Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 19 e 20 (Semana 10)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt


https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao


https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	**Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

5. Variáveis aleatórias especiais

5.1. Variáveis aleatórias discretas

5.1.1. A distribuição uniforme discreta

5.1.2. A variável aleatória de Bernoulli

5.1.3. A variável aleatória binomial

5.1.4. A variável aleatória de Poisson

5.2. Variáveis aleatórias contínuas

5.2.1. A variável aleatória uniforme contínua

5.2.2. A variável aleatória normal

5.2.3. A variável aleatória exponencial

5.2.4. As variáveis aleatórias gama e chi-quadrado

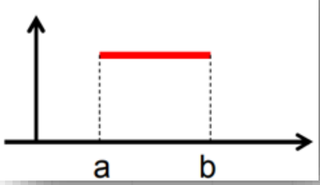
5.3. O Teorema Limite Central

Distribuição Uniforme Contínua

Variáveis Aleatórias Contínuas

1

Distribuição Uniforme



Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros a e b, a < b, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ U(a,b)

Formulário

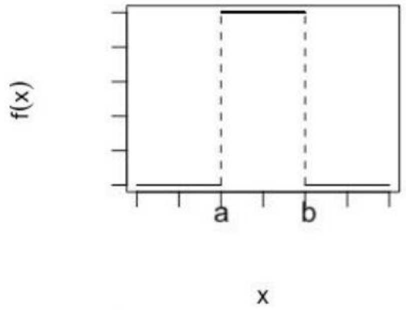
- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha} \quad \alpha < x < \beta \quad ; \quad E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}; \; \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}; \; M_X(s) = \frac{e^{s\beta}-e^{s\alpha}}{s(\beta-\alpha)}, \quad s \neq 0$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Uniforme** pode ser escrita destas duas formas.

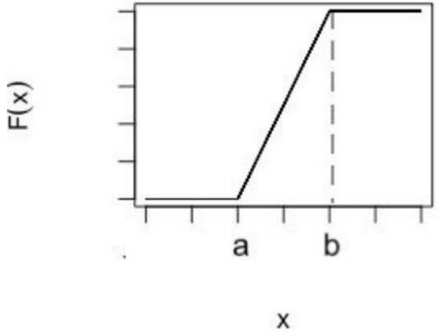
Distribuição Uniforme

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$

Distribuição Uniforme

Uniforme (0, 1)

O caso $\alpha = 0$, $\beta = 1$, isto é, $X \sim U(0,1)$, é o de **maior interesse**

$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$
$E(X^k) = \dfrac{1}{(k+1)}$ logo $E(X) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{12}$, $\gamma_1 = 0$	

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Uniforme

- **Teorema 5.4 – Transformação uniformizante – resultado particularmente importante em problemas de simulação.**

  Este resultado mostra que, em certas condições, $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ e inversamente que se $Y \sim U(0,1)$ então $X = F_X^{-1}(Y) \sim F_X(x)$

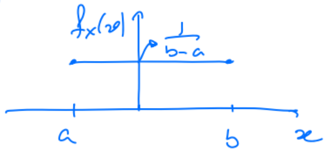
https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Uniforme: Resumindo...

i) $X \sim$ Uniforme(a,b) [lê-se: X tem distribuição uniforme no intervalo (a,b)]

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a \le x \le b$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



$\left(\int_a^b \frac{1}{b-a}\, dx = 1 \Rightarrow \text{a função está bem definida} \right)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dy = \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1.0 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$Var(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição Uniforme Contínua: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

34. A duração de pequenos anúncios (entre 5 e 12 segundos) numa cadeia de televisão pode considerar-se uma variável aleatória com distribuição uniforme.

a) Indique a função de distribuição.
b) Qual a probabilidade de um pequeno anúncio ter duração superior a 7 segundos.
c) Calcule e interprete: $P(X > 6 \mid X \leq 10)$.
d) Calcule a média e o desvio padrão da duração dos pequenos anúncios.

Exercício 34 (a)

X - v.a. duração anúncios (entre 5 e 12 segundos)

$X \sim U(5, 12)$

(a)

$X \sim U(5,12) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12-5} = \frac{1}{7} \quad (5 < x < 12)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{5}^{x} \frac{1}{7}\,du = \left[\frac{u}{7}\right]_{5}^{x} = \frac{x}{7} - \frac{5}{7} = \frac{x-5}{7}$$

Assim,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 5) \\ \frac{x-5}{7} & (5 \leq x < 12) \\ 1 & (x \geq 12) \end{cases}$$

Exercício 34 (b)

$$P(X > 7) = \int_7^{12} f(x)\,dx = 1 - F_X(7) = 1 - \frac{7-5}{7} = \frac{5}{7} \approx 0.7143$$

Exercício 34 (c)

$$P(X > 6 \mid X \leq 10) = \frac{P(X>6 \cap X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{P(6 < X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{F_X(10) - F_X(6)}{F_X(10)} =$$

$$= \frac{5/7 - 1/7}{5/7} = \frac{4}{5} = 0.8$$

- Sabendo que um anúncio não dura mais de 10 segundos, a probabilidade de durar mais de 6 segundos é de 0.8

- 80% dos anúncios com duração não superior a 10 segundos, duram mais de 6 segundos.

Exercício 34 (d)

$X \sim U(\alpha, \beta)$, onde $\alpha = 5$ e $\beta = 12$. Então:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5 + 12}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} = \frac{(12 - 5)^2}{12} = \frac{49}{12} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{49/12} \approx 2.0207$$

3

Distribuição Normal

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Normal ou Gaussiana

A v. a. X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Formulário

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

Pode ser mostrado que:

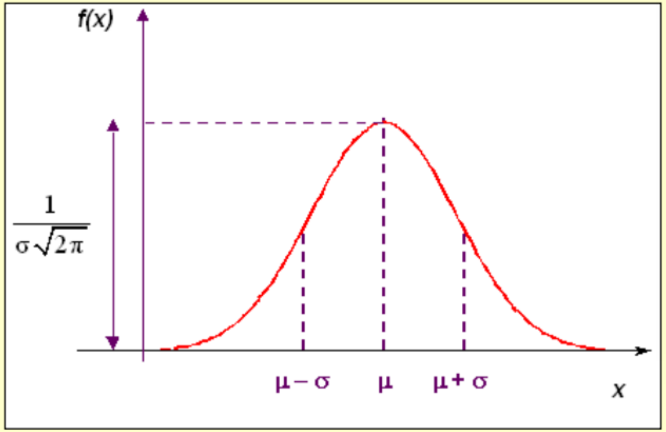
1. μ é o valor esperado (média) de X, com $-\infty < \mu < \infty$;
2. σ^2 é a variância de X, com $\sigma^2 > 0$.

