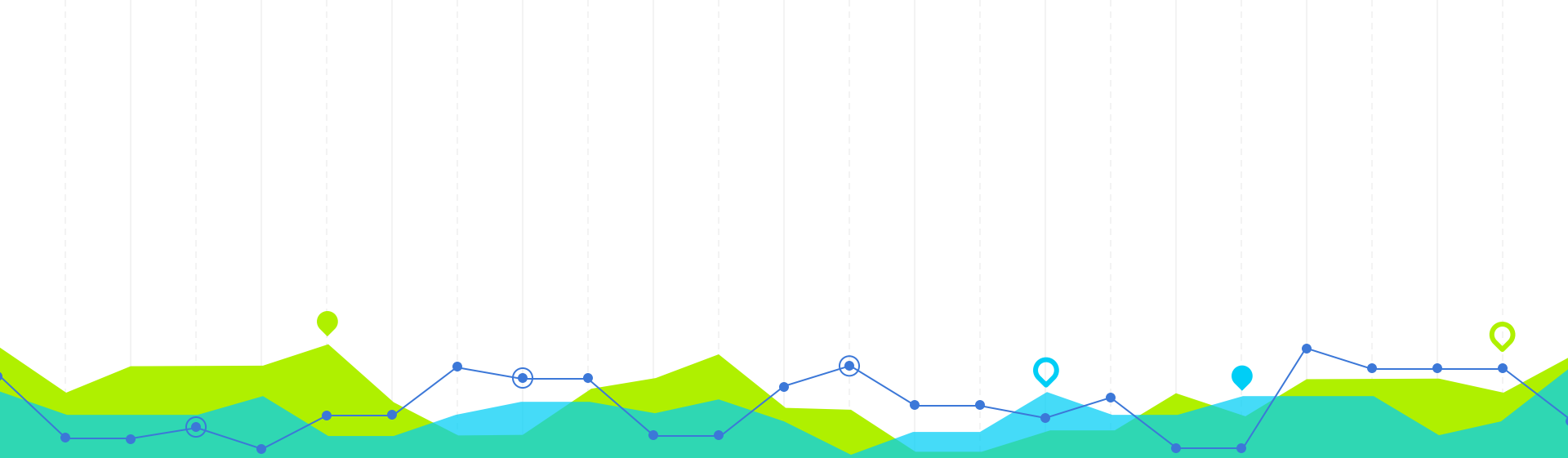
4.9. Valores esperados marginais

4.10. Momentos em relação à origem

4.11. Momentos em relação à média

4.12. A covariância

4.13. O coeficiente de correlação



Pares Aleatórios Contínuos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

1

Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função $f(x, y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias x e y se:

1. $f(x, y) \geq 0$ p/ todos (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy$ para qualquer região A no plano xy .

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Uma fábrica de doces distribuiu caixas de chocolates com mistura de creme, toffees e amêndoas, envolta em chocolate branco e marrom. Para uma caixa selecionada ao acaso, seja x e y , respectivamente, a proporção de chocolate branco e marrom existente no creme e suponha que f.d.p. conjunta é:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

A função $f(x,y)$ é uma fdp conjunta?

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

A função $f(x,y)$ é uma fdp conjunta?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5} (2x + 3y) \, dx \, dy$$

⇒ integra em relação a "x"; depois em relação a "y".

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 \left(\int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 3y \, dx \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 \left(2 \frac{x^2}{2} \int_0^1 + 3yx \int_0^1 \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 (1 + 3y) dy$$

$$= \frac{2}{5} \left[\int_0^1 dy + \int_0^1 3y \, dy \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[y \int_0^1 + \frac{3y^2}{2} \int_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[1 + \frac{3}{2} \right] = \frac{2}{5} \left[\frac{2+3}{2} \right] = 1 \quad \text{c.q.d!}$$

