



Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 17 e 18 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)

- **Capítulo 1:** Análise Descritiva
- **Capítulo 2:** Probabilidades

Aulas TP (Semanas 3 a 6)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas TP (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas TP (Semanas 10 a 12)

- **Capítulo 5:** Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

5. Variáveis aleatórias especiais

5.1. Variáveis aleatórias discretas

5.1.1. A distribuição uniforme discreta

5.1.2. A variável aleatória de Bernoulli

5.1.3. A variável aleatória binomial

5.1.4. A variável aleatória de Poisson

5.2. Variáveis aleatórias contínuas

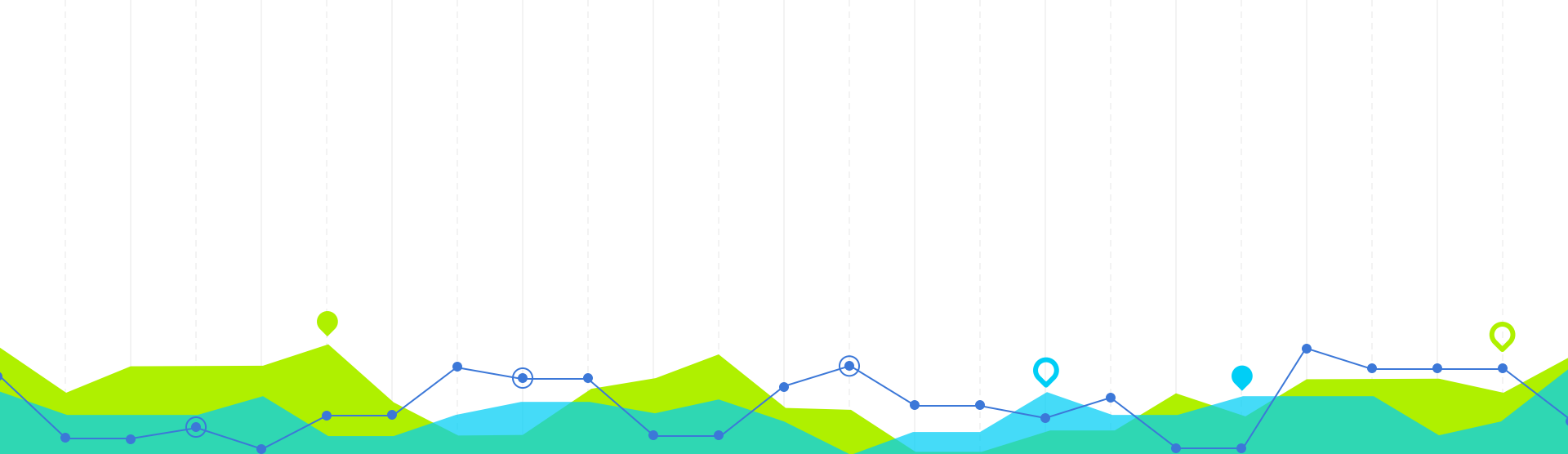
5.2.1. A variável aleatória uniforme contínua

5.2.2. A variável aleatória normal

5.2.3. A variável aleatória exponencial

5.2.4. As variáveis aleatórias gama e chi-quadrado

5.3. O Teorema Limite Central



Distribuição Bernoulli e Binomial

Variáveis Aleatórias Discretas

1

Distribuição Bernoulli

Na prática, existem muitas experiências que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- Uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

Distribuição Bernoulli

As experiências com alternativas *dicotômicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo **sucesso-fracasso** ou **sucesso-insucesso**.

- Essas experiências recebem o nome de **Ensaaios de Bernoulli** ou Provas de Bernoulli e originam uma v.a. com **Distribuição Bernoulli**.

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- **1** se ocorrer **sucesso**,
- **0** se ocorrer **insucesso/fracasso**.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p , $0 < p < 1$.

Distribuição Bernoulli

“ $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ ” representa uma v.a. com **Distribuição Bernoulli** com parâmetro p , isto é,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer “sucesso”} \\ 0, & \text{se ocorrer “insucesso”} \end{cases}$$

e a sua função massa de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

$$\begin{aligned} E(X) &= p, \\ \text{Var}(X) &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Distribuição Bernoulli: Exemplo

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 1 vez.
Qual é a probabilidade de se obter a face 5?

Denotamos,

S: “sucesso”, ocorrer face 5;

I: “insucesso”, não ocorrer face 5.

A variável X “indica” se ocorreu sucesso ou não numa prova Bernoulli!

É fácil ver que $p = P(\text{sucesso}) = P(X=1) = 1/6$ e
 $q = 1 - p = P(\text{insucesso}) = P(X=0) = 5/6$

$\Omega = \{S, I\}$	X	1	0
	$P(X=x)$	1/6	5/6

$X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$

Distribuições Bernoulli e Binomial

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de “sucesso”, dão origem ao ***Modelo de Probabilidade Binomial***.

Distribuição Binomial

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios/provas de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem Distribuição Binomial com parâmetros n e p .

A função massa de probabilidade da v.a. X é dada por

Formulário

- **BINOMIAL** $X \sim B(n; \theta)$, $(0 < \theta < 1)$

$$f(x | \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = n\theta ; \text{Var}(X) = n\theta(1 - \theta) ; M_X(s) = [(1 - \theta) + \theta e^s]^n ; \gamma_1 = (1 - 2\theta) / \sigma$$

Propriedades:

- $X \sim B(n; \theta) \Leftrightarrow (n - X) \sim B(n; 1 - \theta)$
- $X_1 \sim B(n_1; \theta)$, $X_2 \sim B(n_2; \theta)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, \theta)$
- **BERNOULLI** $X \sim B(1; \theta)$

Notação: $X \sim \text{Bin}(n; p)$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Distribuição Binomial

Resultado: Se $X \sim \text{Bin}(n; p)$, então

média: $\mu = E(X) = n \times p$

variância: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \times p \times (1-p)$

Distribuição Binomial: Resumindo...

A **distribuição binomial** verifica as seguintes condições:

1. A experiência tem um **n° fixo de provas, n** .
2. As provas são **independentes**. (O resultado de uma prova não afecta a probabilidade de ocorrência das restantes.)
3. Cada prova origina um de dois resultados possíveis: **sucesso** ou **insucesso**.
4. A probabilidade de sucesso, denotada por **p** , é **constante** em cada prova.

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a face 5 duas vezes?

Denotamos,

S : “sucesso”, ocorrer face 5;

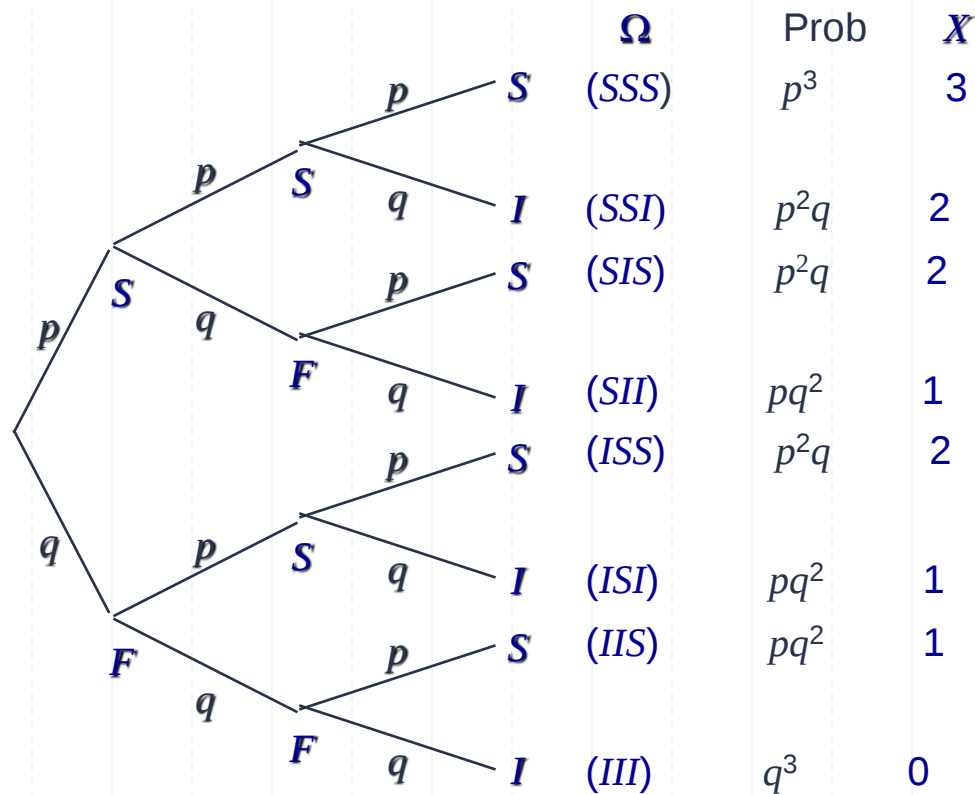
I : “insucesso”, não ocorrer face 5.

É fácil ver que $p = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e
 $q = 1 - p = P(\text{insucesso}) = 5/6$

$$\Omega = \{SSS, SSI, SIS, ISS, SII, ISI, IIS, III\}$$

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o número de vezes que a face 5 é observada nos três lançamentos do dado.



Distribuição Binomial: Exemplo 1

Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$

nº. de sucessos	probabilidades	$p = 1/6$
0	q^3	$125/216=0,5787$
1	$3pq^2$	$75/216=0,3472$
2	$3p^2q$	$15/216=0,0694$
3	p^3	$1/216=0,0046$

A função de probabilidade de X é dada por:

Podemos escrever essa função como

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x q^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para $n = 3$ e $p = 1/6$, $P(X = 2) = 0,0694$.

Distribuição Binomial: Exemplo 2

Considere-se uma prova de escolha múltipla com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha-se que o aluno escolhe as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade dele ***acertar pelo menos a 6 questões?***

X : nº de questões que o aluno acertará

X pode assumir valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$P(\text{Sucesso}) = P(\text{acertar a cada questão}) = 1/4 = 0,25$

$n = 12$

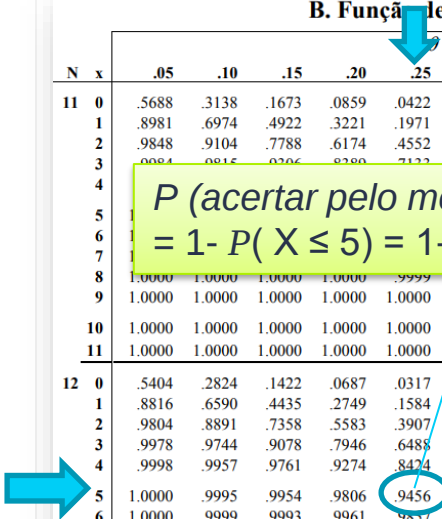
$X \sim \text{Bin}(12; 0,25)$

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x (1 - 0,25)^{12-x}$$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

$$X \sim \text{Bin}(12; 0,25)$$

B. Função de distribuição



N	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
	3	.9984	.9816	.9306	.8380	.7133	.5606	.4266	.3063	.2011	.1133
	4										
10	5										
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8474	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
13	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9837	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
14	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	13										
	14										

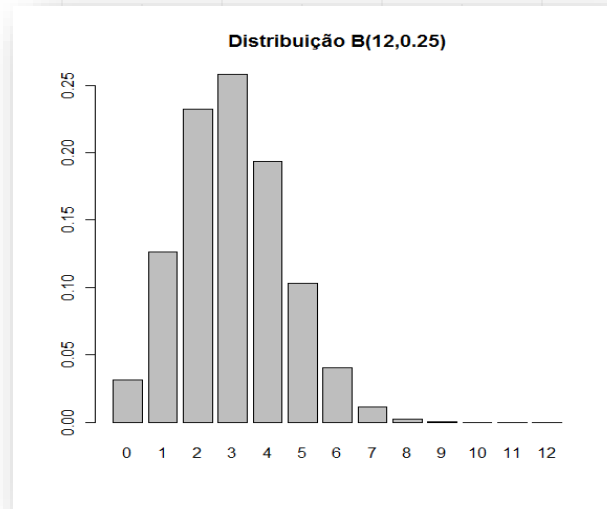
$$P(\text{acertar pelo menos a 6}) = P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) \\ = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,9456 = 0,0544$$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
[1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
[6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08
```

```
> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
  [,1]  [,2]
[1,]  0 3.167635e-02
[2,]  1 1.267054e-01
[3,]  2 2.322932e-01
[4,]  3 2.581036e-01
[5,]  4 1.935777e-01
[6,]  5 1.032414e-01
[7,]  6 4.014945e-02
[8,]  7 1.147127e-02
[9,]  8 2.389848e-03
[10,] 9 3.540516e-04
[11,] 10 3.540516e-05
[12,] 11 2.145767e-06
[13,] 12 5.960464e-08
```



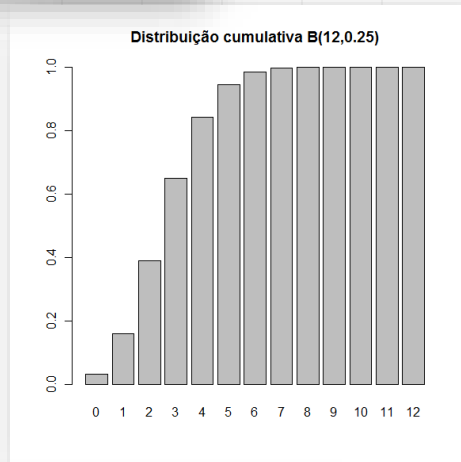
```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
[1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
[7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000
```

```
> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
  [,1] [,2]
[1,] 0  0.03167635
[2,] 1  0.15838176
[3,] 2  0.39067501
[4,] 3  0.64877862
[5,] 4  0.84235632
[6,] 5  0.94559777
[7,] 6  0.98574722
[8,] 7  0.99721849
[9,] 8  0.99960834
[10,] 9  0.99996239
[11,] 10 0.99999779
[12,] 11 0.99999994
[13,] 12 1.00000000
```