Distribuição Normal (usp.br)

Notação : $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$

Distribuição Normal: Propriedades

Propriedades de $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$

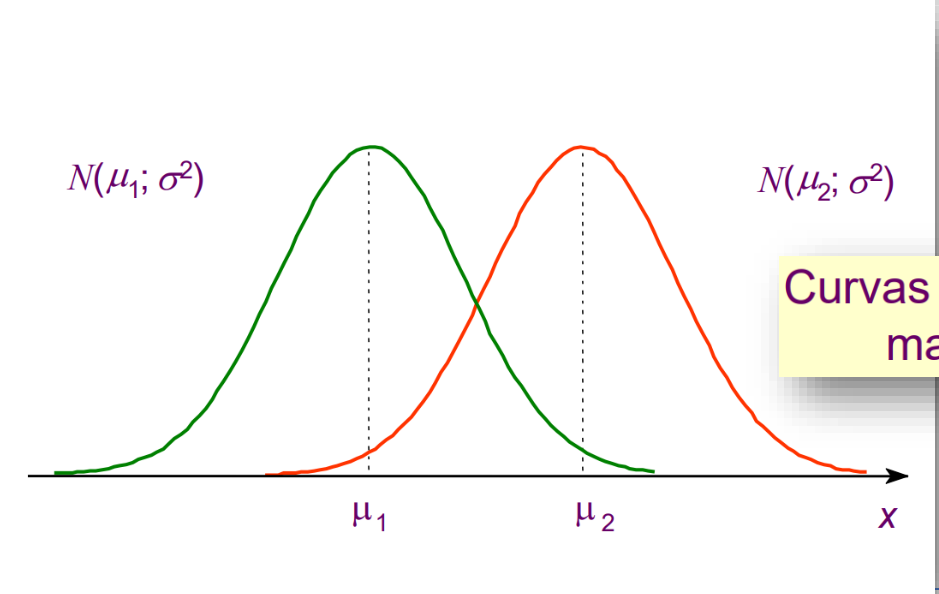


- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ.

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Valor Médio

A distribuição Normal depende dos parâmetros μ e σ^2

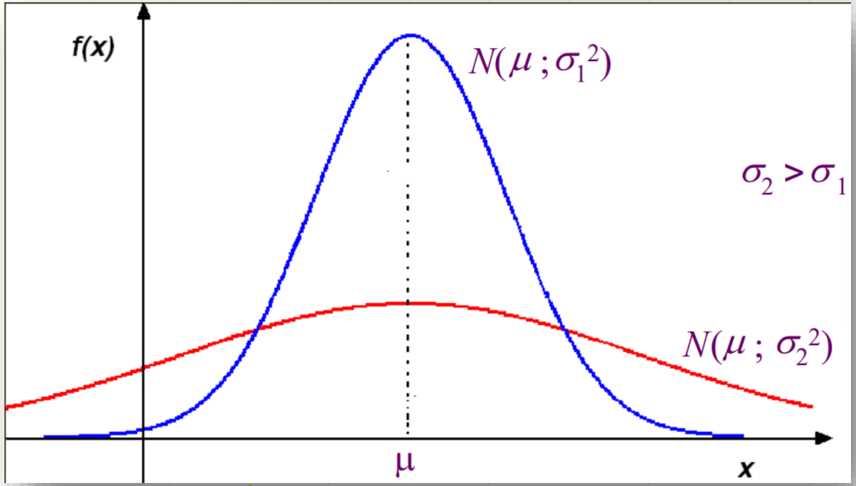


Curvas Normais com mesma variância σ^2 mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Variância

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ mas com variâncias diferentes ($\sigma_2 > \sigma_1$).

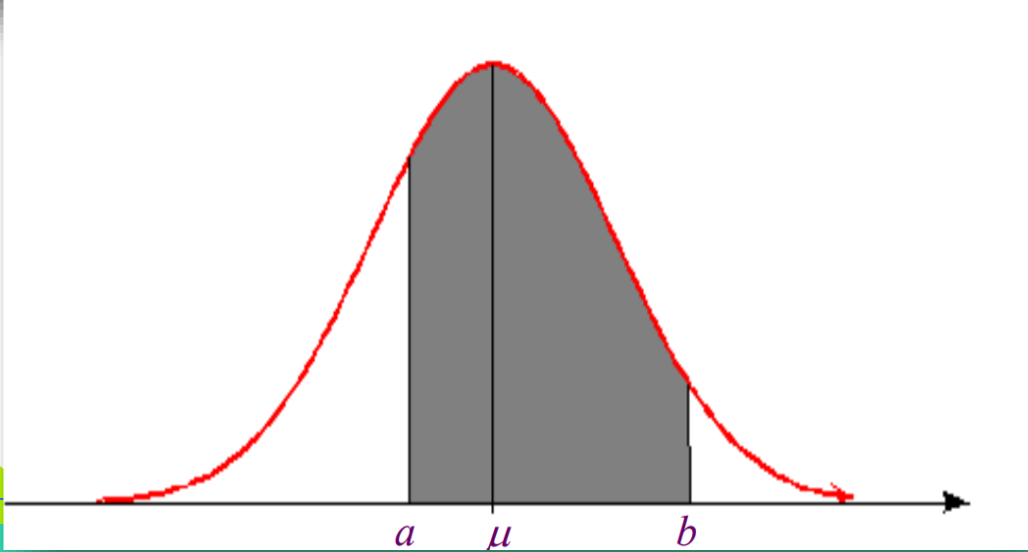
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Cálculo de Probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$\Downarrow$$

Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b.



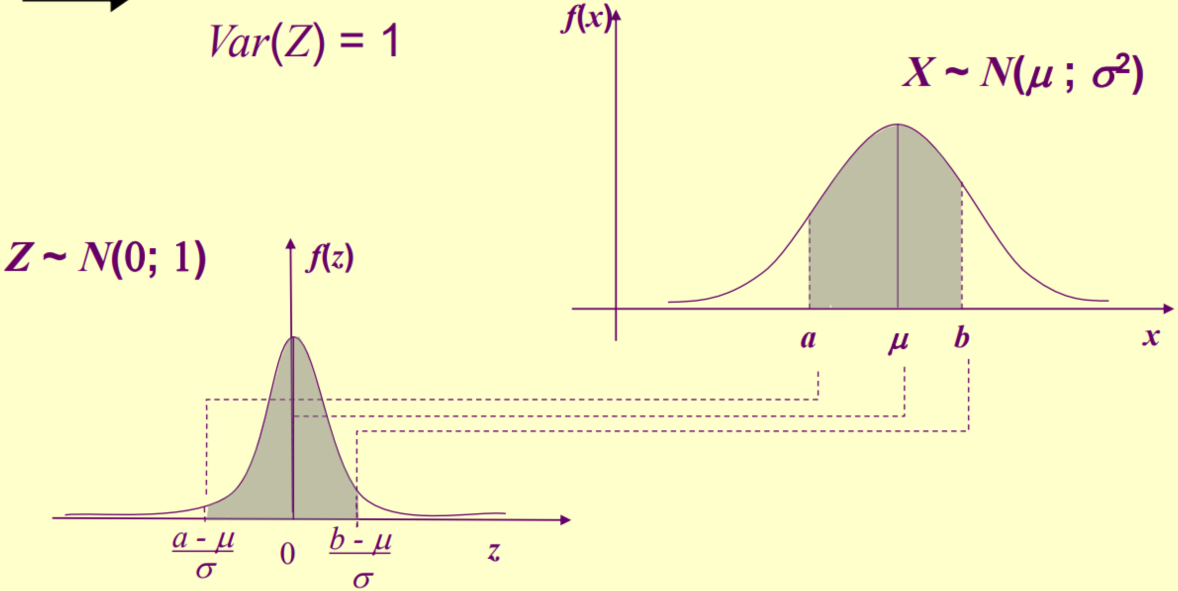
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

Se $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$



Distribuição Normal (usp.br)

Não é possível apresentar a imagem.

Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se ***normal padrão*** ou ***reduzida***.