Funções Densidade de Probabilidade Marginais

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad e \quad h(y) = \sum_x f(x, y) \quad \text{variável discreta}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{variável contínua}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y)$ apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de X definida por $g(x)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Por definição a distribuição de probabilidade marginal de x é dada por:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y) dy = \frac{2}{5} \left[2xy \Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{2}{5} \left[2x + \frac{3}{2} \right] = \frac{4x}{5} + \frac{3}{5} \\ \therefore g(x) &= \frac{4x+3}{5} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{4x+3}{5} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y)$ apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de Y definida por $h(y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 (2x + 3y) dx \\ &= \frac{2}{5} \left[\frac{2x^2}{2} \Big|_0^1 + 3yx \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{5} [1 + 3y] \\ &= \frac{2 + 6y}{5} \end{aligned}$$

ou seja:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{2+6y}{5} & p/ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$ o evento onde $X = x$

$B \rightarrow$ o evento onde $Y = y$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{e} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{variável contínua}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y) = 10xy^2$ $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por $g(x)$ e $h(y)$, respetivamente.

b) Determine a função densidade condicional de $Y|X$.

c) Calcule $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

a)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_x^1 10xy^2 dy \\ &= \frac{10xy^3}{3} \Big|_x^1 = \frac{10x}{3} (1 - x^3) = \frac{10x - 10x^4}{3} \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{10x}{3} \Big|_x^1 = \frac{10x}{3} (1 - x^3), \quad 0 < x < 1$$

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_{x=0}^{x=y} 10xy^2 dx = \frac{10y^2 \cdot x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=y} \\ &= 5y^2 (y^2 - 0) = 5y^4 \end{aligned}$$

$$h(y) = 5y^4, \quad 0 < y < 1$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y) = 10xy^2$ $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por $g(x)$ e $h(y)$, respetivamente.

b) Determine a função densidade condicional de $Y|X$.

c) Calcule $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

b)

$f(y/x)$

$$\text{por definição } f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$= \frac{3 \cdot 10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)}, \quad 0 < x < y < 1$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y) = 10xy^2$ $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por $g(x)$ e $h(y)$, respetivamente.

b) Determine a função densidade condicional de Y|X.

c) Calcule $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

c)

$$P\left(y > \frac{1}{2} \mid x = 0,25\right)$$

Por definição:

$$P(a < y < b \mid X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$f(y/x)$

por definição $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$

$$= \frac{3 \cdot 10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)}, \quad 0 < x < y < 1$$

$$P(a < y < b \mid X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{3y^2}{(1-0,25^3)} dy = \frac{3}{(1-0,25^3)} \int_{1/2}^1 y^2 dy = \frac{3}{(1-0,25^3)} \frac{y^3}{3} \Big|_{1/2}^1$$

$$= \frac{1}{(1-0,25^3)} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{\left(\frac{1-1/8}{1-1/64}\right)}{\frac{64-1}{64}} = \frac{\frac{8-1}{8}}{\frac{63}{64}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{64}{63} = \frac{53}{63} = \frac{8}{9}$$

Função de Distribuição Conjunta

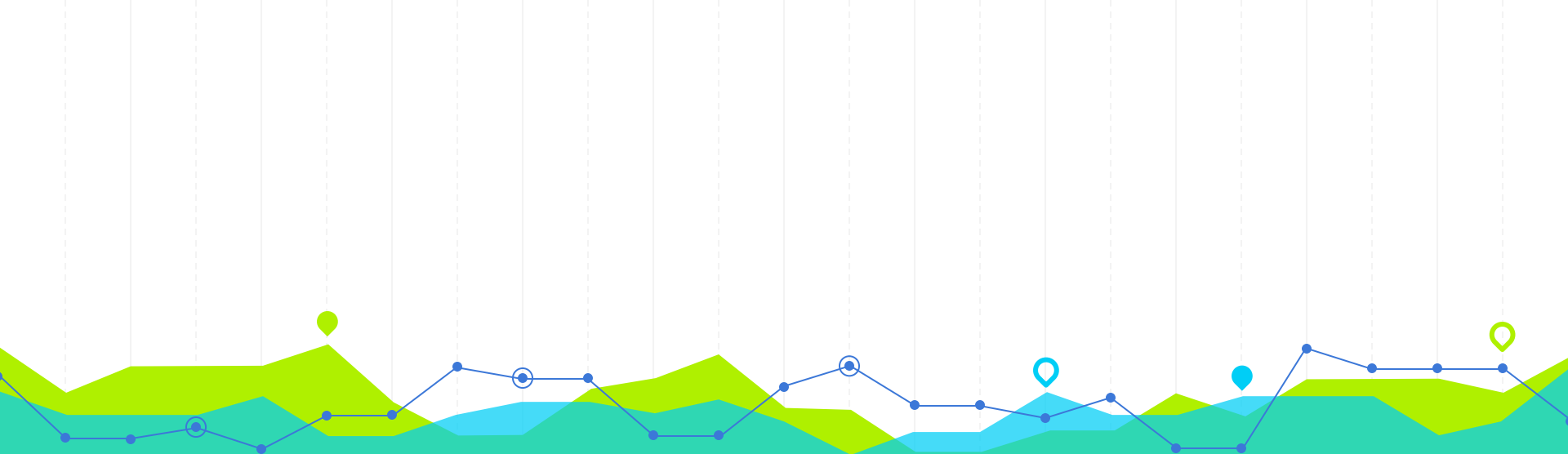
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