```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
```

```
[1] 0.05440223
```

```
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
```

```
[1] 0.05440223
```

$$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$$E(X) = n \times p = 12 \times 0,25 = 3,$$

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso a todas as questões acertará 3.

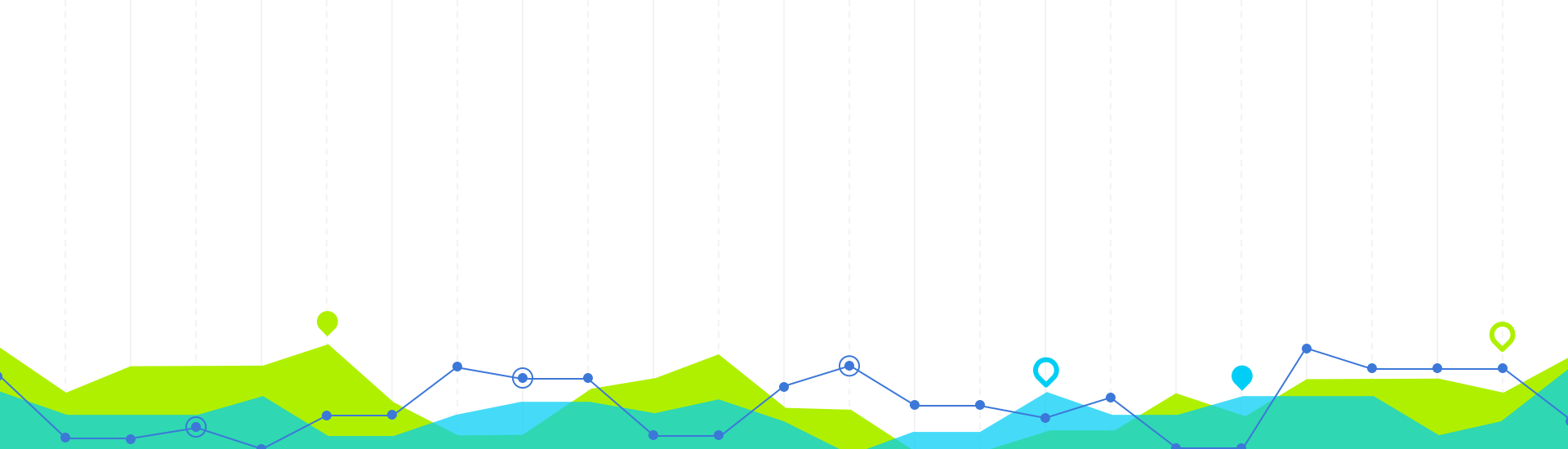
Soma de Binomiais Independentes

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro θ** .

Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$Y_1 \sim B(n_1; \theta), Y_2 \sim B(n_2; \theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n, \theta)$$

onde $n = n_1 + n_2$.



Distribuição Binomial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

2

1. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, calcule a probabilidade de
- a) existirem somente duas garrafas com prémio.
 - b) receber pelo menos um prémio.



Exercício 1 (a)

X - v.a. n.º garrafas premiadas num conjunto de 15 unidades $\Rightarrow X \sim B(15, 0.05)$

$\downarrow$
 n

$\downarrow$
 $\theta = \text{proporção}$
garrafas
premiadas

(a)

$$P(X=2) = 0.1348$$

Exercício 1 (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.4633 = 0.5367$$

2. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeitos de controlo, 10 peças. Da experiência passada sabe-se que 80% das peças podem considerar-se “boas”. Calcule a probabilidade de, nas 10 peças, haver mais que 8 peças “boas”.



Exercício 2

X - nº peças boas, num conjunto de 10 $\rightarrow X \sim B(10, 0.8)$, $n = 10$, $\theta = 0.8$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.6242 = 0.3758 \rightarrow \text{máquina}$$

Pela Tabela 1B:

$$P(X > 8) = P(\underbrace{n-X}_{B(10, 0.2)} < 10-8) = P(Y < 2) = P(Y \leq 1) = 0.3758$$

$\downarrow$
 $B(10, 0.2)$

3. Sabe-se, por experiência, que a probabilidade de uma máquina necessitar de ser afinada em cada período de trabalho de 30 minutos é de 0.05 (períodos independentes). Em cada período só pode haver, no máximo uma afinação. Determine:
- a) O número médio de afinações numa semana em que a máquina trabalha 20 horas.
 - b) A probabilidade de em 8 horas de trabalho se verificar pelo menos uma afinação, e a de se verificarem 2 a 5 afinações.



Exercício 3 (a)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se máquina afirada em 30 min} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow X \sim B(1, 0.05)$$

(a)

20 horas = $20 \times 2 = 40$ períodos de 30 minutos

Seja $\sum_{i=1}^{40} X_i \rightarrow$ n.º afinações num conjunto de 40 períodos $\rightarrow \sum_{i=1}^{40} X_i \sim B(40, 0.05)$

Então,

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} X_i\right) = 40 \times 0.05 = 2$$

Exercício 3 (b)

8 horas = $8 \times 2 = 16$ períodos de 30 minutos

Seja,

$Y = \sum_{i=1}^{16} X_i \rightarrow$ nº afinações num conjunto de 16 períodos (8 horas) $\rightarrow Y \sim B(16, 0.05)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.4401 = 0.5599$$

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y \leq 5) - P(Y < 2) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 1) = 0.9999 - 0.8108 = 0.189$$

4. A produção de parafusos em certa unidade fabril é assegurada por duas máquinas (M_1 e M_2) de funcionamento independente. Da experiência passada pode concluir-se que a proporção de parafusos com defeito, em cada uma das máquinas, é de 5%. Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de quatro parafusos da máquina M_1 e uma de oito da máquina M_2 .
- a) Calcule a probabilidade de se encontrarem dois parafusos com defeito no conjunto das duas amostras.
 - b) Os parafusos são vendidos em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade de essa garantia ser violada, isto é, de haver mais que dois parafusos defeituosos numa embalagem.



Exercício 4 (a)

X_1 - v.a. n.º para fusos defeituosos num conjunto de 4 unidades de $M_1 \Rightarrow X_1 \sim B(4, 0.05)$

X_2 - v.a. n.º para fusos defeituosos num conjunto de 8 unidades de $M_2 \Rightarrow X_2 \sim B(8, 0.05)$

(a)

$X_1 + X_2 = Y \rightarrow$ v.a. n.º para fusos defeituosos nos dois conjuntos

$$X_1 + X_2 \sim B(4 + 8, 0.05) \quad (\Rightarrow) \quad Y \sim B(12, 0.05)$$

$$P(Y = 2) = 0.0988$$

Exercício 4 (b)

Z - v.a. n.º parafusos defeituosos numa embalagem de 20 unidades $\Rightarrow Z \sim B(20, 0.05)$

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9245 = 0.0755$$

8. Sabe-se que 1% dos parafusos de determinado fabricante são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com a garantia de devolução do valor pago caso existam dois ou mais parafusos defeituosos.

- a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução?
- b) Se se comprar dez caixas, qual a probabilidade de haver devoluções?



Exercício 8 (a)

X - n.º parafusos defeituosos numa caixa de 12 unidades $\rightarrow X \sim B(12, 0.01)$

(a)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Exercício 8 (b)

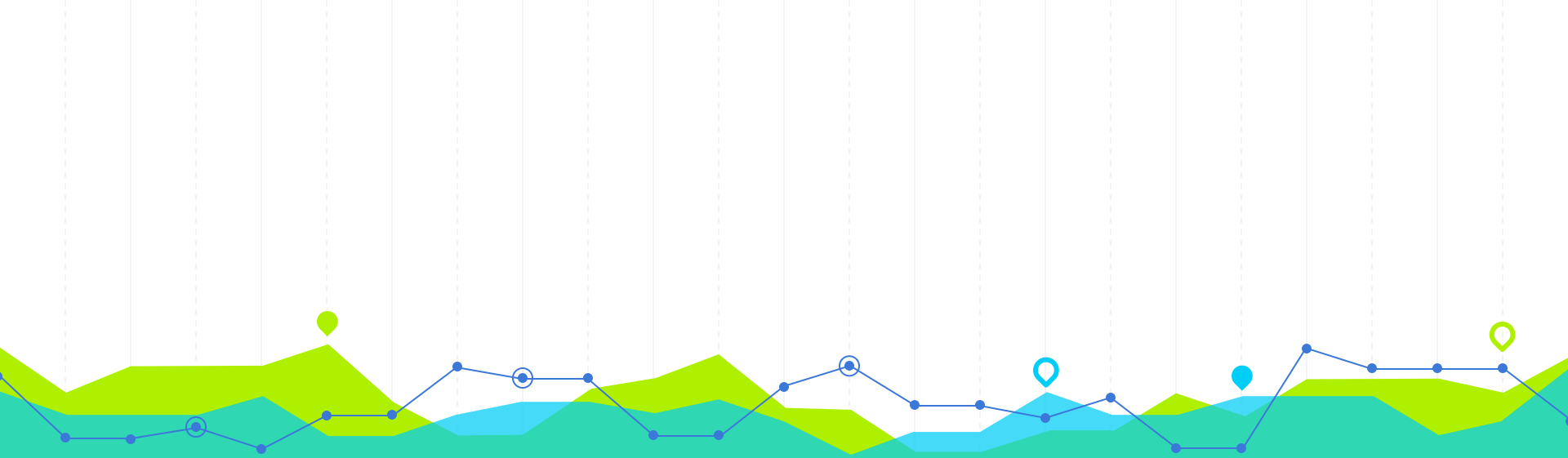
Y - nº de caixas devolvidas, num conjunto de 10

$Y \sim B(10, \theta)$, onde $\theta = P(\text{caixa devolvida}) = P(X \geq 2) = 0.0062$

Logo, $Y \sim B(10, 0.0062)$

Quer-se:

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.9397 = 0.0603$$



Distribuição Poisson

Variáveis Aleatórias Discretas

3

Distribuição de Poisson

Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo ou espaço.

- Carros que passam por minuto num cruzamento, durante uma dada hora do dia.
- Erros tipográficos por página num material impresso.
- Defeitos numa peça fabricada por unidade (m^2 , m, etc).
- Lâmpadas queimadas numa cidade por dia.
- Problemas de filas de espera.

Distribuição de Poisson

Se X é uma v.a. que regista o número de ocorrências num determinado intervalo e a probabilidade de uma ocorrência é independente e a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo, então a v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ e a sua função massa de probabilidade é dada por:

Formulário

- **POISSON** $X \sim \text{Po}(\lambda)$, ($\lambda > 0$)