Portanto,

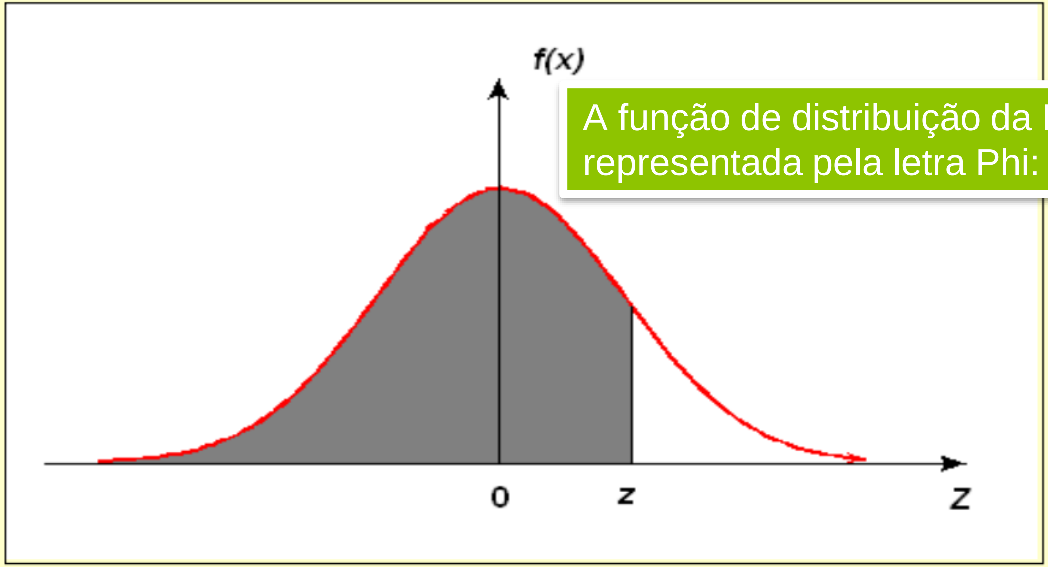
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$ através da transformação inversa

$$\boldsymbol{X = \mu + Z \times \sigma.}$$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades



A função de distribuição da Normal Padrão é representada pela letra Phi: $P(Z \leq z) = F(z) = \Phi(z)$

Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$, para $z \geq 0$.

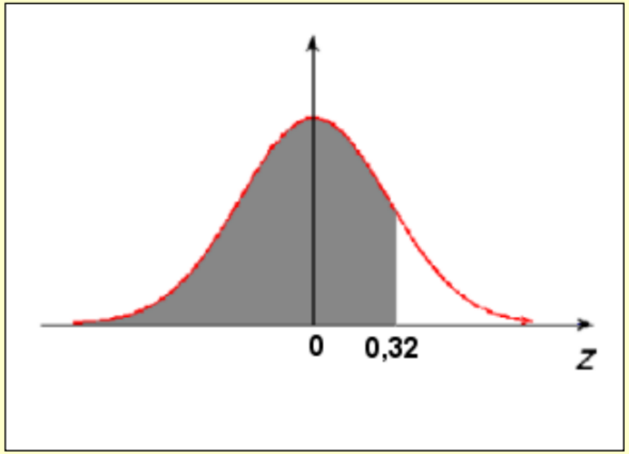
Distribuição Normal (usp.br)

Não é possível apresentar a imagem.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

Exemplo: Seja $Z \sim N(0;\ 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$



Distribuição Normal (usp.br)

$$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$$

Distribuição Normal Padrão: Tabela

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

$P(Z \leq 0,32) = 0,6255$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$

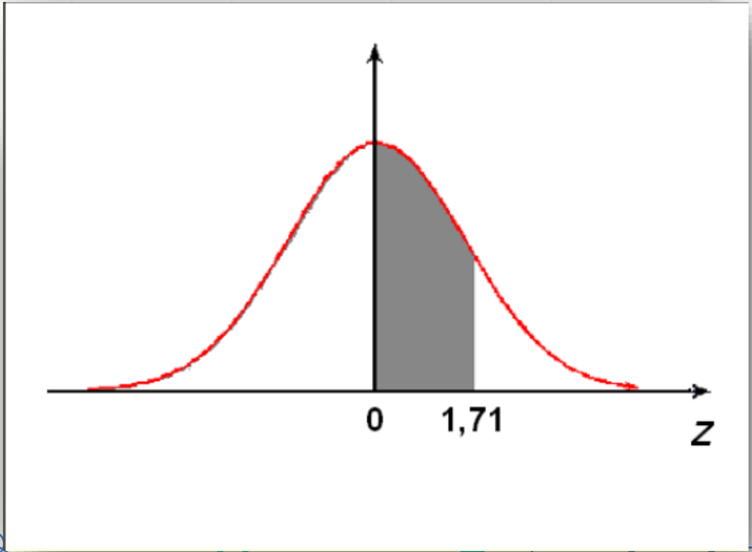
$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}71) - A(0)$

$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$

Obs.: $A(0)=P(Z < 0)=P(Z > 0)=0{,}5.$

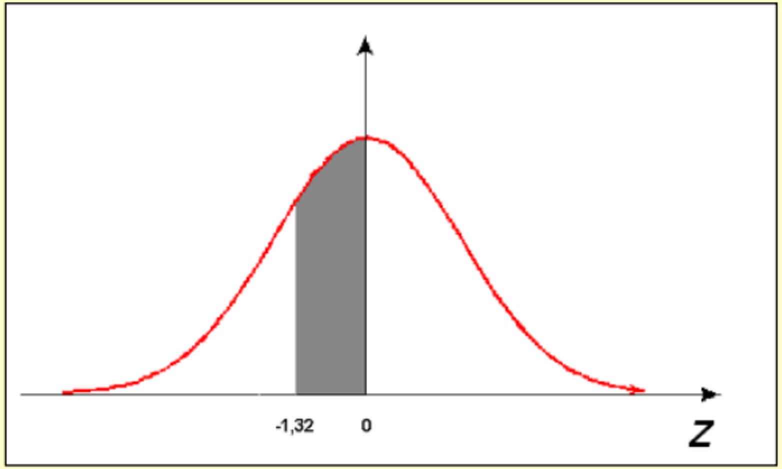
P(-a < Z < a) = Φ(a) – Φ(-a)
P(Z < -a) = Φ(-a) = 1-Φ(a)
sendo "a" uma constante positiva e Φ (Phi) a fd da Distribuição Normal Padrão



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

c) $P(-1{,}32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}32)$



$= P(Z \leq 1{,}32) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}32) - 0{,}5$

$= 0{,}9066 - 0{,}5 = 0{,}4066.$

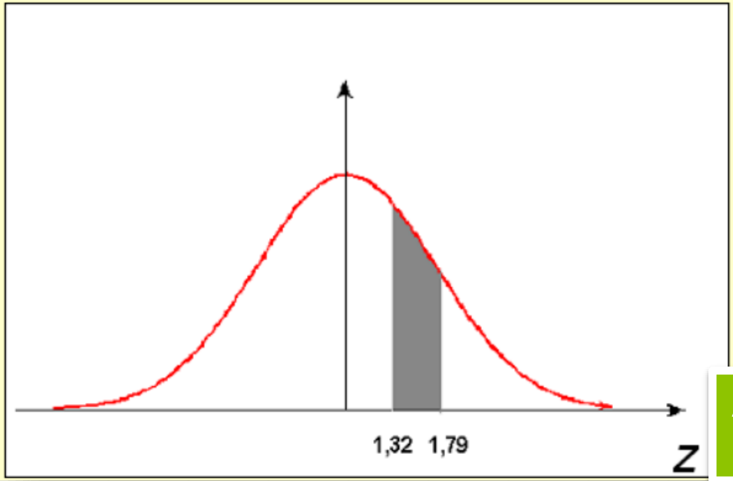
Tabela

Alternativa, P(-1,32 < Z < 0) = $\Phi(0) - \Phi(-1{,}32) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1{,}32)] = 0{,}5 - 1 + 0{,}9066 = 0{,}4066$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

d) $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79)$



$= P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32)$

$= A(1{,}79) - A(1{,}32)$

$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567.$

Alternativa, $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = \Phi(1{,}79) - \Phi(1{,}32)$
$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567$

