ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 21 e 22 (Semana 11)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	**Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

5. Variáveis aleatórias especiais

5.1. Variáveis aleatórias discretas

5.1.1. A distribuição uniforme discreta

5.1.2. A variável aleatória de Bernoulli

5.1.3. A variável aleatória binomial

5.1.4. A variável aleatória de Poisson

5.2. Variáveis aleatórias contínuas

5.2.1. A variável aleatória uniforme contínua

5.2.2. A variável aleatória normal

5.2.3. A variável aleatória exponencial

5.2.4. As variáveis aleatórias gama e chi-quadrado

5.3. O Teorema Limite Central

Distribuição Exponencial

Variáveis Aleatórias Contínuas

1

Distribuição Exponencial

- A distribuição exponencial (ou exponencial negativa) tem a sua génese associada ao processo de Poisson, mas também é utilizada fora deste contexto;
- Se uma sucessão de eventos constitui um processo de Poisson de intensidade λ e se se inicia a contagem no instante 0, o **tempo de espera** pela chegada da primeira ocorrência é uma variável aleatória, com distribuição exponencial de parâmetro λ (dedução no livro).
- Diz-se que a v.a. X tem distribuição exponencial de parâmetro λ quando a sua função densidade é da forma,

e = 2,71828 (Número de Euler)

$$f(x|\lambda)=\begin{cases}0 & x\leq 0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0.\end{cases}$$

Formulário

- **EXPONENCIAL** $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$; $X \sim \text{Ex}(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(1,\lambda)$ Distribuição Gama

$f(x|\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$ $\quad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$; $\text{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; $M_X(s)=\dfrac{\lambda}{\lambda-s}$, $s<\lambda$; $\gamma_1=2$; $\gamma_2=9$

Propriedades:

- $X_i \sim \text{Ex}(\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ independentes $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim G(k,\lambda)$ e $\min X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** pode ser escrita destas duas formas.

Exponencial vs Poisson

Observações:

- Existe uma relação muito importante entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson, que surge muitas vezes na prática. Estando a observar a ocorrência de certos acontecimentos em intervalos de tempo, pretendemos caracterizar T o tempo ao fim do qual se verifica a primeira ocorrência.

Teorema

Seja X uma v.a. de Poisson de parâmetro λ. Seja T a v.a. que designa o tempo de espera pela ocorrência do primeiro acontecimento, então T tem distribuição exponencial, $T \frown Exp[\beta)$, de parâmetro $\beta = 1/\lambda$.

moduloI_aula2.pdf

Distribuição Exponencial

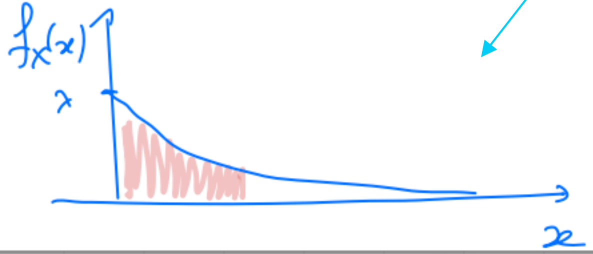
Representação gráfica da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** de parâmetro λ.

ii) $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ [lê-se: X tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$)

Note-se que $1/\lambda$ representa o valor médio de $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e λ representa uma frequência média.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

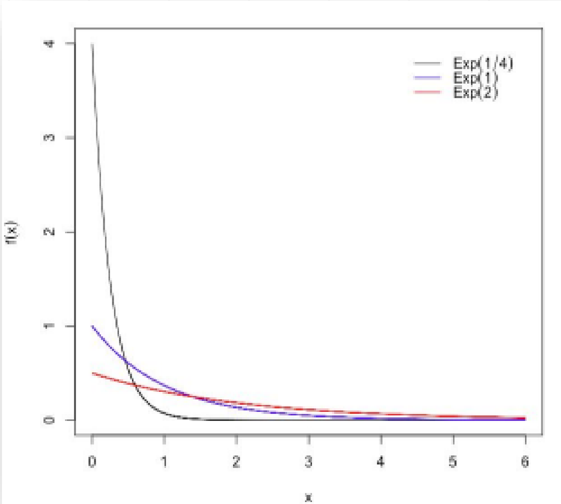


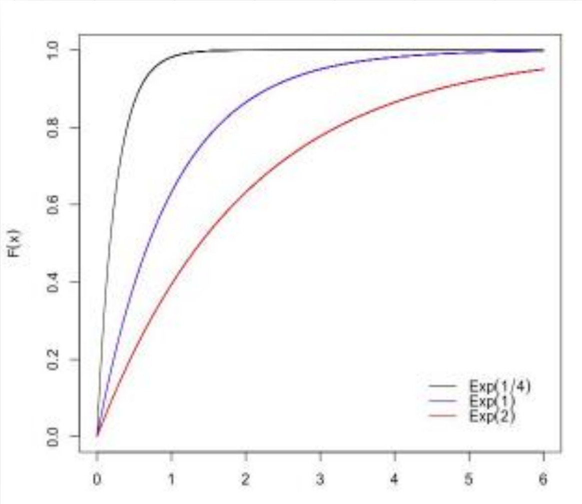
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\,dy = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Função de distribuição de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** de parâmetro λ.