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad E(X) = \lambda \quad ; \quad \text{Var}(X) = \lambda \quad ; \quad M_X(s) = \exp\{\lambda(e^s - 1)\} \quad ; \quad \gamma_1 = \lambda^{-1/2}$$

Propriedades:

- $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- Se $X \sim B(n; \theta)$, com n grande θ pequeno então $X \overset{a}{\sim} \text{Po}(n\theta)$

λ = valor esperado ou número médio de ocorrências num dado intervalo.

$e = 2,71828$ (Número de Euler)

Cálculo das Probabilidades e Estatística I (ufpb.br)

Distribuição de Poisson

- **Notação:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ indica que v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ .
- Uma v.a de Poisson não tem limite superior: $x = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $P(X = x \mid \lambda)$ = à probabilidade de x ocorrências num determinado intervalo, sendo λ o número médio de ocorrências em tal intervalo.
- O valor médio e a variância de X são:

$$\text{Média: } E(X) = \lambda$$

$$\text{Variância: } \text{Var}(X) = \lambda$$

Processo de Poisson e Distribuição de Poisson

Num **processo de Poisson**, os acontecimentos ocorrem a uma taxa média de λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt

$$f(x | \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\lambda > 0).$$

Soma de Poisson independentes

- Teorema 5.3 – Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,

$$X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1), X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda) \text{ onde } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

Em média há 2 chamadas por hora em um certo telefone. Calcule a probabilidade de:

- a) receber nenhuma chamada em 1 horas.
- b) receber uma chamada em 1 horas.
- c) receber uma chamada em 2 horas.
- d) receber no máximo 1 chamadas em 2 horas.
- e) receber pelo menos 1 chamadas em 2 horas.

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

X = número chamadas por hora em um certo telefone
 $\lambda = 2$ chamadas por hora

$$\text{a) } P(X = 0 | \lambda = 2) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,1353$$

$$\text{b) } P(X = 1 | \lambda = 2) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,2706$$

$$\text{c) } P(X = 1 | \lambda = 4) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0732$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \leq 1 | \lambda = 4) &= P(X = 0 | \lambda = 4) + P(X = 1 | \lambda = 4) \\ &= \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0183 + 0,0732 = 0,0915 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(X \geq 1 | \lambda = 4) &= 1 - P(X < 1 | \lambda = 4) \\ &= 1 - P(X = 0 | \lambda = 4) = 1 - 0,0183 = 0,9817 \end{aligned}$$

Distribuição de Poisson: Exemplo 2

Outro exemplo:

X = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência numa hora

$$X \sim \text{Poisson}(30)$$

Y = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência em 4 horas (20h-24h)

$$Y \sim \text{Poisson}(30 \times 4) = \text{Poisson}(120)$$

Errado: ~~$Y = 4X$~~ $Y \sim \text{Poisson}(4 \times 30)$

Distribuição de Poisson: Resumindo...

A **distribuição de Poisson** é uma distribuição discreta que se aplica quando ocorre um acontecimento num **intervalo especificado**. A variável aleatória **X** representa o nº de ocorrências num determinado intervalo. O intervalo pode se referir a tempo, distância, área, volume, ou algum tipo de medida similar.

Distribuição de Poisson vs. Distribuição Binomial

A distribuição de Poisson difere da distribuição binomial nos seguintes aspectos fundamentais:

- ✓ A distribuição binomial é caracterizada pela dimensão da amostra n e pela probabilidade de sucesso p , enquanto que a distribuição de Poisson é caracterizada apenas pela média μ .
- ✓ Numa distribuição binomial, os valores que a variável aleatória X pode tomar são $0, 1, \dots, n$, enquanto que na distribuição de Poisson a variável X toma os valores $0, 1, \dots$, sem limite superior.

Lei dos Acontecimentos Raros: Binomial para a Poisson

Quando $\theta = \lambda / n \rightarrow 0$, mantendo-se fixo $n\theta = \lambda$, a binomial tende para a Poisson,

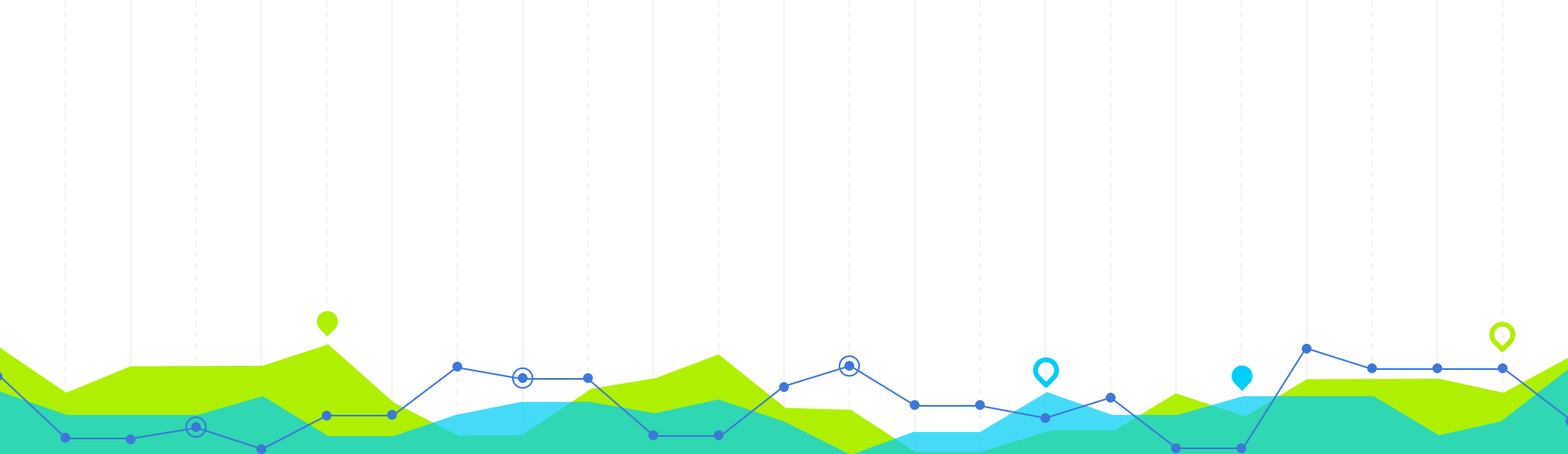
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}.$$

A **regra prática** para utilizar esta “lei” baseia-se no pressuposto de que se tem um acontecimento **raro** e um número “elevado” de observações.

Assim, **não é aconselhável** fazer a aproximação quando:

$0.1 < \theta < 0.9$ (quando $\theta \geq 0.9$, evidentemente que o acontecimento em causa não é “raro”, mas sim o seu complementar)

$n \leq 20$ (que são os valores de n considerados na tabela 1).



Distribuição Poisson: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

4

20. O número de erros de ortografia que um aluno dá por página, numa prova escrita de Estatística, segue um processo de Poisson com taxa média de 1.5 erros.
- a) Qual a percentagem de provas de duas páginas sem erros de ortografia?
 - b) Se um aluno escreveu quatro páginas, qual a probabilidade de ter cometido mais de 8 erros?
 - c) Escolhidas ao acaso cinco provas de quatro páginas cada, qual a probabilidade de apenas uma delas não ter erros de ortografia?
 - d) Numa prova com seis páginas contaram-se dez erros, qual a probabilidade de metade deles estarem nas duas primeiras páginas?



Exercício 20 (a)

X - v.a. n.º ERROS por página $\rightarrow X \sim Po(1.5)$

$\rightarrow \lambda = 1.5 \rightarrow \text{média: } E(X)$

(a)

Y - v.a. n.º ERROS em 2 páginas $\rightarrow Y \sim Po(2\lambda) = Po(3)$

$$P(Y=0) = 0.0498$$

Exercício 20 (b)

Z - v.a. nº erros em 4 páginas $\rightarrow Z \sim Po(4\lambda) = Po(6)$

$$P(Z > 8) = 1 - P(Z \leq 8) = 1 - 0.8472 = 0.1528$$

Exercício 20 (c)

Num conjunto de 5 provas (de 4 páginas) apenas uma não tem erros $\rightarrow$ Binomial

W - v.a. n.º provas ^(de 4 páginas) sem erros num conjunto de 5

$$W \sim B(n, \theta), \text{ onde: } \begin{cases} n = 5 \\ \theta = P(\underbrace{z=0}_{\substack{\text{prova 4 pág.} \\ \text{sem erros}}}) = 0.0025 \end{cases} \rightarrow W \sim B(5, 0.0025)$$

$$P(W=1) = 0.0124$$

Exercício 20 (d)