[Distribuição Normal (usp.br)]

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

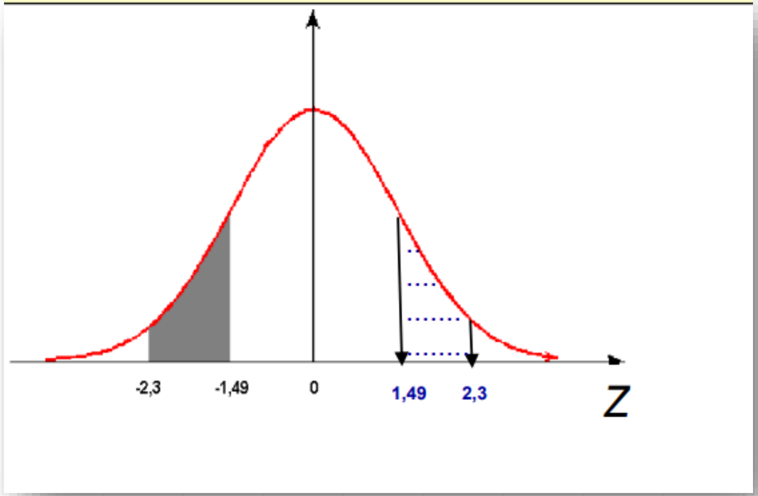
e) $P(-2{,}3 < Z \leq -1{,}49)$

$= P(1{,}49 \leq Z < 2{,}3)$

$= A(2{,}3) - A(1{,}49)$

$= 0{,}9893 - 0{,}9319$

$= 0{,}0574.$



Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, P(-2,3 < Z ≤ -1,49) = $\Phi(-1{,}49) - \Phi(-2{,}3)$ = $[1 - \Phi(1{,}49)] - [1 - \Phi(2{,}3)] = 0{,}0574$

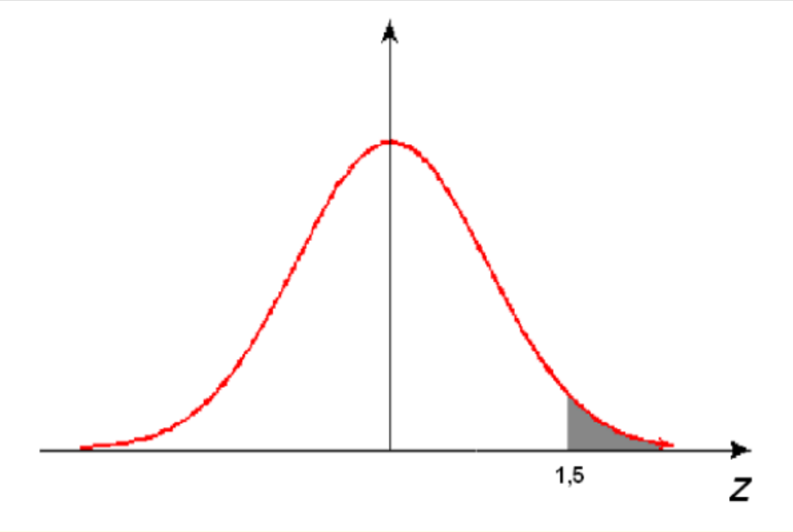
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

f) $P(Z \geq 1{,}5)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - A(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$



Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, $P(Z \geq 1{,}5) = 1\text{-}\Phi(1{,}5) = 0{,}0668$

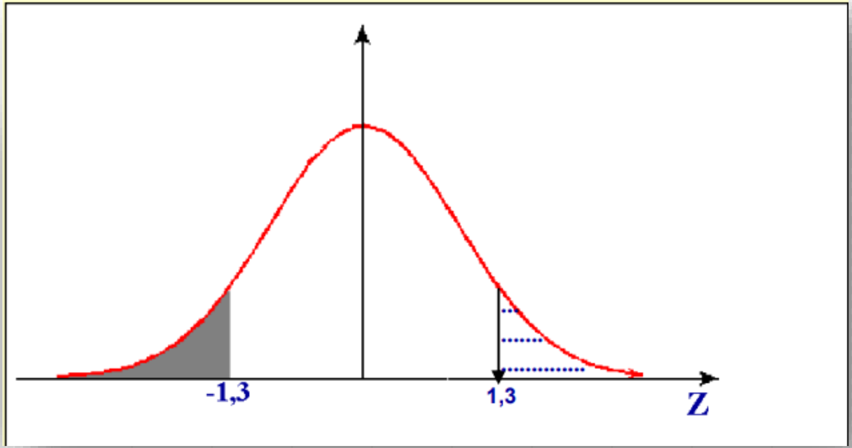
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

g) $P(Z \leq -1,3)$

$= P(Z \geq 1,3) = 1 - P(Z \leq 1,3)$

$= 1 - A(1,3)$

$= 1 - 0,9032 = 0,0968.$



Distribuição Normal (usp.br)

Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1,3) = P(Z \geq 1,3)$.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

h) $P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5)$

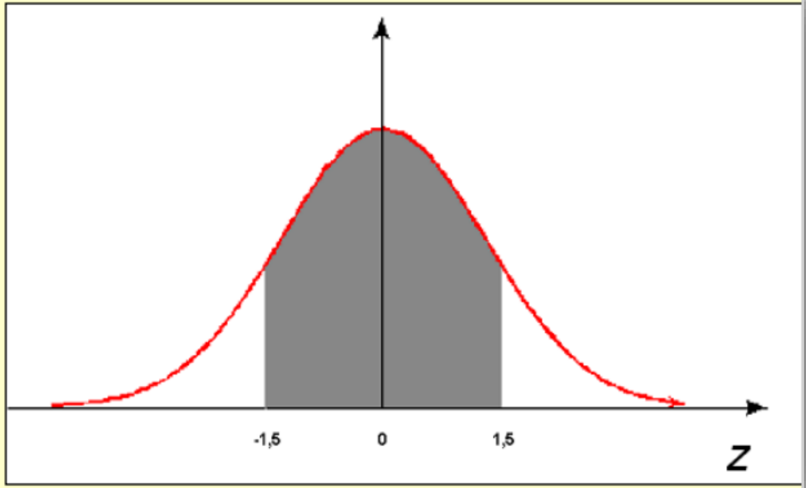
$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}5)$