Funções de Distribuição Marginais

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A



Pares Aleatórios Contínuos: Exercícios do Murteira et al (2015)

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

2

14. Considere que o vector aleatório (X, Y) tem função densidade

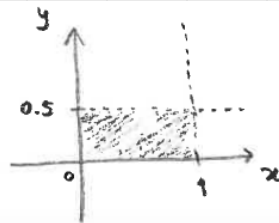
$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1/2).$$

- a) Verifique que é uma função densidade.
- b) Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y , e analise a independência.
- c) Calcule $P(X > 1/2, Y < 1/4)$.
- d) Calcule $P(Y > X)$.
- e) Calcule a média e a variância de X e de Y .
- f) Obtenha o coeficiente de correlação entre X e Y .



Exercício 14 (a)

$$f_{x,y}(x,y) = 2 \quad (0 < x < 1 ; 0 < y < 1/2) \rightarrow \text{suporte:}$$



• $f_{x,y}(x,y)$ é não negativa ✓

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) \, dx \, dy &= \int_0^{1/2} \int_0^1 2 \, dx \, dy = \int_0^{1/2} [2x]_0^1 \, dy = \int_0^{1/2} 2 \, dy = \\ &= [2y]_0^{1/2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Logo, $f_{x,y}(x,y)$ é uma função densidade.

Exercício 14 (b)

Função densidade marginal de x

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dy = \int_0^{1/2} 2 dy = [2y]_0^{1/2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Logo, $f_x(x) = 1$ ($0 < x < 1$)

Função densidade marginal de y

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dx = \int_0^1 2 dx = [2x]_0^1 = 2$$

Logo, $f_y(y) = 2$ ($0 < y < 1/2$)

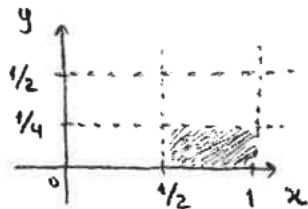
Exercício 14 (b)

Porque $f_{x,y}(x,y) = 2$ e $f_x(x) f_y(y) = 1 \times 2 = 2$, podemos concluir que X e Y são independentes.

Exercício 14 (c)

$$P\left(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{4}\right) = ?$$

Logo,

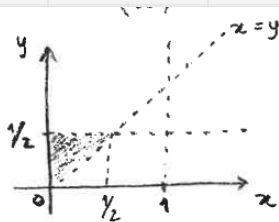


$$\rightarrow \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \text{ e } \left(0 < y < \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} P\left(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \, dx \, dy = \int_0^{\frac{1}{4}} \left[2x\right]_{\frac{1}{2}}^1 dy = \int_0^{\frac{1}{4}} (2-1) \, dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \, dy = \left[y\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

Exercício 14 (d)

$$P(Y > X) = ?$$



$$\begin{aligned} &\rightarrow (0 < x < y) \text{ e } (0 < y < 1/2) \\ &\quad \text{ou} \\ &\quad (0 < x < 1/2) \text{ e } (x < y < 1/2). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(X > Y) = \int_0^{1/2} \int_0^y x \, dx \, dy = \int_0^{1/2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy = \int_0^{1/2} \frac{y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

ou

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^{1/2} \int_x^{1/2} x \, dy \, dx = \int_0^{1/2} \left[xy \right]_x^{1/2} dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{3}{48} - \frac{2}{48} = \frac{1}{48} \approx 0.0208 \end{aligned}$$

16. Seja

$$f_{X,Y}(x, y) = x + y \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1).$$

- a) Calcule $P(X > 1/2, Y > 1/2)$.
- b) Determine as funções densidade marginais, e analise a independência das variáveis.
- c) Obtenha as funções densidade condicionadas.