X_i = nº erros por página ($i=1,2,\dots,6$) $\rightarrow X_i \sim P_0(1.5)$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \mid \sum_{i=1}^6 X_i = 10\right) &= \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \wedge \sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \wedge \sum_{i=3}^6 X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ x_i \text{ ind.} \end{matrix} \\ &= \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5\right) P\left(\sum_{i=3}^6 X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} \end{aligned}$$

Exercício 20 (d)

$$\bullet \sum_{i=1}^2 X_i \sim P_0(1.5+1.5) = P_0(3) \rightarrow P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5\right) = 0.1008$$

$$\bullet \sum_{i=3}^6 X_i \sim P_0(1.5+1.5+1.5+1.5) = P_0(6) \rightarrow P\left(\sum_{i=3}^6 X_i = 5\right) = 0.1606$$

$$\bullet \sum_{i=1}^6 X_i \sim P_0(1.5+1.5+1.5+1.5+1.5+1.5) = P_0(9) \rightarrow P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right) = 0.1186$$

Logo,

$$P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \mid \sum_{i=3}^6 X_i = 10\right) = \frac{0.1008 \times 0.1606}{0.1186} \approx 0.1365$$

24. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos A e B , expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório (X, Y) com função densidade

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/2 \quad (0 < x < 2, 0 < y < x).$$

- a) Calcule a média e a variância de X , e de Y .
- b) Estude a independência das variáveis e determine o coeficiente de correlação.
- c) Obtenha a média da variável Y , condicionada por $X = 1$.
- d) Determine a média e a variância do total das vendas dos dois artigos em causa?

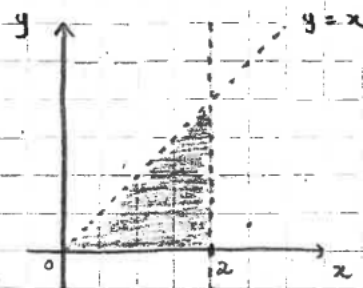


Exercício 24 (a)

X - vendas mensais do artigo A, em u.m.

Y - vendas mensais do artigo B, em u.m.

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2; 0 < y < x) \xrightarrow{\text{suporte}}$$



Exercício 24 (a)

Artigo A

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 \int_0^x x f(x,y) dy dx = \int_0^2 \int_0^x x \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{xy}{2} \right]_0^x dx = \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.3333 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\bullet E(X^2) = \int_0^2 \int_0^x x^2 \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$\text{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222$$

Exercício 24 (a)

Artigo B

$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^x y \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{6} dx = \left[\frac{x^4}{24} \right]_0^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222$$

Exercício 24 (b)

X e Y são independentes se e só se: $f_{x,y}(x,y) = f_x(x) f_y(y)$

Função densidade marginal de X

$$f_x(x) = \int_y f_{x,y}(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} dy = \left[\frac{y}{2} \right]_0^x = x/2 \quad (0 < x < 2)$$

Função densidade marginal de Y

$$f_y(y) = \int_x f_{x,y}(x,y) dx = \int_y^2 \frac{1}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_y^2 = 1 - y/2 \quad (0 < y < 2)$$

Porque $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x) f_y(y)$, conclui-se que X e Y não são independentes.

Exercício 24 (b)

Coefficiente de correlação: $\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

• $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, onde:

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^x xy \cdot \frac{1}{2} dy dx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{4} \right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \left[\frac{x^4}{16} \right]_0^2 = 1$$

• $\text{Cov}(X,Y) = 1 - (4/3)(2/3) = 1/9$

Logo, $\rho_{x,y} = \frac{1/9}{\sqrt{2/9} \sqrt{2/9}} = \frac{1}{2} = 0.5$

Exercício 24 (c)

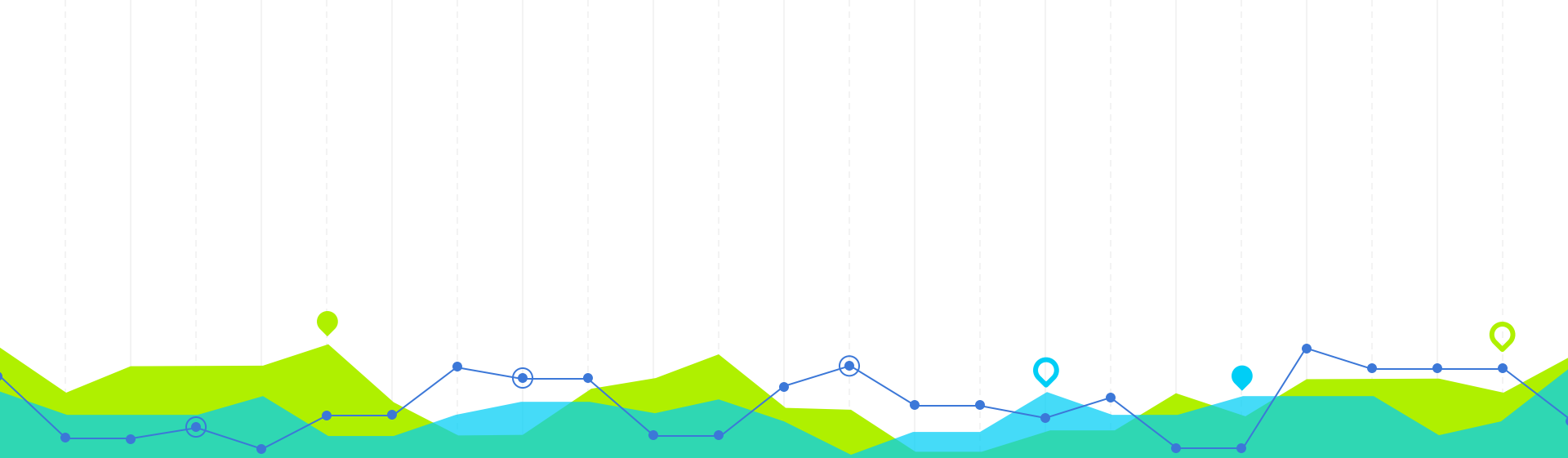
$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= \int_y y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \int_0^1 y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \int_0^1 y \cdot f_{Y|X=1}(y) dy = \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1/2}{1/2} dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Exercício 24 (d)

$Z = X + Y \rightarrow$ total das vendas, em u.m.

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \\ &\approx 0.6667 \end{aligned}$$

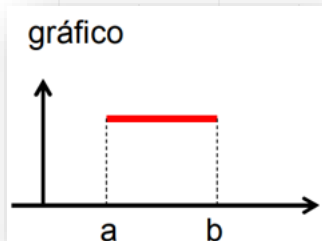


Distribuição Uniforme Contínua

Variáveis Aleatórias Contínuas

5

Distribuição Uniforme



Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros a e b , $a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(a,b)$

Formulário

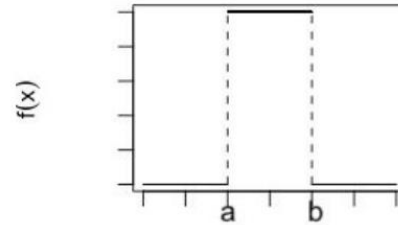
- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \alpha < x < \beta \quad ; \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ; \quad \text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad ; \quad M_X(s) = \frac{e^{s\beta} - e^{s\alpha}}{s(\beta - \alpha)}, \quad s \neq 0$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Uniforme** pode ser escrita destas duas formas.

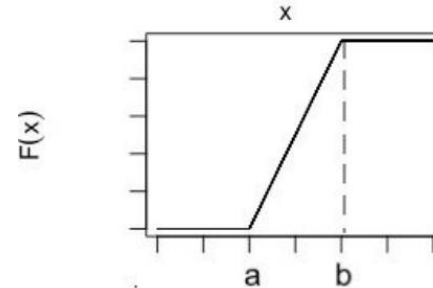
Distribuição Uniforme

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$

Distribuição Uniforme

Uniforme (0, 1)

O caso $\alpha = 0, \beta = 1$, isto é, $X \sim U(0, 1)$, é o de **maior interesse**

$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$
$E(X^k) = \frac{1}{(k+1)} \log 2, \quad E(X) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{12}, \quad \gamma_1 = 0$	

<https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/>

Distribuição Uniforme

- **Teorema 5.4 – Transformação uniformizante** – resultado particularmente importante em problemas de simulação.

Este resultado mostra que, em certas condições, $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ e inversamente que se $Y \sim U(0,1)$ então $X = F_X^{-1}(Y) \sim F_X(x)$

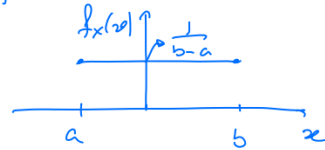
<https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/>

Distribuição Uniforme: Resumindo...

i) $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ [lê-se: X tem distribuição uniforme no intervalo (a, b)]

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