$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \geq 1{,}5)$

$= P(Z \leq 1{,}5)$ - $[1-P(Z \leq 1{,}5)]$

$= 2 \times P(Z \leq 1{,}5) - 1 = 2 \times A(1{,}5) - 1$

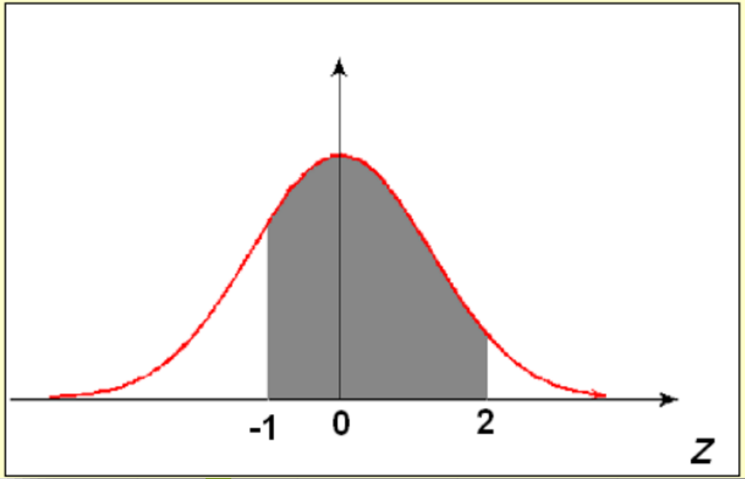
$= 2 \times 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664.$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

i) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

$= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1))$

$= 0{,}9773 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}9773 - 0{,}1587 = 0{,}8186.$

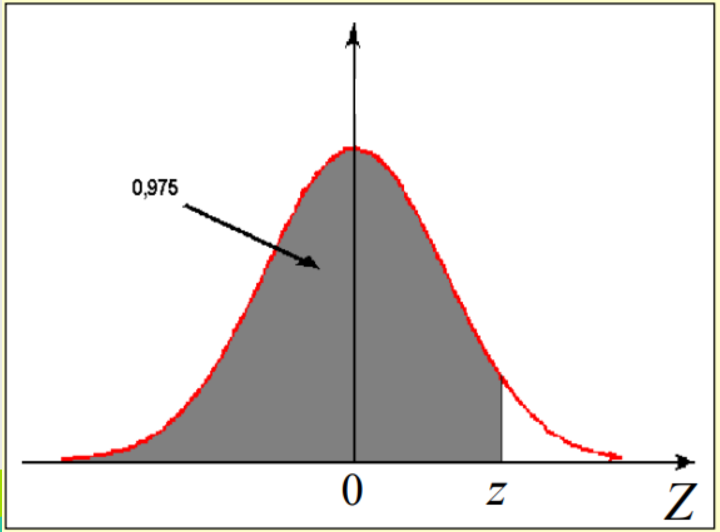
Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0{,}975$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

Alternativa, $P(Z \leq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975$
$\Leftrightarrow z = \Phi(0{,}975)^{-1} = 1{,}96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Tabela

Quantis

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.3	.9032	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.4	.9192	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

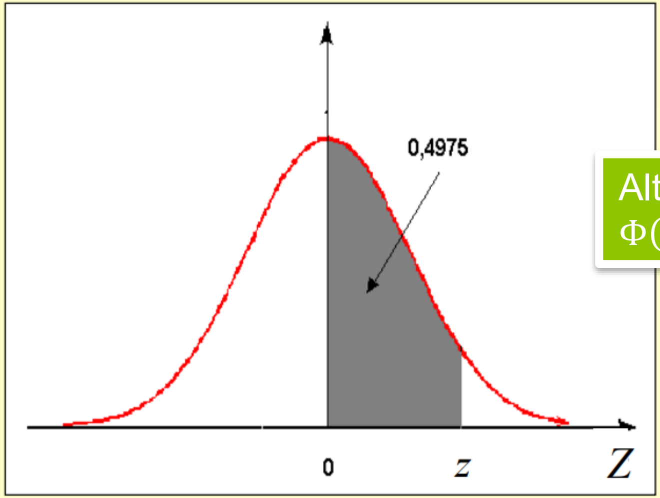
$P(Z \leq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}975)^{-1} = 1{,}96$

Probabilidades

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(ii) $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975$



z é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$.

Pela tabela $z = 2{,}81$. Tabela

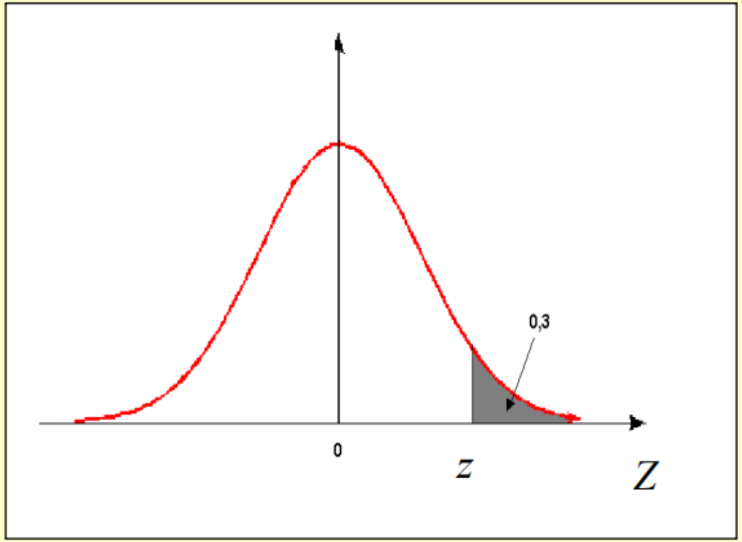
Alternativa, $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(0) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}4975 + 0{,}5 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9975)^{-1} = 2{,}81$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iii) $P(Z \geq z) = 0,3$



z é tal que $A(z) = 0,7$.

Pela tabela, $z = 0,53$.

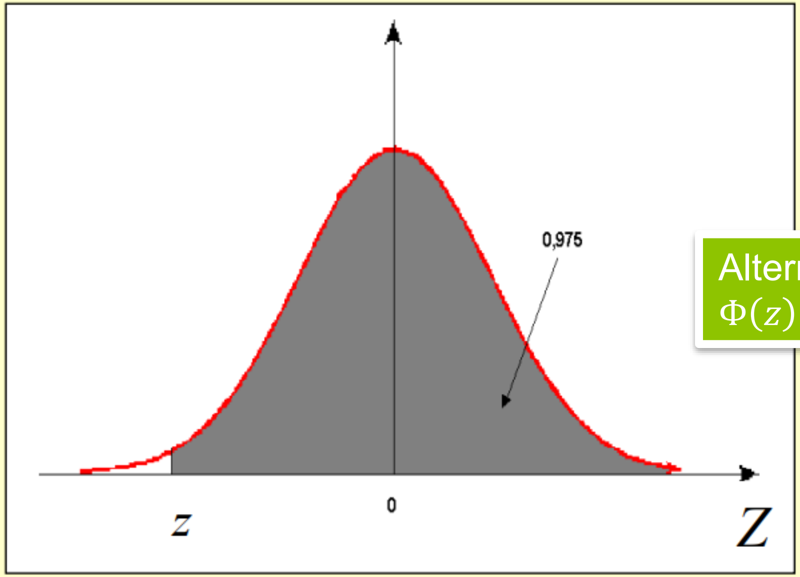
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,7 \Leftrightarrow z = \Phi(0,7)^{-1} = 0,53$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iv) $P(Z \geq z) = 0{,}975$



a é tal que $A(a) = 0{,}975$ e $z = -a$.

Pela tabela $a = 1{,}96$.

Então, $z = -1{,}96$.