Exercício 16 (a)

$$f_{x,y}(x,y) = x+y \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1)$$

(a)

$$P(x > 1/2, y > 1/2) = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 f(x,y) \, dx \, dy = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 (x+y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{1/2}^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{1/2}^1 dy = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{8} - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$= \int_{1/2}^1 \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{8} \right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{3}{8} y \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Exercício 16 (b)

$$\bullet f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad (0 < x < 1)$$

$$\bullet f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dx = \int_0^1 (x+y) dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 = y + \frac{1}{2} \quad (0 < y < 1)$$

X e Y são independentes se e só se: $f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$

$$f_x(x) \cdot f_y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \neq f_{x,y}(x,y)$$

Logo, X e Y não são independentes.

Exercício 16 (c)

$$\bullet f_{x|y=y}(x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{x+y}{y+1/2} \quad (0 < x < 1 ; y \text{ fixo})$$

$$\bullet f_{y|x=x}(y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{x+y}{x+1/2} \quad (0 < y < 1 ; x \text{ fixo})$$

20. Uma pessoa pretende viajar diariamente num comboio que parte entre as 7:20 e as 7:30. A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da partida, X , tem função densidade

$$f_X(x) = \frac{10-x}{50} \quad (0 < x < 10).$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:20 e as 7:30.

A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da chegada da pessoa à estação, Y , tem distribuição dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10).$$

Admita a independência entre as duas variáveis aleatórias.

- Determine a função de densidade conjunta da variável (X, Y) .
- Calcule a percentagem de dias em que a pessoa viaja nesse comboio.
- Qual a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida desse comboio?



Exercício 20 (a)

X - tempo entre 7:20 e partida comboio $\rightarrow f_x(x) = \frac{10-x}{50} \quad (0 < x < 10)$

Y - tempo entre 7:20 e chegada pessoa $\rightarrow f_y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10)$

X e Y são independentes

(a)

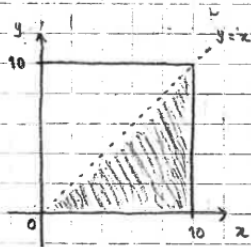
Porque X e Y são independentes, tem-se:

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{10-x}{50} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10-x}{500} \quad (0 < x < 10; 0 < y < 10)$$

Exercício 20 (b)

Quer-se $P(X \geq Y)$

Domínio de integração



$$(y \leq x \leq 10) \text{ e } (0 < y < 10) \quad \text{ou:} \quad (0 < y \leq x) \text{ e } (0 < x \leq 10)$$

Alternativamente,

$$P(X \geq Y) = \int_0^{10} \int_0^x f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx = \dots = 1/3$$

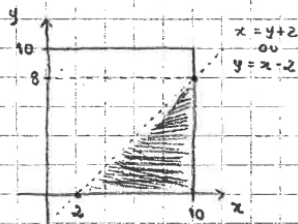
Logo,

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \int_0^{10} \int_y^{10} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy = \int_0^{10} \int_y^{10} \frac{10-x}{500} \, dx \, dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \int_y^{10} (10-x) \, dx \, dy = \\ &= \frac{1}{500} \int_0^{10} \left[10x - \frac{x^2}{2} \right]_y^{10} \, dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \left(100 - 50 - 10y + \frac{y^2}{2} \right) \, dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \left(\frac{y^2}{2} - 10y + 50 \right) \, dy \\ &= \frac{1}{500} \left[\frac{y^3}{6} - 5y^2 + 50y \right]_0^{10} = \frac{1}{500} \left(\frac{1000}{6} - 500 + 500 \right) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 20 (c)