$$\left(\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1 \Rightarrow \text{a função está bem definida} \right)$$

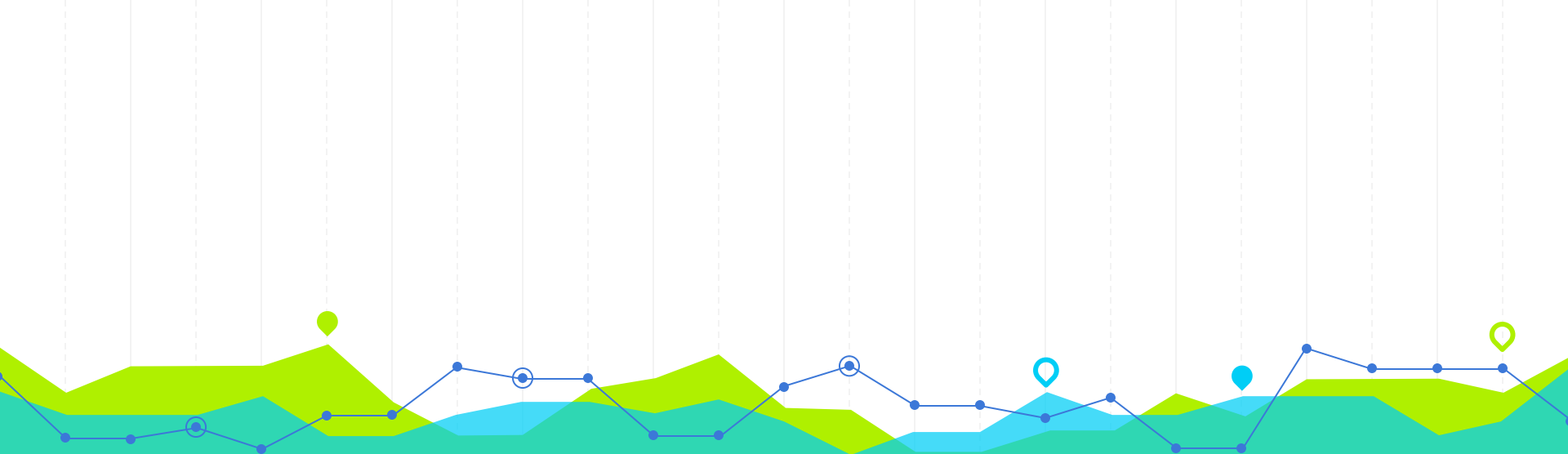
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1.0 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$\text{var}(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Distribuição Uniforme Contínua: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

6

34. A duração de pequenos anúncios (entre 5 e 12 segundos) numa cadeia de televisão pode considerar-se uma variável aleatória com distribuição uniforme.

- a) Indique a função de distribuição.
- b) Qual a probabilidade de um pequeno anúncio ter duração superior a 7 segundos.
- c) Calcule e interprete: $P(X > 6 | X \leq 10)$.
- d) Calcule a média e o desvio padrão da duração dos pequenos anúncios.



Exercício 34 (a)

X - v.a. duração anúncios (entre 5 e 12 segundos)

$$X \sim U(5, 12)$$

(a)

$$X \sim U(5, 12) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12-5} = \frac{1}{7} \quad (5 < x < 12)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_5^x \frac{1}{7} du = \left[\frac{u}{7} \right]_5^x = \frac{x}{7} - \frac{5}{7} = \frac{x-5}{7}$$

Assim,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 5) \\ \frac{x-5}{7} & (5 \leq x < 12) \\ 1 & (x \geq 12) \end{cases}$$

Exercício 34 (b)

$$P(X > 7) = \int_7^{12} f(x) dx = 1 - F_x(7) = 1 - \frac{7 \cdot 5}{7} = \frac{5}{7} \approx 0.7143$$

Exercício 34 (c)

$$\begin{aligned} P(X > 6 \mid X \leq 10) &= \frac{P(X > 6 \cap X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{P(6 < X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{F_X(10) - F_X(6)}{F_X(10)} = \\ &= \frac{5/7 - 1/7}{5/7} = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

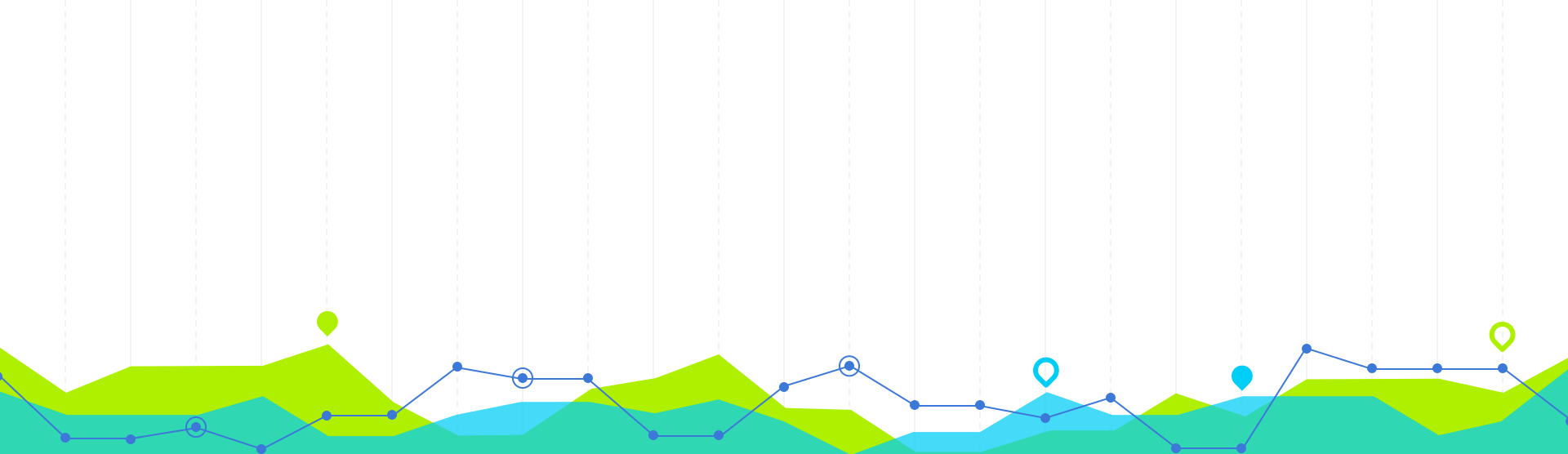
- Sabendo que um anúncio não dura mais de 10 segundos, a probabilidade de durar mais de 6 segundos é de 0.8
- 80% dos anúncios com duração não superior a 10 segundos, duram mais de 6 segundos.

Exercício 34 (d)

$X \sim U(\alpha, \beta)$, onde $\alpha = 5$ e $\beta = 12$. Então:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5 + 12}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} = \frac{(12 - 5)^2}{12} = \frac{49}{12} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{49/12} \approx 2.0207$$



Distribuição Normal

Variáveis Aleatórias Contínuas

7

Distribuição Normal ou Gaussiana

A v. a. X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Formulário

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

Pode ser mostrado que:

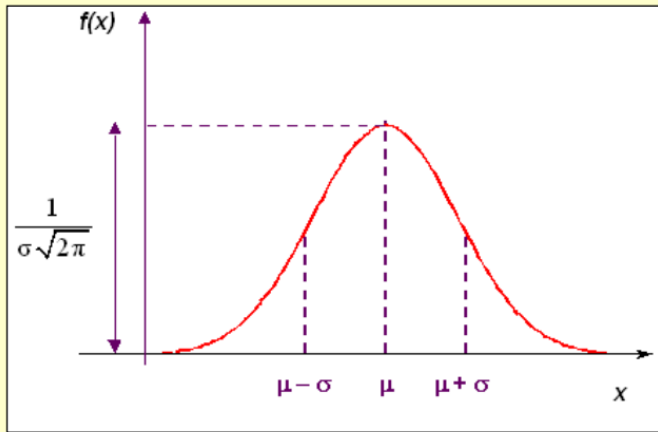
1. μ é o valor esperado (média) de X , com $-\infty < \mu < \infty$;
2. σ^2 é a variância de X , com $\sigma^2 > 0$.

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Notação : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

Distribuição Normal: Propriedades

Propriedades de $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

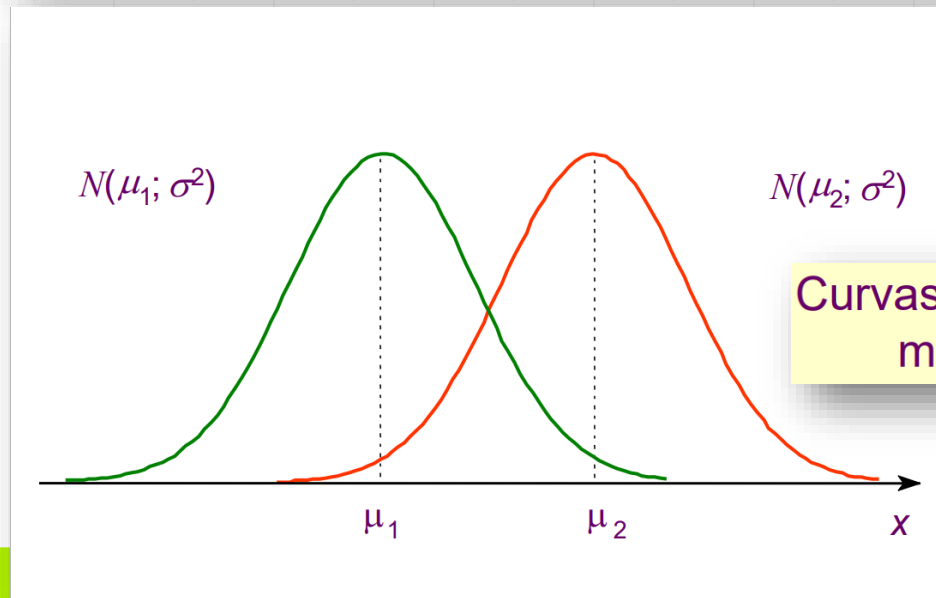


- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ .

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Valor Médio

A distribuição Normal depende dos parâmetros μ e σ^2

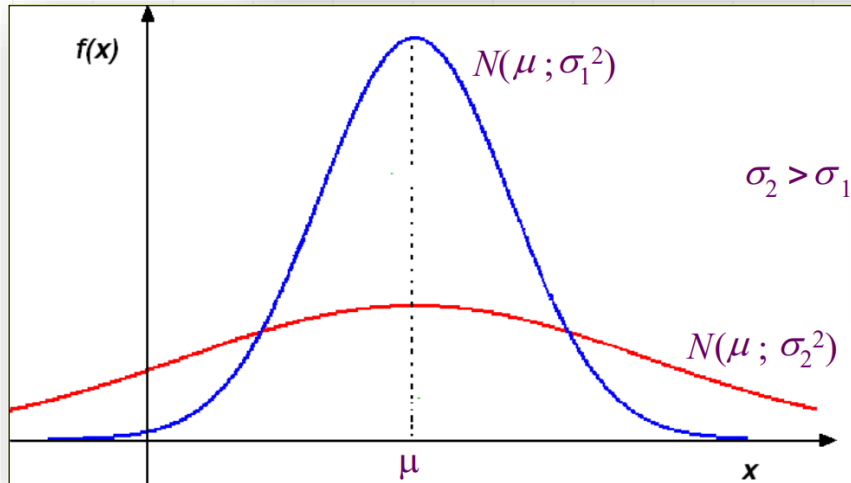


Curvas Normais com mesma variância σ^2
mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal: Variância

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ
mas com variâncias diferentes ($\sigma_2 > \sigma_1$).

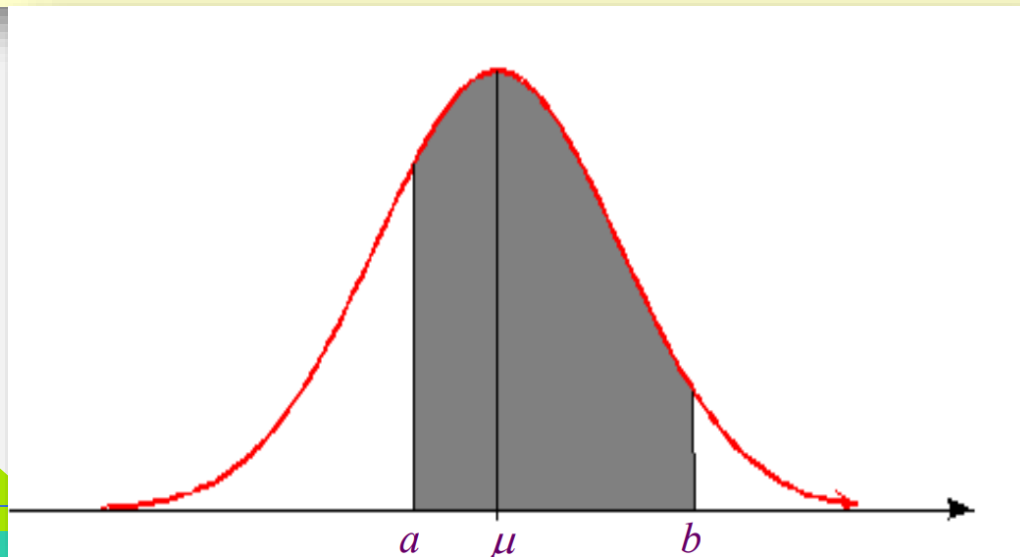
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Cálculo de Probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$



Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b .

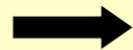


Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: $Z \sim N(0,1)$

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, definimos

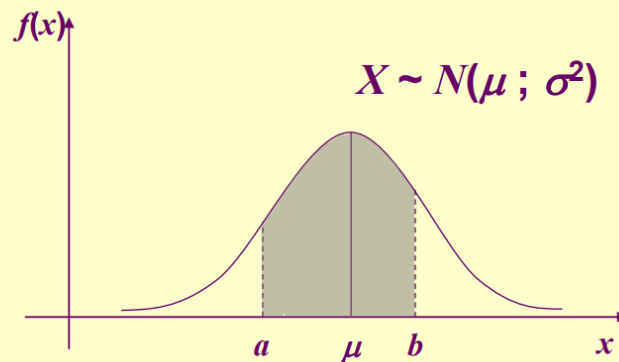
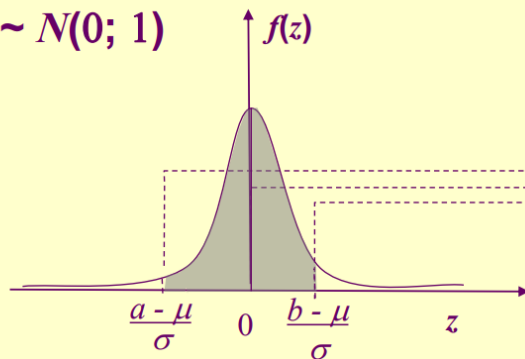
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$

$Z \sim N(0; 1)$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: $Z \sim N(0,1)$

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se *normal padrão* ou *reduzida*.

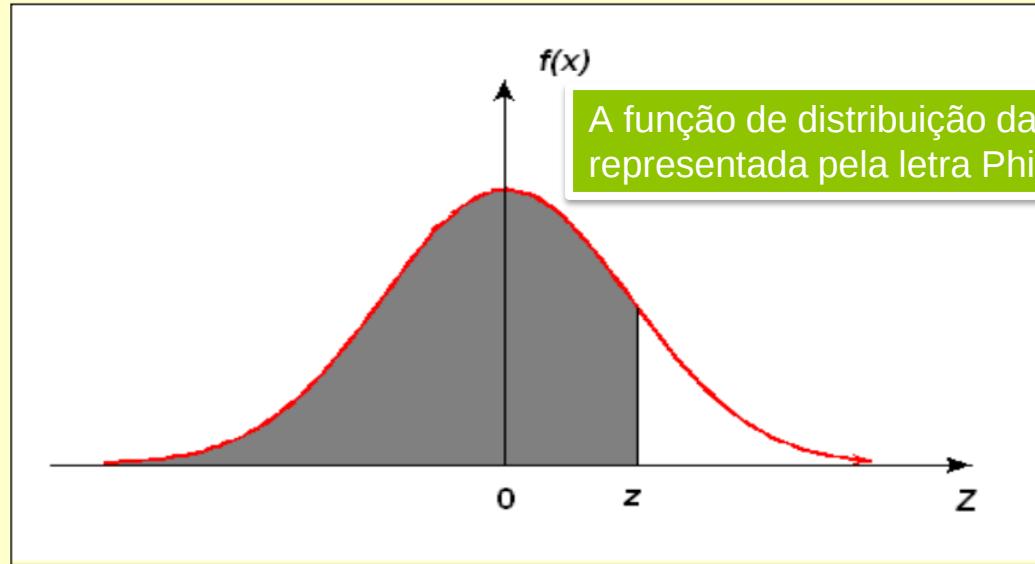
Portanto,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z \times \sigma.$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades



A função de distribuição da Normal Padrão é representada pela letra Phi: $P(Z \leq z) = F(z) = \Phi(z)$

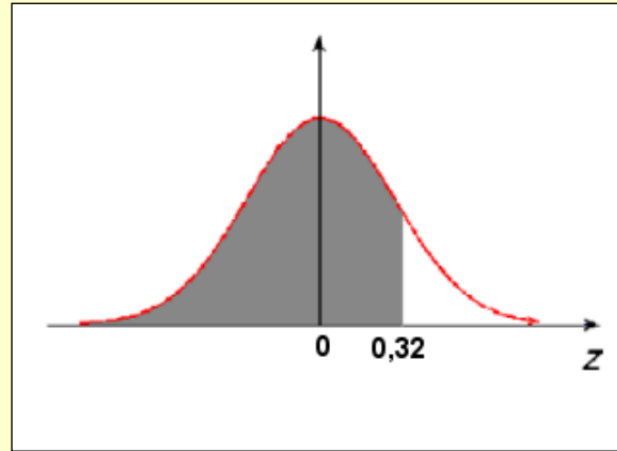
Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$, para $z \geq 0$.

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://DistribuicaoNormal.usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

Exemplo: Seja $Z \sim N(0; 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0,32)$



[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

$$P(Z \leq 0,32) = A(0,32) = 0,6255.$$

Distribuição Normal Padrão: Tabela

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7824	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

$$P(Z \leq 0,32) = 0,6255$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$\text{b) } P(0 < Z \leq 1,71)$$

$$= P(Z \leq 1,71) - P(Z \leq 0)$$

$$= A(1,71) - A(0)$$

$$= 0,9564 - 0,5 = 0,4564.$$

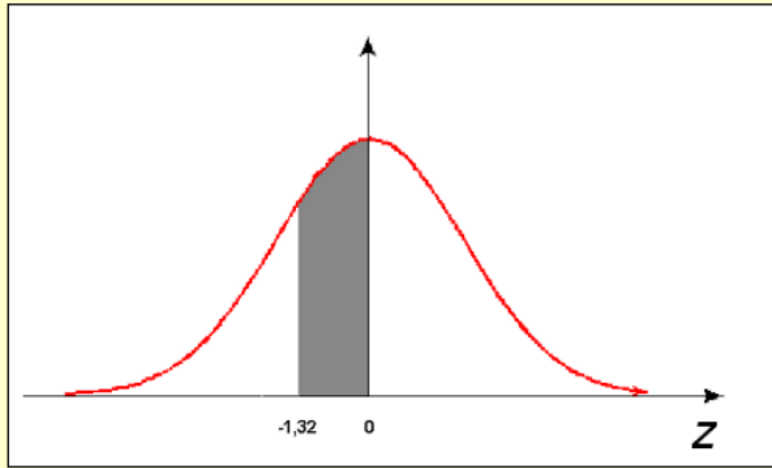
Obs.: $A(0) = P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0,5$.

$P(-a < Z < a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$
 $P(Z < -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
sendo “a” uma constante positiva e Φ (Phi) a fd da Distribuição Normal Padrão



Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$c) P(-1,32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,32)$$



$$= P(Z \leq 1,32) - P(Z \leq 0)$$

$$= A(1,32) - 0,5$$

$$= 0,9066 - 0,5 = 0,4066.$$

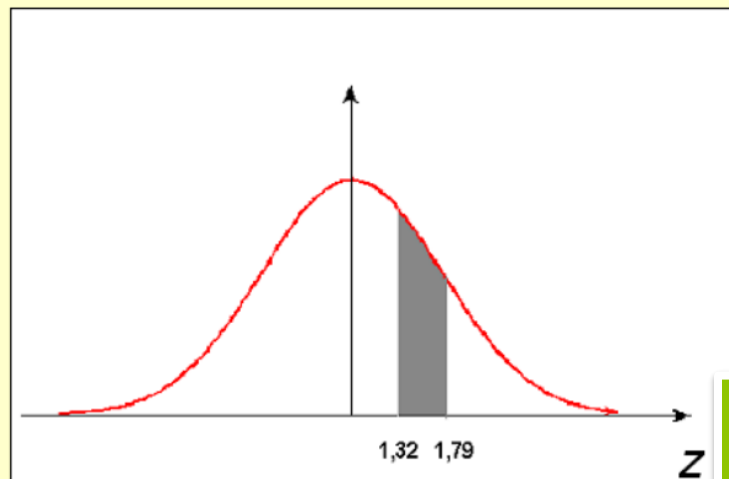
Tabela

$$\text{Alternativa, } P(-1,32 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,32) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1,32)] = 0,5 - 1 + 0,9066 = 0,4066$$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$d) P(1,32 < Z \leq 1,79)$$



$$\begin{aligned} &= P(Z \leq 1,79) - P(Z \leq 1,32) \\ &= A(1,79) - A(1,32) \\ &= 0,9633 - 0,9066 = 0,0567. \end{aligned}$$