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição Exponencial





Representação gráfica da função densidade de probabilidade f(x) e da função de distribuição de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** para vários valores do parâmetro λ.

Distribuição Exponencial

- A partir da fgm vem $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\mathrm{CV} = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 9$.
- Moda: **Não existe** (a função densidade é decrescente com x e o domínio é aberto).
- Mediana: $\mu_e = (\ln 2)/\lambda$. Note-se que $\mu_e < \mu$ (como seria de esperar numa distribuição com assimetria positiva)

- É habitual classificar as distribuições simétricas comparando-as com a normal:
  - Distribuições *leptokurtica* $(\gamma_2 > 3) \rightarrow$ caudas mais "espessas" (com zona central mais "pontiaguda") que a distribuição normal.
  - Distribuições *platikurtica* $(\gamma_2 < 3) \rightarrow$ caudas mais "finas" (com zona central mais "achatada") que a distribuição normal.
  - Distribuição *mesokurtica* $(\gamma_2 = 3)$

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Exponencial: Propriedades

Duas propriedades importantes:

- "Falta de memória": $X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow P(X > x + h \mid X > x) = P(X > h)$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.a. **independentes** então, $X_i \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow Y = \min_i X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$.

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Exponencial: Exemplo

Exemplo 5.20 (alterado) – Suponha-se que o tempo de vida útil de um dado componente é uma v.a. *X* com distribuição exponencial com média igual a 600 horas.

Se $E(X) = 1/\lambda = 600$, então tem-se $\lambda = 1/600$

- Probabilidade de o componente durar mais de 700 horas

$$P(X > 700) = \int_{700}^{+\infty} \frac{1}{600} e^{-x/600} dx = e^{-7/6} \approx 0.31.$$

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Na **Distribuição Exponencial** tem-se $F(x) = P(X \leq x) = 1- e^{-\lambda x}$, então $P(X > x) = 1-[1- e^{-\lambda x}] = e^{-\lambda x}$

Logo, alternativamente à resolução anterior tem-se $P(X>700) = 1-P(X\leq 700) = 1- [1- e^{-700/600}] = e^{-7/6}$

Distribuição Exponencial: Exemplo

Exemplo 5.20 (alterado) – Suponha-se que o tempo de vida útil de um dado componente é uma v.a. X com distribuição exponencial com média igual a 600 horas.

- Sabendo que o componente já durou 400 horas, qual a probabilidade de durar ainda mais 700 horas.

$$P(X > 1100 \mid X > 400) = \frac{P(X > 1100)}{P(X > 400)} = \frac{e^{-11/6}}{e^{-4/6}} = e^{-7/6}.$$

1100=700+400

Dada a falta de memória da exponencial,

$P(X > 700) = P(X > 1100 \mid X > 400)$. Mais simples

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Distribuição Exponencial: Exemplo

- Num conjunto de 10 componentes a funcionar de forma independente qual a probabilidade de algum deles durar menos de 100 horas

$$P(\min X_i < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{60} e^{-x/60} dx = 1 - e^{-100/60} \approx 0.8111$$

já que $\min X_i \sim \text{Ex}(1/60)$. Note-se que $P(X < 100) = 1 - e^{-1/6} \approx 0.1535$

Se E(X) = 1/λ = 600, então tem-se λ = 1/600

Como X ~ Exp(1/600), então Min Xi ~ Exp(10/600 = 1/60)

- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.a. **independentes** então, $X_i \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow Y = \min_i X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$.

Distribuição Exponencial

Uma v.a. X tem distribuição exponencial com parâmetro λ >0 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ Exp(λ)

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** pode ser escrita com esta parametrização.

Valor esperado e variância

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad V(X) = \lambda^2$$

Distribuição Exponencial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

50. Um banco atende em média dois clientes em cada 3 minutos. Considere que o número de clientes atendidos é um processo de Poisson.

a) Qual a probabilidade de decorrerem 3 minutos sem qualquer cliente atendido?

b) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar mais do que 3 minutos?

c) Compare os resultados das duas alíneas anteriores.

d) Qual a probabilidade de o atendimento de um cliente demorar entre 3 e 6 minutos?