Quer-se $P(X > Y + 2)$

Domínio de integração



$$(y + 2 < x < 10) \quad \text{e} \quad (0 < y < 8)$$

ou

$$(0 < y < x - 2) \quad \text{e} \quad (2 < x < 10)$$

Alternativamente,

Logo,

$$P(X > Y + 2) = \int_0^{10} \int_{y+2}^{x-2} f(x, y) dy dx = \dots = 64/375 \approx 0.1707$$

$$P(X > Y + 2) = \int_0^8 \int_{y+2}^{10} f(x, y) dx dy = \int_0^8 \int_{y+2}^{10} \frac{10-x}{500} dx dy = \frac{1}{500} \int_0^8 \int_{y+2}^{10} (10-x) dx dy$$

$$= \frac{1}{500} \int_0^8 \left[10x - \frac{x^2}{2} \right]_{y+2}^{10} dy = \frac{1}{500} \int_0^8 \left(100 - 50 - 10y - 20 + \frac{y^2}{2} + 2y + 2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{500} \int_0^8 \left(\frac{y^2}{2} - 8y + 32 \right) dy = \frac{1}{500} \left[\frac{y^3}{6} - 4y^2 + 32y \right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{500} \left(\frac{512}{6} - 256 + 256 \right) = \frac{1}{500} \times \frac{256}{3} = \frac{64}{375} \approx 0.1707$$

24. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos A e B , expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório (X, Y) com função densidade

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/2 \quad (0 < x < 2, 0 < y < x).$$

- a) Calcule a média e a variância de X , e de Y .
- b) Estude a independência das variáveis e determine o coeficiente de correlação.
- c) Obtenha a média da variável Y , condicionada por $X = 1$.
- d) Determine a média e a variância do total das vendas dos dois artigos em causa?

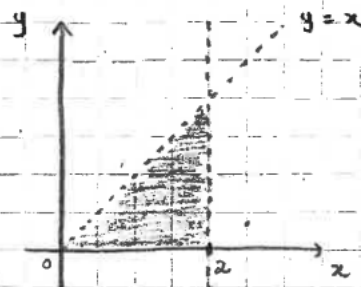


Exercício 24 (a)

X - vendas mensais do artigo A, em u.m.

Y - vendas mensais do artigo B, em u.m.

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2; 0 < y < x) \xrightarrow{\text{suporte}}$$



Exercício 24 (a)

Artigo A

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 \int_0^x x f(x,y) dy dx = \int_0^2 \int_0^x x \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{xy}{2} \right]_0^x dx = \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.3333 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\bullet E(X^2) = \int_0^2 \int_0^x x^2 \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$\text{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222$$

Exercício 24 (a)

Artigo B

$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^x y \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{6} dx = \left[\frac{x^4}{24} \right]_0^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222$$

Exercício 24 (b)

X e Y são independentes se e só se: $f_{x,y}(x,y) = f_x(x) f_y(y)$

Função densidade marginal de X

$$f_x(x) = \int_y f_{x,y}(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} dy = \left[\frac{y}{2} \right]_0^x = x/2 \quad (0 < x < 2)$$

Função densidade marginal de Y

$$f_y(y) = \int_x f_{x,y}(x,y) dx = \int_y^2 \frac{1}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_y^2 = 1 - y/2 \quad (0 < y < 2)$$

Porque $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x) f_y(y)$, conclui-se que X e Y não são independentes.

Exercício 24 (b)

Coefficiente de correlação: $\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

• $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, onde:

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^x xy \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{4} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^4}{16} \right]_0^2 = 1$$

• $\text{Cov}(X,Y) = 1 - (4/3)(2/3) = 1/9$

Logo, $\rho_{x,y} = \frac{1/9}{\sqrt{2/9} \sqrt{2/9}} = \frac{1}{2} = 0.5$

Exercício 24 (c)

$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= \int_y y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \int_0^1 y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \int_0^1 y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1/2}{1/2} dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Exercício 24 (d)

$Z = X + Y \rightarrow$ total das vendas, em u.m.

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \\ &\approx 0.6667 \end{aligned}$$

Obrigada!

Questões?