$$\text{Alternativa, } P(1,32 < Z \leq 1,79) = \Phi(1,79) - \Phi(1,32) = 0,9633 - 0,9066 = 0,0567$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

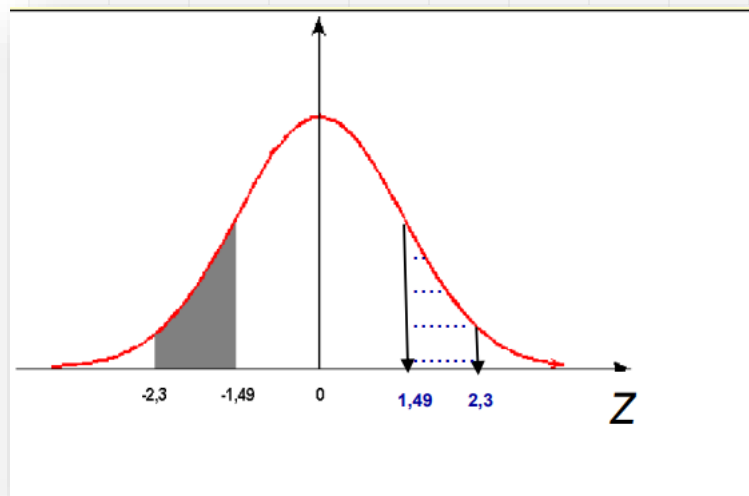
$$\text{e) } P(-2,3 < Z \leq -1,49)$$

$$= P(1,49 \leq Z < 2,3)$$

$$= A(2,3) - A(1,49)$$

$$= 0,9893 - 0,9319$$

$$= 0,0574.$$



Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, $P(-2,3 < Z \leq -1,49) = \Phi(-1,49) - \Phi(-2,3)$
 $= [1 - \Phi(1,49)] - [1 - \Phi(2,3)] = 0,0574$

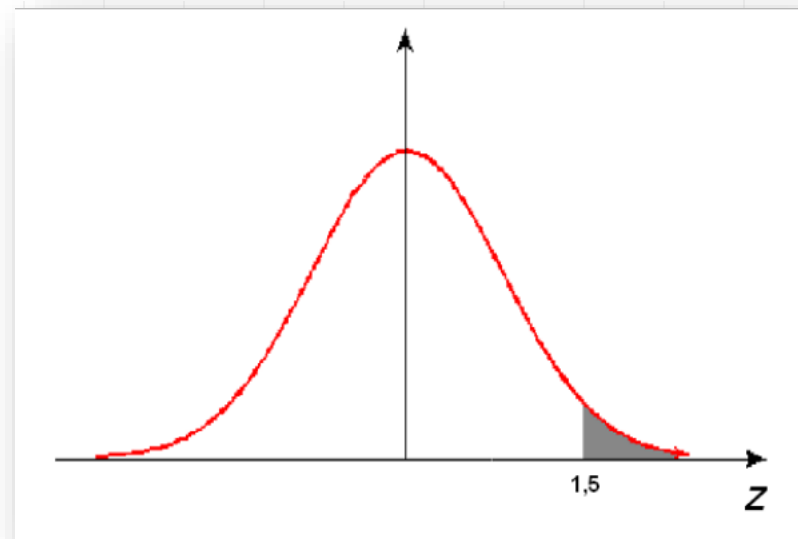
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$f) P(Z \geq 1,5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,5)$$

$$= 1 - A(1,5)$$

$$= 1 - 0,9332 = 0,0668.$$



Alternativa, $P(Z \geq 1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 0,0668$

Distribuição Normal (usp.br)

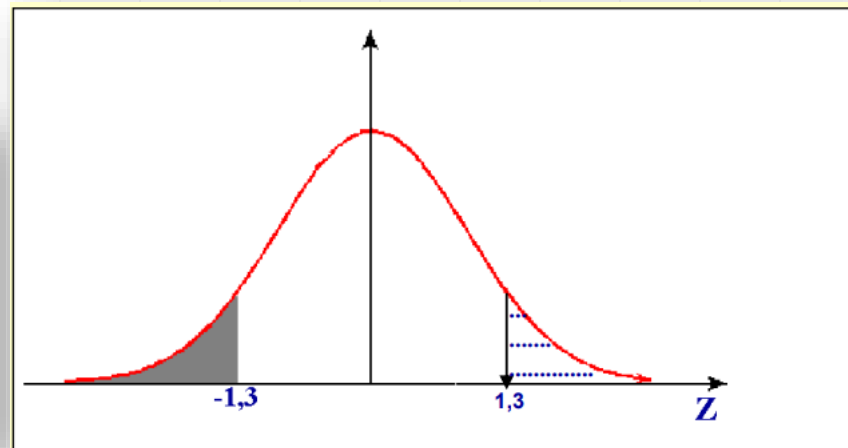
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$g) P(Z \leq -1,3)$$

$$= P(Z \geq 1,3) = 1 - P(Z \leq 1,3)$$

$$= 1 - A(1,3)$$

$$= 1 - 0,9032 = 0,0968.$$

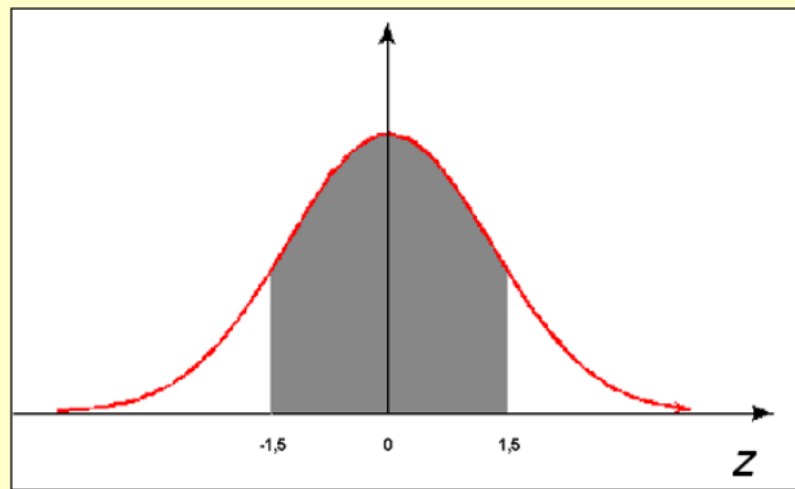


Distribuição Normal (usp.br)

• Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1,3) = P(Z \geq 1,3)$.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

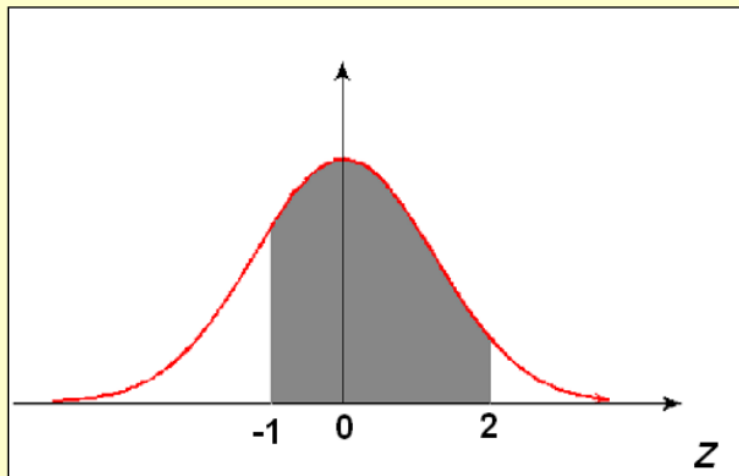
$$\begin{aligned} \text{h) } & P(-1,5 \leq Z \leq 1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - P(Z \geq 1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - [1 - P(Z \leq 1,5)] \\ &= 2 \times P(Z \leq 1,5) - 1 = 2 \times A(1,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

i) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$$\begin{aligned} &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) \\ &= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1)) \\ &= 0,9773 - (1 - 0,8413) \\ &= 0,9773 - 0,1587 = 0,8186. \end{aligned}$$

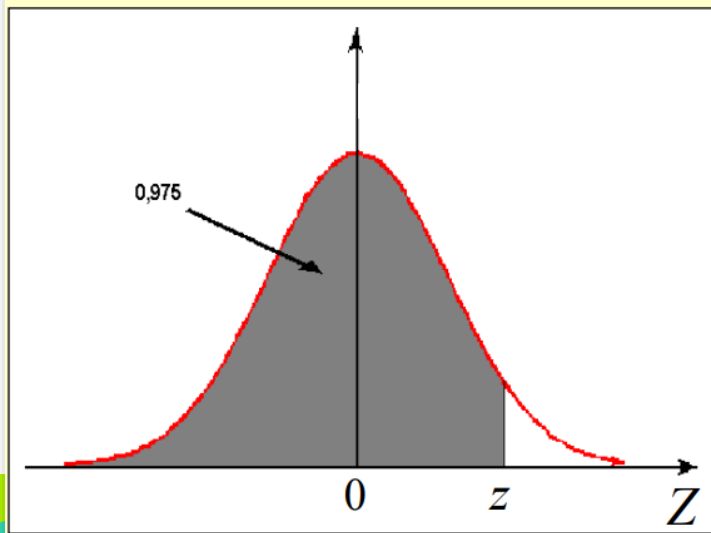
Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0,975$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,975$
 $\Leftrightarrow z = \Phi(0,975)^{-1} = 1,96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Tabela

Quantis

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849									
1.3	.9032									
1.4	.9192									
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868				.9871	.9874	.9877	.9880
2.3	.9883	.9886	.9889				.9892	.9895	.9898	.9900
2.4	.9903	.9906	.9909				.9912	.9915	.9918	.9920
2.5	.9923	.9926	.9929				.9932	.9935	.9938	.9940
2.6	.9943	.9946	.9949				.9952	.9955	.9958	.9960
2.7	.9963	.9966	.9969				.9972	.9975	.9978	.9980
2.8	.9983	.9986	.9989				.9992	.9995	.9998	.9999
2.9										
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

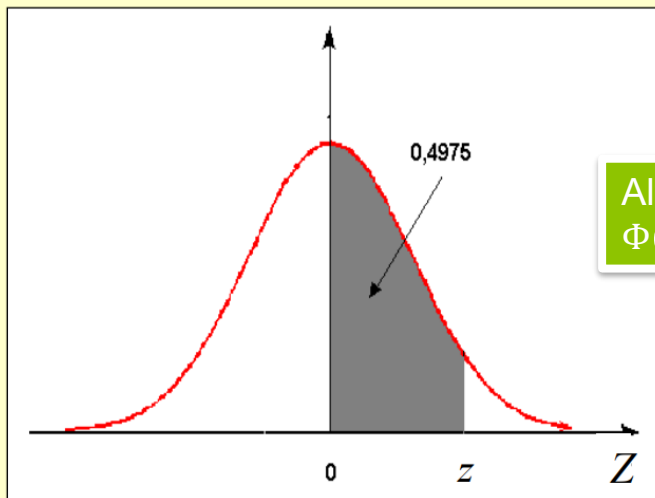
$$P(Z \leq z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,975 \Leftrightarrow z = \Phi(0,975)^{-1} = 1,96$$

Probabilidades

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(ii) P(0 < Z \leq z) = 0,4975$$



z é tal que $A(z) = 0,5 + 0,4975 = 0,9975$.

Pela tabela $z = 2,81$. Tabela

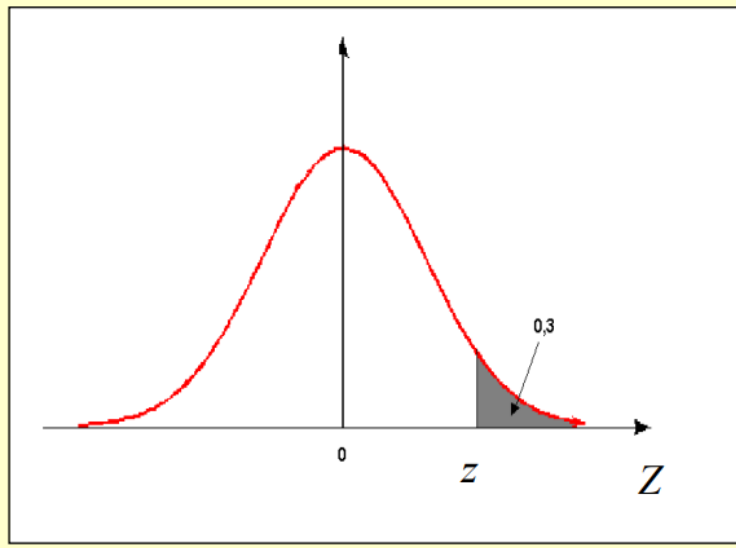
Alternativa, $P(0 < Z \leq z) = 0,4975 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(0) = 0,4975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,4975 + 0,5 \Leftrightarrow z = \Phi(0,9975)^{-1} = 2,81$

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iii) $P(Z \geq z) = 0,3$



z é tal que $A(z) = 0,7$.

Pela tabela, $z = 0,53$.

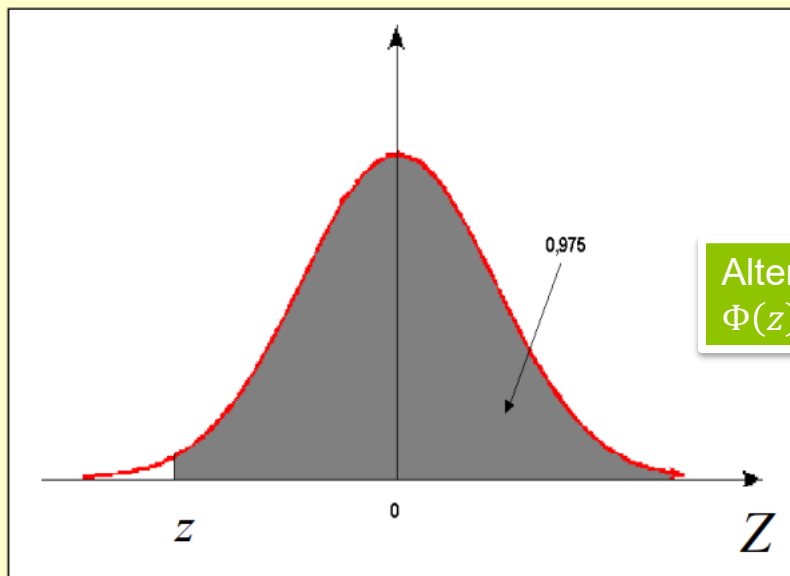
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3$
 $\Leftrightarrow \Phi(z) = 0,7 \Leftrightarrow z = \Phi(0,7)^{-1} = 0,53$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(iv) P(Z \geq z) = 0,975$$



a é tal que $A(a) = 0,975$ e $z = -a$.

Pela tabela $a = 1,96$.

Então, $z = -1,96$.

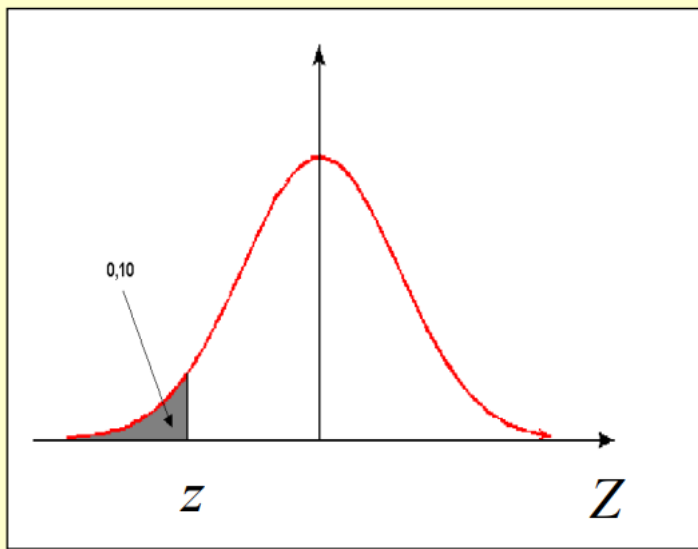
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,975 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,025 \Leftrightarrow z = \Phi(0,025)^{-1} = -\Phi(0,975)^{-1} = -1,96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(v) P(Z \leq z) = 0,10$$



a é tal que $A(a)=0,90$ e $z = -a$.

Pela tabela, $a = 1,28$

e, assim, $z = -1,28$.

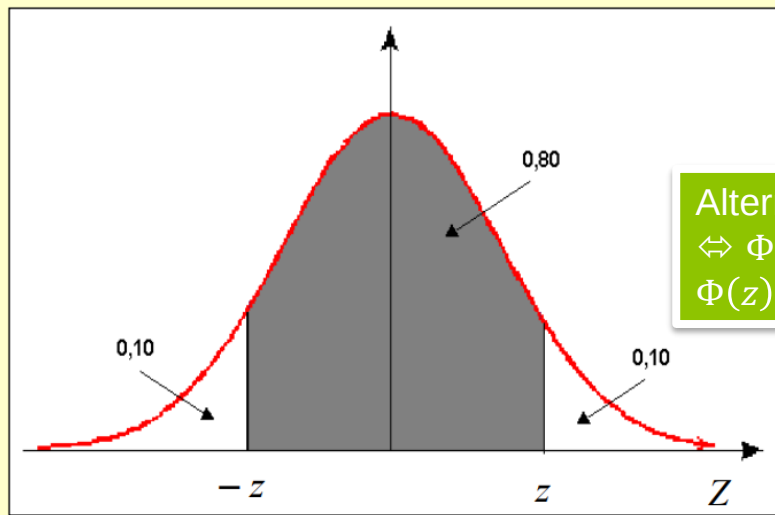
Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,10 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,10 \Leftrightarrow z = \Phi(0,1)^{-1} = -\Phi(0,9)^{-1} = -1,28$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(vi) P(-z \leq Z \leq z) = 0,80$$



z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0,1$.

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0,90$

$\Rightarrow z = 1,28$ (pela tabela).

Tabela

Alternativa, $P(-z \leq Z \leq z) = 0,80 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0,80$
 $\Leftrightarrow \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 0,80 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0,80 \Leftrightarrow$
 $\Phi(z) = 0,9 \Leftrightarrow z = \Phi(0,9)^{-1} = 1,28$

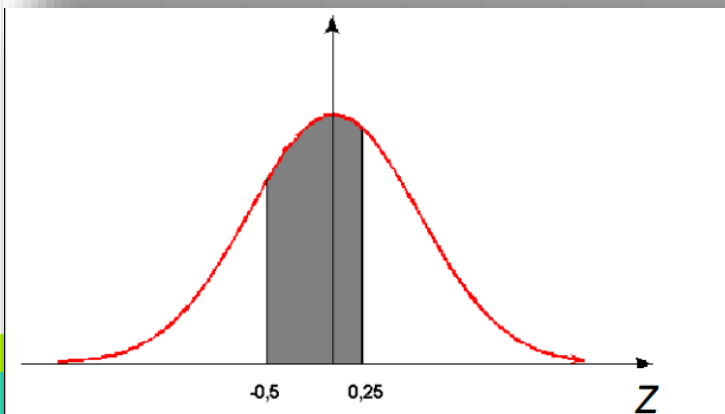
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Exemplo: Seja $X \sim N(10 ; 64)$ ($\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$)

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$

$$= P\left(\frac{6-10}{8} < \frac{X-10}{8} < \frac{12-10}{8}\right) = P(-0,5 < Z < 0,25)$$



$$= A(0,25) - (1 - A(0,5))$$

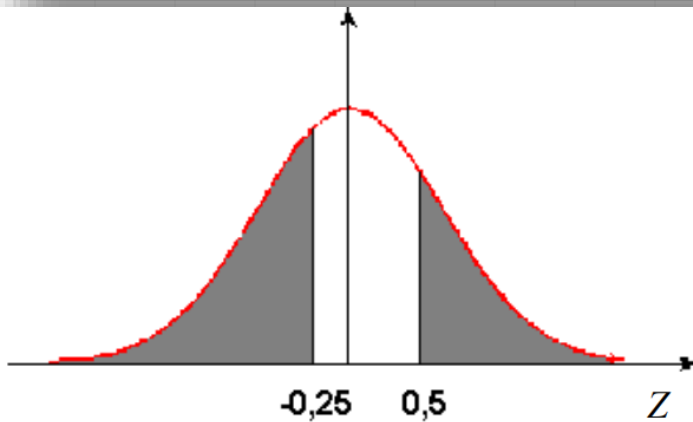
$$= 0,5987 - (1 - 0,6915)$$

$$= 0,5987 - 0,3085 = 0,2902$$

Distribuição Normal: Probabilidades

(b) $P(X \leq 8 \text{ ou } X > 14)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) + P(X > 14) &= P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right) \\ &= P(Z < -0,25) + P(Z > 0,5) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 1 - A(0,25) + 1 - A(0,5) \\ &= 1 - 0,5987 + 1 - 0,6915 \\ &= 0,7098 \end{aligned}$$

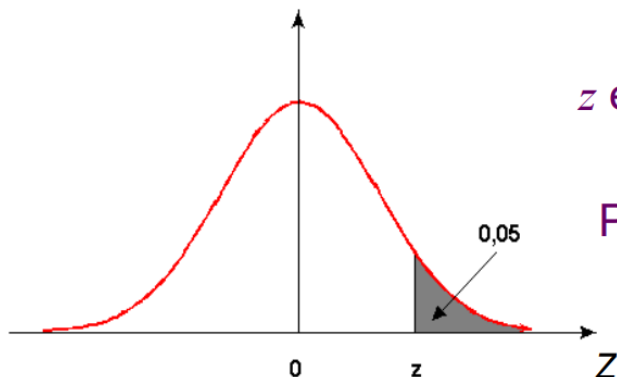
Distribuição Normal: Quantis

c) k tal que $P(X \geq k) = 0,05$

$$P(X \geq k) = 0,05 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \geq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \geq \frac{k-10}{8}\right) = 0,05.$$

z é tal que $A(z) = 0,95$