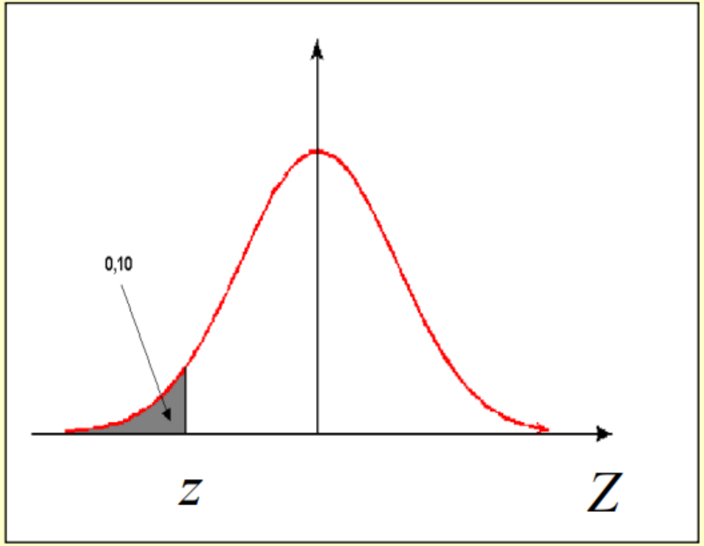
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}025 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}025)^{-1} = -\Phi(0{,}975)^{-1} = -1{,}96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(v) $P(Z \leq z) = 0,10$



a é tal que $A(a)$=0,90 e $z = -a$.

Pela tabela, a = 1,28

e, assim, $z = -1,28$.

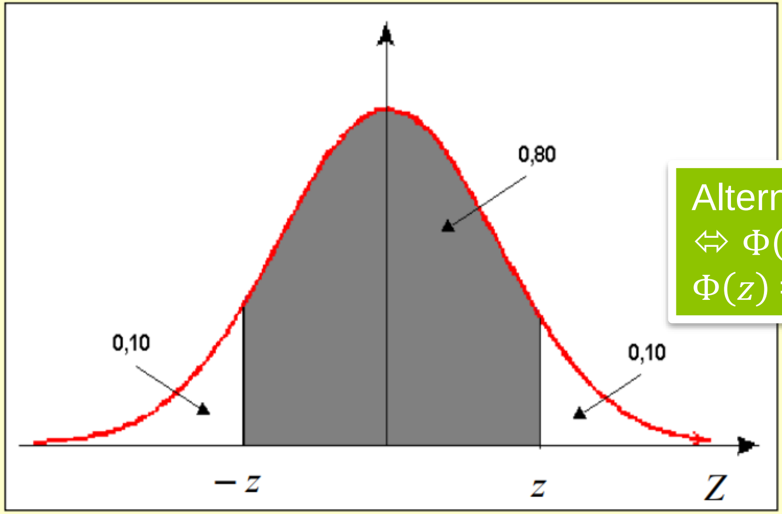
Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,10 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,10 \Leftrightarrow z = \Phi(0,1)^{-1} = -\Phi(0,9)^{-1} = -1,28$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(vi) $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80$



z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0{,}1$.

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0{,}90$

$\Rightarrow z = 1{,}28$ (pela tabela).

Tabela

Alternativa, $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 0{,}80 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}9 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9)^{-1} = 1{,}28$

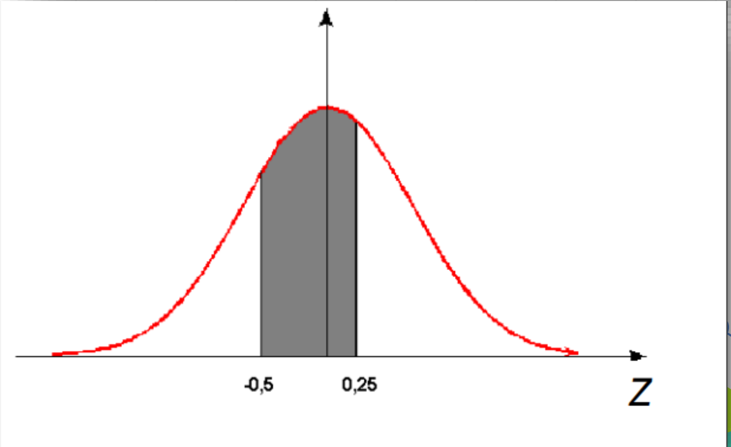
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Exemplo: Seja $X \sim N(10\ ;\ 64)$ ($\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$)

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$

$$= P\left(\frac{6-10}{8} < \frac{X-10}{8} < \frac{12-10}{8}\right) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}25)$$



$= A(0{,}25) - (1 - A(0{,}5))$

$= 0{,}5987 - (1 - 0{,}6915)$

$= 0{,}5987 - 0{,}3085 = 0{,}2902$

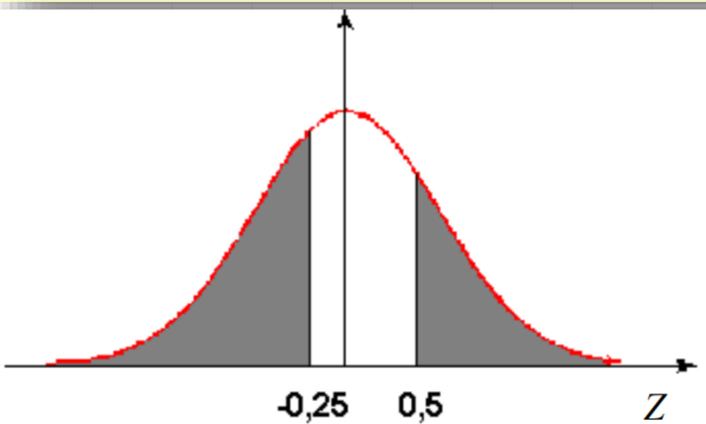
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

(b) $P(X \leq 8 \text{ ou } X > 14)$

$$P(X \leq 8) + P(X > 14) = P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right)$$

$$= P(Z < -0{,}25) + P(Z > 0{,}5)$$



$= 1 - A(0{,}25) + 1 - A(0{,}5)$

$= 1 - 0{,}5987 + 1 - 0{,}6915$

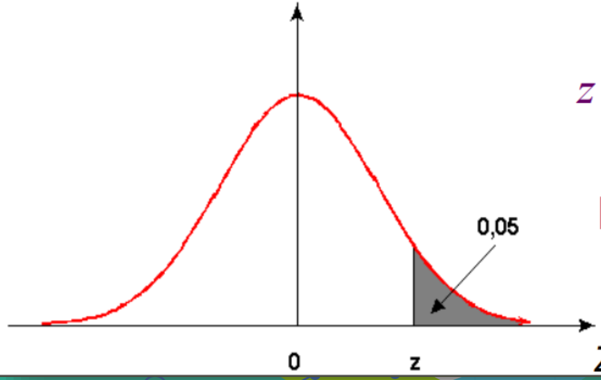
$= 0{,}7098$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Quantis

c) k tal que $P(X \geq k) = 0{,}05$

$$P(X \geq k) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \geq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \geq \overbrace{\frac{k-10}{8}}^{z}\right) = 0{,}05.$$



z é tal que $A(z) = 0{,}95$

Pela tabela $z = 1{,}64$

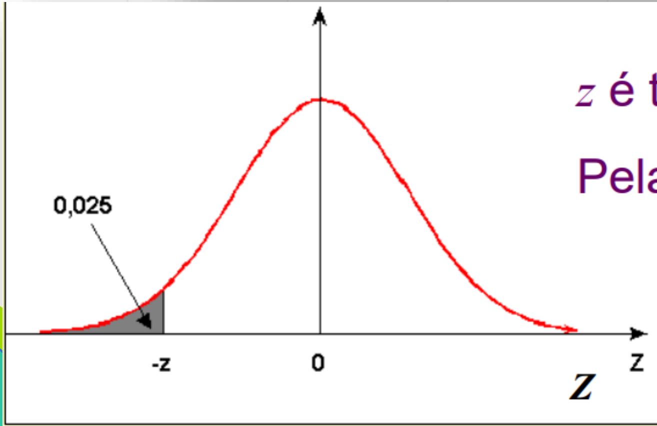
Então, $z = \dfrac{k-10}{8} = 1{,}64.$

Logo $k = 10 + 1{,}64 \times 8 = 23{,}12.$

Distribuição Normal: Quantis

d) k tal que $P(X \leq k) = 0{,}025$

$$P(X \leq k) = 0{,}025 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \leq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-10}{8}\right) = 0{,}025.$$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

Então, $\dfrac{k-10}{8} = -z = -1{,}96.$

Logo $k = 10 - 1{,}96 \times 8 = -5{,}68$.