Pela tabela $z = 1,64$



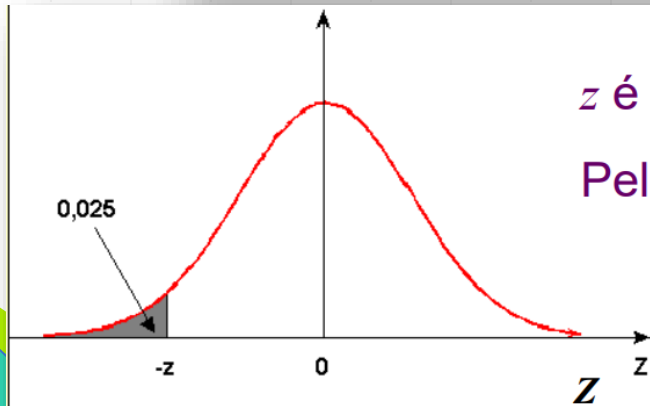
$$\text{Então, } z = \frac{k-10}{8} = 1,64.$$

$$\text{Logo } k = 10 + 1,64 \times 8 = 23,12.$$

Distribuição Normal: Quantis

d) k tal que $P(X \leq k) = 0,025$

$$P(X \leq k) = 0,025 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \leq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-10}{8}\right) = 0,025.$$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

$$\text{Então, } \frac{k-10}{8} = -z = -1,96.$$

$$\text{Logo } k = 10 - 1,96 \times 8 = -5,68.$$

Distribuição Normal: Probabilidades

Observação : Se $X \sim N(\mu ; \sigma^2)$, então

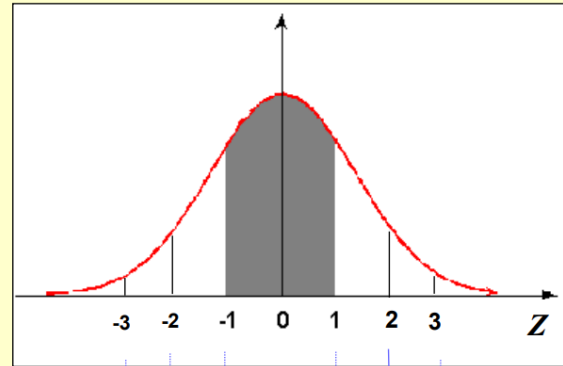
$$(i) P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2 \times (A(1) - 0,5)$$

$$= 2 \times (0,8413 - 0,5)$$

$$= 0,6826$$



ou seja, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,683$.

68%

95,5%

99,7%

$$(ii) P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,955.$$

$$(iii) P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,997.$$

Tabela

Distribuição Normal (uspb.br)

Distribuição Normal: Resumo...

Formulário

- **NORMAL** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(-\infty < \mu < +\infty, 0 < \sigma < +\infty)$

$$f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu; \text{Var}(X) = \sigma^2; M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 3$$

Função geradora de momentos

Propriedades:

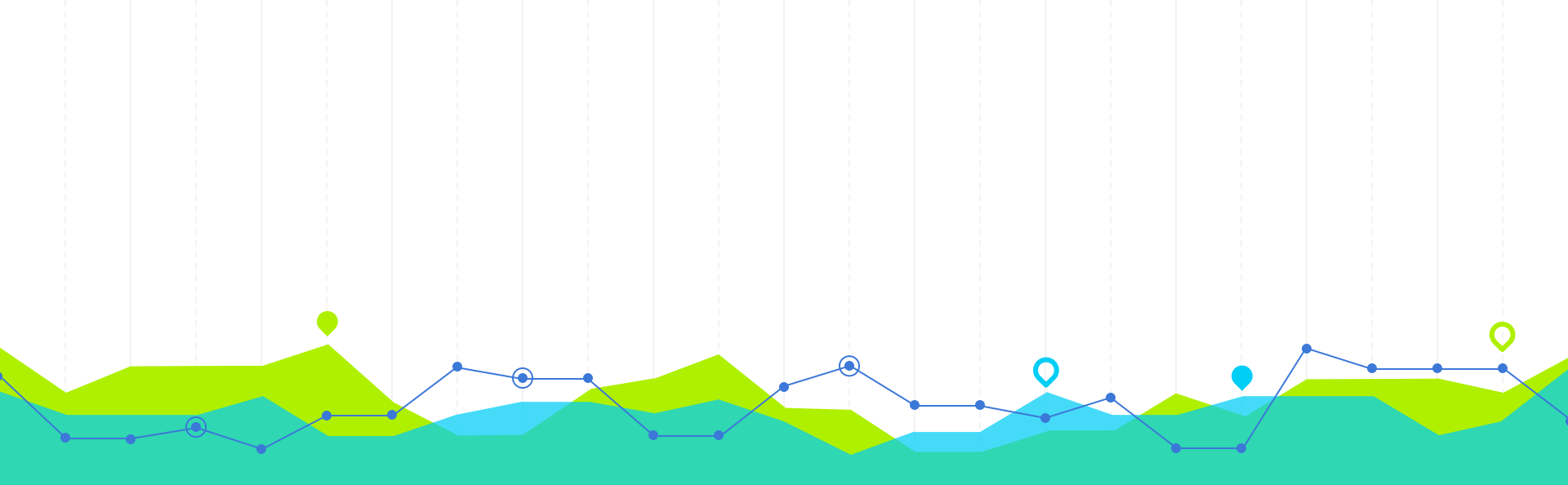
- Normal estandardizada $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$; $\phi(z) = \phi(-z)$ e $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$

- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^k X_i \sim N(k\mu, k\sigma^2)$ e $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$

- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ com $\mu_Y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i$ e $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \sigma_i^2$

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

$$M_X^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = E(X^n)$$



Distribuição Normal: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

8

Exemplo : O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 *min* e desvio padrão 15 *min*.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

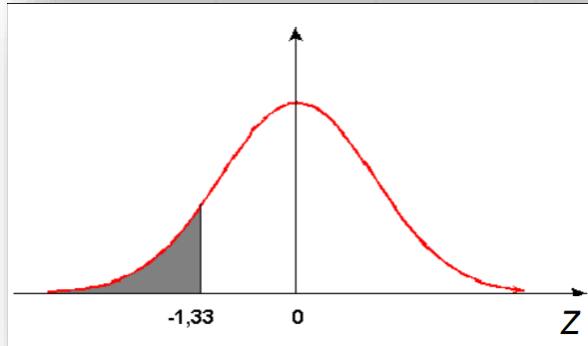
c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?



Exercício 1 (a): Probabilidades

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100 - 120}{15}\right) = P(Z \leq -1,33)$$



$$= 1 - A(1,33)$$

$$= 1 - 0,9082 = 0,0918.$$

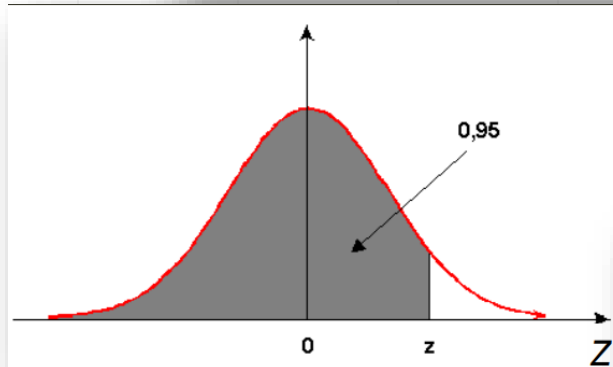
Distribuição Normal (usp.br)

$$\text{Alternativa, } P(Z \leq -1,33) = \Phi(-1,33) = 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$

Exercício 1 (b): Distribuição Normal - Quantis

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq x) = 0,95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-120}{15}\right) = 0,95$$



$z = ?$ tal que $A(z) = 0,95$.

Pela tabela $z = 1,64$.

Distribuição Normal (usp.br)

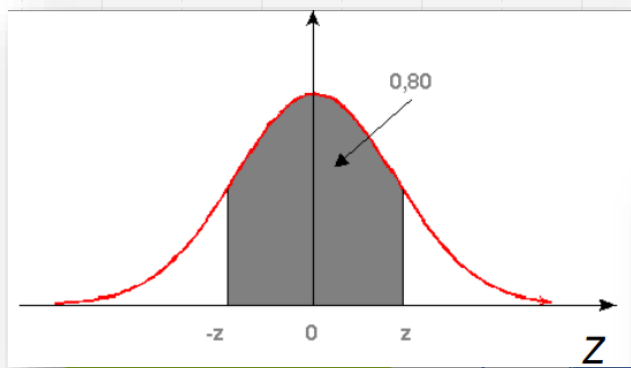
$$\begin{aligned} \text{Então, } z = 1,64 &= \frac{x-120}{15} & \Rightarrow x &= 120 + 1,64 \times 15 \\ & & \Rightarrow x &= 144,6 \text{ min.} \end{aligned}$$

Alternativa, $P(Z \leq (x-120)/15) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi((x-120)/15) = 0,95 \Leftrightarrow (x-120)/15 = \Phi(0,95)^{-1} \Leftrightarrow (x-120)/15 = 1,64 \Leftrightarrow x = 144,6 \text{ minutos}$

Exercício 1 (c): Distribuição Normal - Quantis

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0,80$$



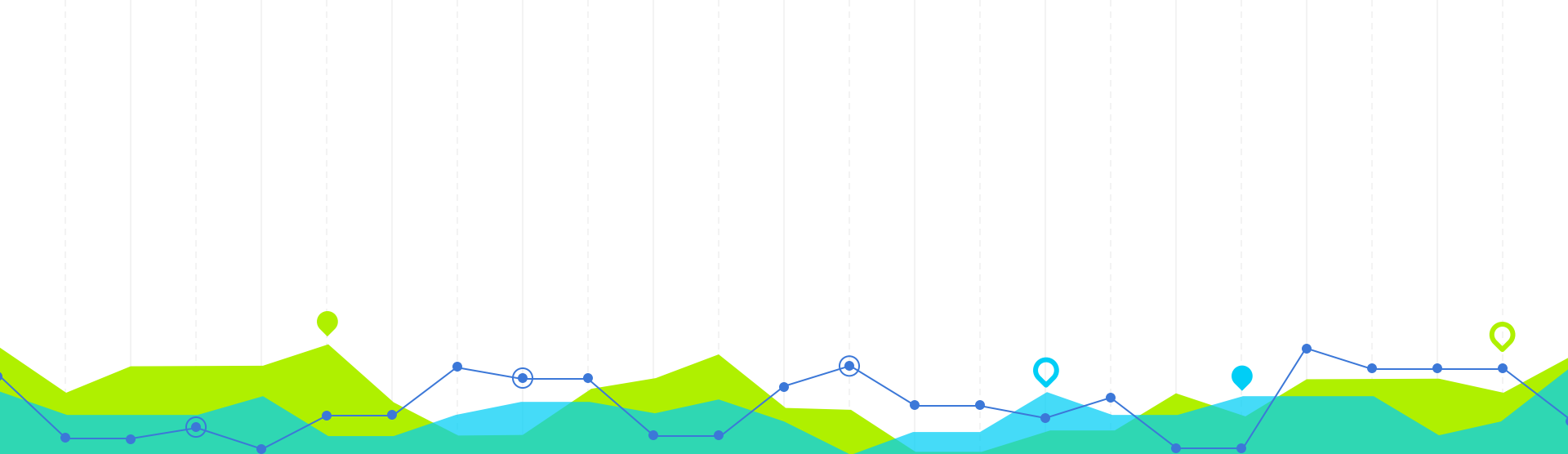
$z = ?$ tal que $A(z) = 0,90$.

Pela tabela, $z = 1,28$.

Distribuição Normal (usp.br)

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1,28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1,28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100,8 \text{ min.}$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1,28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1,28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139,2 \text{ min.}$$



Distribuição Normal: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

9

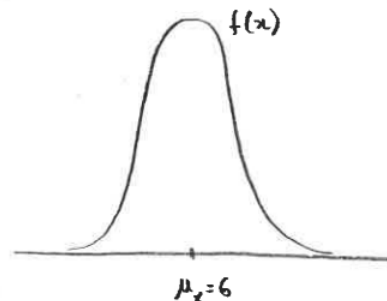
39. Se X tem distribuição normal com média 6 e variância 25, calcule:

- a) $P(6 < X \leq 12)$.
- b) $P(0 \leq X < 8)$.
- c) $P(X < -4)$.
- d) $P(|X - 6| > 10)$.
- e) O valor de k tal que $P(X > k) = 0.90$.



Exercício 39 (a)

$$X \sim N(6, 25) \rightarrow \mu_x = 6, \sigma_x^2 = 25$$



(a)

$$P(6 < X \leq 12) \rightarrow \text{normalcdf}\left(6, 12, \overset{\mu}{\underset{\uparrow}{6}}, \overset{\sigma}{\underset{\uparrow}{5}}\right) \approx 0.38493$$

$$\begin{aligned} P(6 < X \leq 12) &= P\left(\frac{6-6}{\sqrt{25}} < \underbrace{\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{12-6}{\sqrt{25}}\right) = P(0 < Z \leq 1.2) = \underbrace{\Phi(1.2)}_{(F_2)} - \underbrace{\Phi(0)}_{(F_2)} = \\ &= 0.8849 - 0.5 = 0.3849 \end{aligned}$$

Exercício 39 (b)

$$P(0 \leq X < 8) \rightarrow \text{normalcdf}(0, 8, 6, 5) \approx 0.54035$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < 8) &= P\left(\frac{0-6}{\sqrt{25}} \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} < \frac{8-6}{\sqrt{25}}\right) = P(-1.2 \leq Z < 0.4) = \Phi(0.4) - \Phi(-1.2) = \\ &= \Phi(0.4) - [1 - \Phi(1.2)] = 0.6554 - (1 - 0.8849) = 0.5403 \end{aligned}$$

Exercício 39 (c)

$$P(X < -4) \rightarrow \text{normalcdf}(-10^{99}, -4, 6, 5) \approx 0.02275$$

$$P(X < -4) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{-4 - 6}{\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.022$$

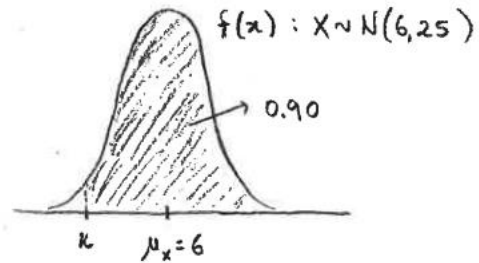
Exercício 39 (d)

$$\begin{aligned} P(|X-6| > 10) &= 1 - P(|X-6| \leq 10) = 1 - P(-10 \leq X-6 \leq 10) = 1 - \underbrace{P(-4 \leq X \leq 16)}_{\text{normalcdf}(-4, 16, 6, 5)} \\ &\approx 1 - 0.9545 = 0.0455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X-6| > 10) &= 1 - P(|X-6| \leq 10) = 1 - P\left(-10 \leq X - \frac{\mu_x}{n} \leq 10\right) = 1 - P\left(\frac{-10}{\sqrt{25}} \leq \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{10}{\sqrt{25}}\right) = \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - \Phi(2) + [1 - \Phi(2)] = \\ &= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) = 2[1 - \Phi(2)] = 2(1 - 0.9772) = \\ &= 2 \times 0.0228 = 0.0456 \end{aligned}$$

Exercício 39 (e)

$$K: P(X > K) = 0.90$$

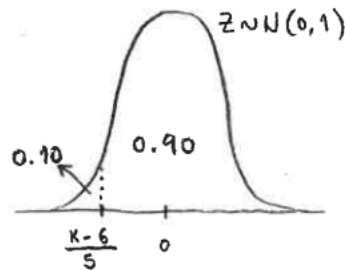


$$P(X > K) = 0.90 \rightarrow \text{invNorm}(0.10, 6, 5) \approx -0.4078$$

→ prob. à esquerda!

Exercício 39 (e)

$$P(X > K) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{K - 6}{5}\right) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{K - 6}{5}\right) = 0.90$$



$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{K - 6}{5}\right) = 0.10 \quad (\text{simétrica}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > -\frac{K - 6}{5}\right) = 0.10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{6 - K}{5}\right) = 0.10$$

$$\text{Pela tabela 5: } \frac{6 - K}{5} = 1.282 \Leftrightarrow 6 - K = 1.282 \times 5 \Leftrightarrow -K = 1.282 \times 5 - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = 6 - 1.282 \times 5 = -0.41$$

43. Considere que o tempo gasto numa visita à feira do livro é uma variável aleatória com distribuição normal, de média igual a duas horas. Suponha que apenas 2.5% dos visitantes permanecem mais de três horas.
- a) Qual o desvio padrão da variável?
 - b) Sabendo que um visitante já chegou há uma hora, qual a probabilidade de se ir embora nos próximos 30 minutos?
 - c) Calcule a mediana e o intervalo interquartil de X , e interprete o seu significado.
 - d) Calcule a probabilidade de em 20 visitantes seleccionados ao acaso haver no máximo um que permaneça mais de três horas.



Exercício 43 (a)

X - v.a. tempo visita, em horas

$$X \sim N(2, \sigma_x^2) \rightarrow \mu_x = 2, \sigma_x^2 = ?$$

Supor que 2.5% dos visitantes permanecem mais de 3 horas : $P(X > 3) = 0.025$

(a)

$$\sigma_x = ?$$

$$P(X > 3) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} > \frac{3 - 2}{\sigma_x}\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma_x}\right) = 0.025$$

$$\text{Pela tabela 5 : } \frac{1}{\sigma_x} = 1.96 \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{1}{1.96} = 1.96^{-1} \approx 0.5102$$

Exercício 43 (b)

$$P(X \leq 1.5 | X \geq 1) = \frac{P(X \leq 1.5 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 1.5)}{P(X \geq 1)}$$

- $P(1 \leq X \leq 1.5) \rightarrow \text{normalcdf}(1, 1.5, 2, 0.5102) \approx 0.1385$

- $P(X \geq 1) \rightarrow \text{normalcdf}(1, 10^{99}, 2, 0.5102) \approx 0.975$

Logo, $P(X \leq 1.5 | X \geq 1) = \frac{0.1385}{0.975} \approx 0.1421$

Exercício 43 (c)

Dado que $X \sim N$ e a distribuição normal é simétrica, tem-se que: $\text{med}(X) = \mu_X = 2$.

Isto significa que metade das visitas demora menos de 2 horas e a outra metade, mais de 2 horas.

Exercício 43 (c)

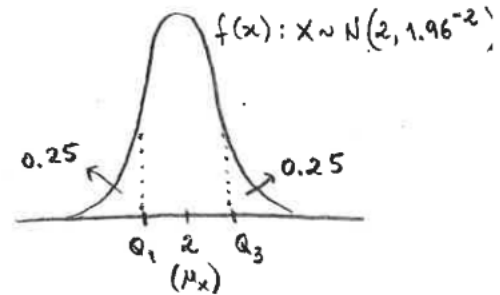
Intervalo interquartil de X : (Q_1, Q_3) ; onde Q_1 é o 1º quartil e Q_3 é o 3º quartil .

Logo, quer-se encontrar Q_1 e Q_3 , tais que :

$$P(X \leq Q_1) = 0.25 \quad \text{e} \quad P(X \leq Q_3) = 0.75$$

1º Quartil

$$P(X \leq Q_1) = 0.25 \rightarrow \text{invNorm}(0.25, 2, 0.5102) \Rightarrow Q_1 \approx 1.656$$



Exercício 43 (c)

3º Quartil

$$P(X \leq Q_3) = 0.75 \rightarrow \text{invNorm}(0.75, 2, 0.5102) \Rightarrow Q_3 \approx 2.344$$

Logo, o intervalo interquartil de X é $(1.656, 2.344)$

Isto significa que 25% das visitas demora menos de 1.656 horas e outros 25% demora mais de 2.344 horas e metade das visitas tem duração entre estes dois valores.

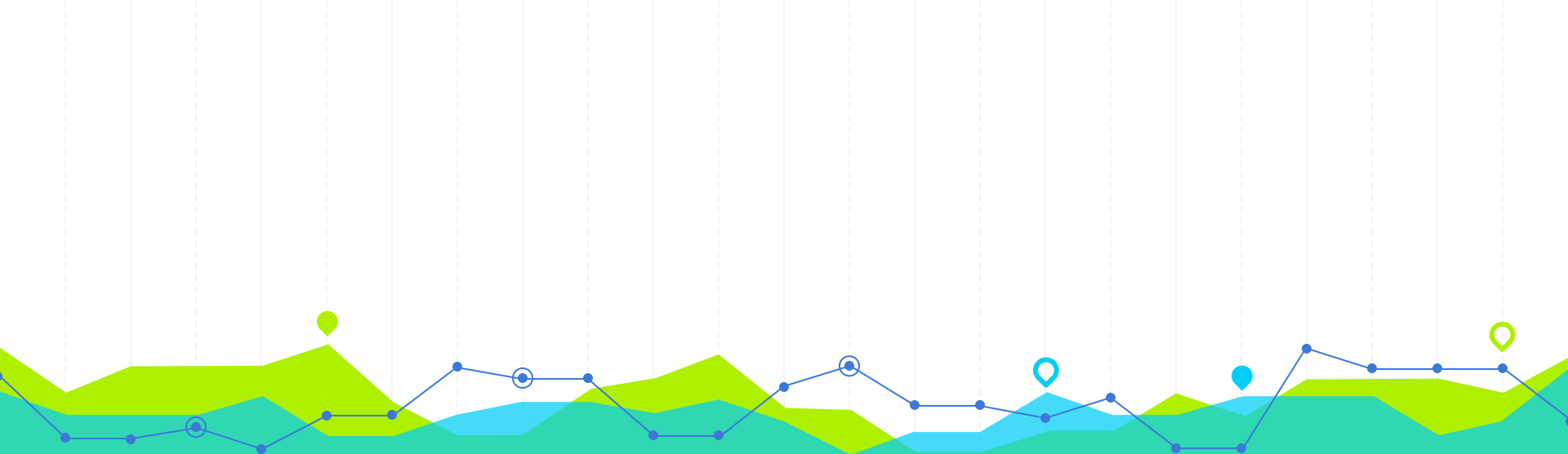
Exercício 43 (d)

Num conjunto de 20 visitas haver, no máximo, 1 com duração superior a 3 horas.

Seja, Y - v.a. n.º visitas com mais de 3 horas, num conjunto de 20

Então, $Y \sim B(20, \theta) \rightarrow \theta = P(X > 3) = 0.025 \Rightarrow Y \sim B(20, 0.025)$

Quer-se : $P(Y \leq 1) \approx 0.912 \rightarrow \text{binomcdf}(20, 0.025, 1)$



Distribuição Exponencial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

10

50. Um banco atende em média dois clientes em cada 3 minutos. Considere que o número de clientes atendidos é um processo de Poisson.
- a) Qual a probabilidade de decorrerem 3 minutos sem qualquer cliente atendido?
 - b) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar mais do que 3 minutos?
 - c) Compare os resultados das duas alíneas anteriores.
 - d) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar entre 3 e 6 minutos?



Exercício 50 (a)

X - v.a. n.º clientes atendidos por cada 3 minutos

$X \sim Po(2) \rightarrow \lambda = E(X) = \text{média de clientes atendidos por cada 3 minutos}$

(a)

$$P(X=0) \approx 0.1353 \rightarrow \text{poissonpdf}(2,0) ; P(X=0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} \approx 0.1353$$

Exercício 50 (b)

Analisa-se agora o tempo de atendimento por cliente, que corresponde à distribuição exponencial. Seja

Y - v.a. tempo atendimento por cliente, em minutos $\Rightarrow Y \sim \text{Ex}(\lambda)$

Determinar λ da exponencial

Na exponencial: $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$.

Como $E(Y)$ é o tempo médio/cliente, tem-se que: $E(Y) = \frac{3}{2}$.
(minutos)

$$\text{Logo, } \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Assim, $Y \sim \text{Ex}(\frac{2}{3}) \Rightarrow f(y) = \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y} \quad (y > 0)$

$$\begin{aligned} \text{Então: } P(Y > 3) &= \int_3^{+\infty} f(y) dy = \int_3^{+\infty} \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y} dy = \left[-e^{-\frac{2}{3}y} \right]_3^{+\infty} = -e^{-\infty} - (-e^{-2}) = \\ &= e^{-2} \approx 0.1353 \end{aligned}$$

Exercício 50 (c)

As probabilidades calculadas em (a) e (b) são iguais.

Faz sentido, pois se o tempo de atendimento de um cliente for superior a 3 minutos (b) então nenhum cliente é atendido em 3 minutos (a).

Exercício 50 (d)

$$P(3 \leq Y \leq 6) = \int_3^6 \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y} dy = \left[-e^{-\frac{2}{3}y} \right]_3^6 = -e^{-4} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$$

Obrigada!

Questões?