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Observação : Se $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$, então

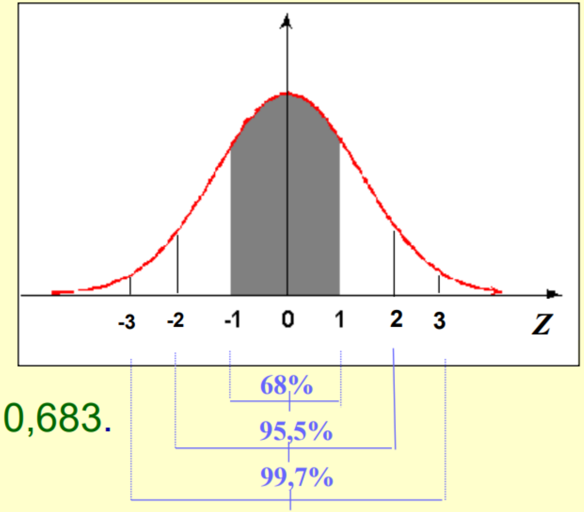
$$(\text{i})P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$= P(-1 \le Z \le 1)$

$= 2\times(A(1) - 0{,}5)$

$= 2\times(0{,}8413 – 0{,}5)$

$= 0{,}6826$



ou seja, $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) =$ 0,683.

(ii) $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) =$ 0,955.

(iii) $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) =$ 0,997.

Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Resumo…

Formulário

- **NORMAL** $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $(-\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty)$

$$f(x \mid \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu\,;\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,;\ M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}\,;\ \gamma_1 = 0\,;\ \gamma_2 = 3$$

Função geradora de momentos

$M_X(t) = E(e^{tX})$,

$M_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = E(X^n)$

Propriedades:

- Normal estandardizada $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$; $\phi(z) = \phi(-z)$ e $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) independentes $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(k\mu, k\sigma^2\right)$ e $\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$
- $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ com $\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i$ e $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \sigma_i^2$

Distribuição Normal: Exercícios

4

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplo : O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

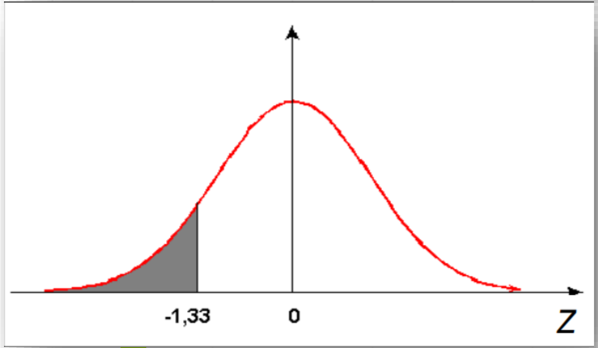
b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

Exercício 1 (a): Probabilidades

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \le 100) = P\left(Z \le \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \le -1{,}33)$$



$= 1 - A(1{,}33)$

$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918.$

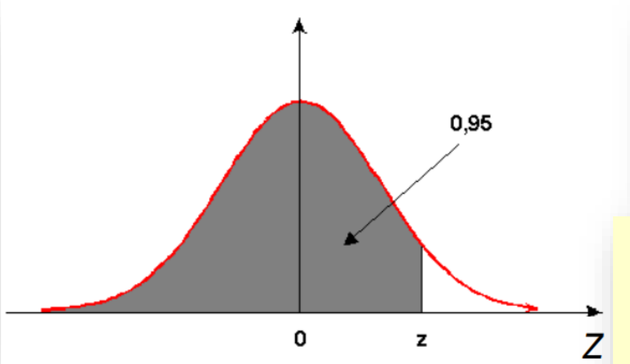
Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, P(Z ≤ -1,33) = $\Phi(-1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Exercício 1 (b): Distribuição Normal - Quantis

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \le x) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{x-120}{15}\right) = 0{,}95$$



$z = ?$ tal que $A(z) = 0{,}95$.

Pela tabela $z = 1{,}64$.

Distribuição Normal (usp.br)

Então, $z = 1{,}64 = \dfrac{x-120}{15} \Rightarrow x = 120 + 1{,}64 \times 15$

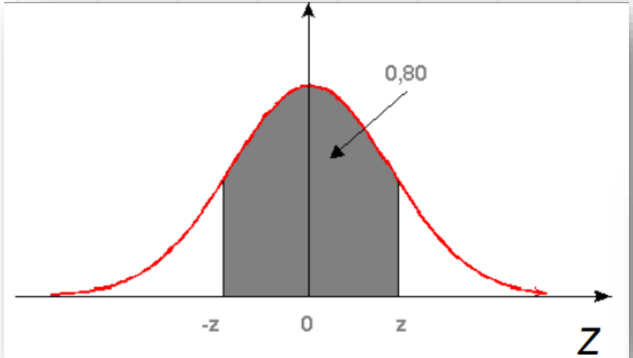
$\Rightarrow x = 144{,}6\ min.$

Alternativa, $P(Z \le (x-120)/15) = 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi((x-120)/15) = 0{,}95 \Leftrightarrow (x-120)/15 = \Phi(0{,}95)^{-1} \Leftrightarrow (x-120)/15 = 1{,}64 \Leftrightarrow x = 144{,}6$ minutos

Exercício 1 (c): Distribuição Normal - Quantis

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120,\ 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$



z = ? tal que $A(z)$ = 0,90.

Pela tabela, z = 1,28.

Distribuição Normal (usp.br)

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8\ min.$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2\ min.$$

5

Distribuição Normal: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

39. Se X tem distribuição normal com média 6 e variância 25, calcule:

a) $P(6 < X \leq 12)$.

b) $P(0 \leq X < 8)$.

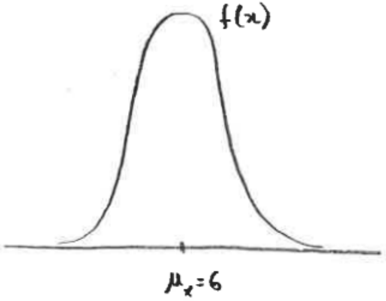
c) $P(X < -4)$.

d) $P(|X - 6| > 10)$.

e) O valor de k tal que $P(X > k) = 0.90$.

Exercício 39 (a)

$X \sim N(6, 25) \rightarrow \mu_x = 6 \ , \ \sigma_x^2 = 25$



(a)

$P(6 < X \leq 12) \rightarrow \text{normalcdf}(6, 12, \overset{\overset{\mu}{\uparrow}}{6}, \overset{\overset{\sigma}{\uparrow}}{5}) \approx 0.38493$

$$P(6 < X \leq 12) = P\left(\frac{6-6}{\sqrt{25}} < \underbrace{\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{12-6}{\sqrt{25}}\right) = P(0 < Z \leq 1.2) = \underset{(F_Z)}{\Phi(1.2)} - \underset{(F_Z)}{\Phi(0)} =$$

$$= 0.8849 - 0.5 = 0.3849$$

Exercício 39 (b)

$$P(0 \leq X < 8) \rightarrow \text{normalcdf}(0, 8, 6, 5) \approx 0.54035$$

$$P(0 \leq X < 8) = P\left(\frac{0-6}{\sqrt{25}} \leq \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} < \frac{8-6}{\sqrt{25}}\right) = P(-1.2 \leq Z < 0.4) = \Phi(0.4) - \Phi(-1.2) =$$

$$= \Phi(0.4) - [1 - \Phi(1.2)] = 0.6554 - (1 - 0.8849) = 0.5403$$

Exercício 39 (c)

$$P(X < -4) \rightarrow \text{normalcdf}(-10^{99}, -4, 6, 5) \approx 0.02275$$

$$P(X < -4) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{-4-6}{\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.022$$

Exercício 39 (d)

$$P(|X-6|>10) = 1-P(|X-6|\leq 10) = 1-P(-10\leq X-6\leq 10) = 1-\underbrace{P(-4\leq X\leq 16)}_{\text{normalcdf}(-4,16,6,5)} \approx$$

$$\approx 1-0.9545 = 0.0455$$

$$P(|X-6|>10) = 1-P(|X-6|\leq 10) = 1-P(-10\leq X-\overset{\mu_X}{\overset{\uparrow}{6}}\leq 10) = 1-P\left(\frac{-10}{\sqrt{25}}\leq \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\leq \frac{10}{\sqrt{25}}\right) =$$

$$= 1-P(-2\leq Z\leq 2) = 1-[\Phi(2)-\Phi(-2)] = 1-\Phi(2)+[1-\Phi(2)] =$$

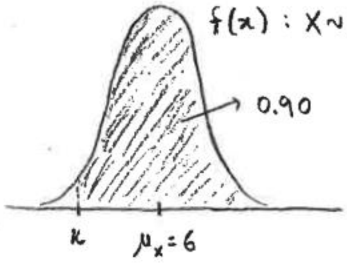
$$= 1-\Phi(2)+1-\Phi(2) = 2-2\Phi(2) = 2[1-\Phi(2)] = 2(1-0.9772) =$$

$$= 2\times 0.0228 = 0.0456$$

Exercício 39 (e)

$K: \; P(X > K) = 0.90$

$f(x): X \sim N(6, 25)$

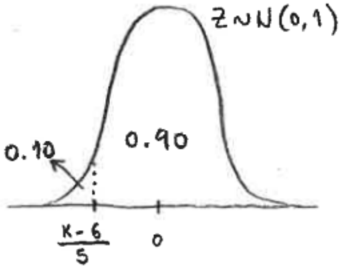


prob. à <u>esquerda</u>!

$P(X > K) = 0.90 \longrightarrow \text{invNorm}(0.10, 6, 5) \approx -0.4078$

Exercício 39 (e)

$$P(X > K) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{K - 6}{5}\right) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{K-6}{5}\right) = 0.90$$



$$P\left(Z \le \frac{K-6}{5}\right) = 0.10$$ (simetric $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{K-6}{5}\right) = 0.10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{6-K}{5}\right) = 0.10$$

Pela tabela 5 : $\frac{6-K}{5} = 1.282 \Leftrightarrow 6 - K = 1.282 \times 5 \Leftrightarrow -K = 1.282 \times 5 - 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow K = 6 - 1.282 \times 5 = -0.41$$

43. Considere que o tempo gasto numa visita à feira do livro é uma variável aleatória com distribuição normal, de média igual a duas horas. Suponha que apenas 2.5% dos visitantes permanecem mais de três horas.

a) Qual o desvio padrão da variável?

b) Sabendo que um visitante já chegou há uma hora, qual a probabilidade de se ir embora nos próximos 30 minutos?

c) Calcule a mediana e o intervalo interquartil de X, e interprete o seu significado.

d) Calcule a probabilidade de em 20 visitantes seleccionados ao acaso haver no máximo um que permaneça mais de três horas.

Exercício 43 (a)

X - v.a. tempo visita, em horas

$X \sim N(2, \sigma_x^2) \rightarrow \mu_x = 2 \ , \ \sigma_x^2 = ?$

supor que 2.5% dos visitantes permanecem mais de 3 horas : $P(X > 3) = 0.025$

(a)

$\sigma_x = ?$

$$P(X > 3) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} > \frac{3 - 2}{\sigma_x}\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma_x}\right) = 0.025$$

Pela tabela 5 : $\frac{1}{\sigma_x} = 1.96 \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{1}{1.96} = 1.96^{-1} \approx 0.5102$

Exercício 43 (b)

$$P(X \leq 1.5 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \leq 1.5 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 1.5)}{P(X \geq 1)}$$

- $P(1 \leq X \leq 1.5) \rightarrow \text{normalcdf}(1, 1.5, 2, 0.5102) \approx 0.1385$
- $P(X \geq 1) \rightarrow \text{normalcdf}(1, 10^{99}, 2, 0.5102) \approx 0.975$

Logo, $P(X \leq 1.5 \mid X \geq 1) = \dfrac{0.1385}{0.975} \approx 0.1421$

Exercício 43 (c)

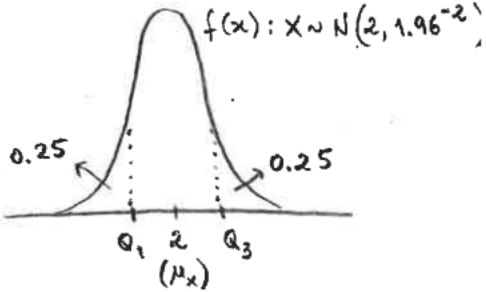
Dado que $X \sim N$ e a distribuição normal é simétrica, tem-se que: $med(x) = \mu_x = 2$.

Isto significa que metade das visitas demora menos de 2 horas e a outra metade, mais de 2 horas.

Exercício 43 (c)

Intervalo interquartil de X : (Q_1, Q_3) ; onde Q_1 é o 1º quartil e Q_3 é o 3º quartil .

Logo, quer-se encontrar Q_1 e Q_3 , tais que :



$$P(X \leq Q_1) = 0.25 \quad \text{e} \quad P(X \leq Q_3) = 0.75$$

1º Quartil

$$P(X \leq Q_1) = 0.25 \rightarrow \text{invNorm}(0.25, 2, 0.5102) \Rightarrow Q_1 \approx 1.656$$

Exercício 43 (c)

3º Quartil

$P(X \leq Q_3) = 0.75 \rightarrow \text{invNorm}(0.75, 2, 0.5102) \Rightarrow Q_3 \approx 2.344$

Logo, o intervalo interquartil de X é $(1.656, 2.344)$

Isto significa que 25% das visitas demora menos de 1.656 horas e outros 25% demora mais de 2.344 horas e metade das visitas têm duração entre estes dois valores.

Exercício 43 (d)

Num conjunto de 20 visitas haver, no máximo, 1 com duração superior a 3 horas.

Seja, Y - v.a. nº visitas com mais de 3 horas, num conjunto de 20

Então, $Y \sim B(20, \theta)$ $\theta = P(X > 3) = 0.025 \Rightarrow Y \sim B(20, 0.025)$

Quer-se: $P(Y \leq 1) \approx 0.912 \rightarrow$ binomcdf $(20, 0.025, 1)$

Obrigada!

Questões?