Exercício 50 (a)

X - v.a. nº clientes atendidos por cada 3 minutos

$X \sim Po(2)$ $\lambda = E(X) =$ média de clientes atendidos por cada 3 minutos

(a)

$P(X=0) \approx 0.1353$ $\longrightarrow$ poissonpdf (2,0) ; $P(X=0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} \approx 0.1353$

Exercício 50 (b)

Analisa-se agora o tempo de atendimento por cliente, que corresponde à distribuição exponencial. Seja

Y - v.a. tempo atendimento por cliente, em minutos $\Rightarrow Y \sim Ex(\lambda)$

Determinar λ da exponencial

Na exponencial: $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$.

Como $E(Y)$ é o tempo médio / cliente (minutos), tem-se que: $E(Y) = 3/2$.

Logo, $\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2/3$

Assim, $Y \sim Ex(2/3) \Rightarrow f(y) = \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y} \quad (y>0)$

Então: $P(Y>3) = \int_3^{+\infty} f(y)\,dy = \int_3^{+\infty} \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y}\,dy = \left[-e^{-\frac{2}{3}y}\right]_3^{+\infty} = -e^{-\infty} - \left(-e^{-2}\right) =$

$= e^{-2} \simeq 0.1353$

Exercício 50 (c)

As probabilidades calculadas em (a) e (b) são iguais.

Faz sentido, pois se o tempo de atendimento de um cliente for superior a 3 minutos (b)

então nenhum cliente é atendido em 3 minutos (a).

Exercício 50 (d)

$$P(3 \leq Y \leq 6) = \int_3^6 \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}y}\, dy = \left[-e^{-\frac{2}{3}y} \right]_3^6 = -e^{-4} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$$

Distribuição do Qui-Quadrado

Variáveis Aleatórias Contínuas

3

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

Definição: A v. a. contínua X segue uma **distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade**, i. e., $X \sim \chi^2_n$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0,\ n > 0,}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Distribuição do Qui-Quadrado: Função Densidade de Probabilidade

O parâmetro caracterizador desta distribuição é n.

Principais características:

- A v. a. só toma valores positivos;
- É uma função não simétrica.

A forma da distribuição depende dos graus de liberdade (Figura 5.12), tornando-se menos assimétrica com o aumento do número de graus de liberdade. Esta distribuição está tabelada (Anexo B).

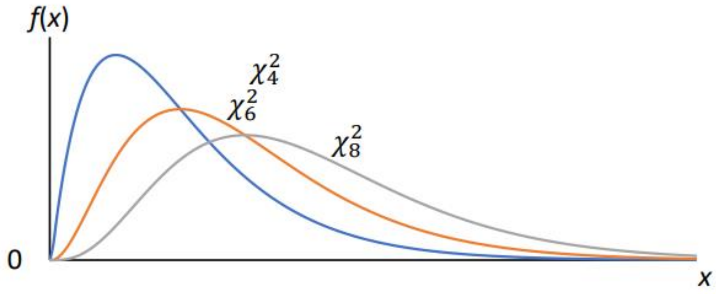


***Figura 5.12:** Função densidade de probabilidade distribuição Qui-Quadrado para diferentes graus de liberdade.*

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- A distribuição do qui-quadrado (χ^2) é uma distribuição de probabilidade contínua.

- É uma das distribuições de probabilidade mais usadas em inferência estatística – *ex.*, testes de hipóteses, construção de intervalos de confiança.

- A distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade 'surge' quando tomamos o quadrado de uma distribuição normal padrão.

  (*i.e.*, a distribuição de uma soma de quadrados de n variáveis aleatórias independentes normalmente distribuídas)

- Se X tem uma distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade, escreve-se

$$\boxed{X \sim \chi^2 (n)}$$

- A distribuição do qui-quadrado tem um parâmetro: n – nº de termos independentes num somatório de quadrados (*i.e.*, o número de Xis)

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Teorema da aditividade**

Se X_i (i = 1, 2, 3, …, n) são variáveis aleatórias independentes e

se $X_i \sim \chi^2 (n_i)$

então: $\Sigma X_i \sim \chi^2_{(m)}$

(*i.e.*, ΣX_i é uma distribuição do qui-quadrado com $m = \Sigma n_i$ graus de liberdade)

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição do Qui-Quadrado

- **Outros teoremas**

  - Se Z tem uma distribuição normal padrão, então Z^2 tem distribuição do qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

$$\boxed{Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \cap \chi^2_{(1)}}$$

  - Se X_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média μ_i e desvio-padrão σ_i, então:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \cap \chi^2_{(n)}}$$

Distribuição do Qui-Quadrado

- É uma distribuição positiva e não simétrica.
- E[X] = n
- Var[X] = 2n
- Está tabelada para algumas probabilidade e n ≤ 30.
- Quando n > 30, pode usar-se a aproximação à distribuição normal:

$$\boxed{\sqrt{2X} - \sqrt{2n} \;\dot{\frown}\; N(0,1)}$$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Se $X \sim \chi^2_n$, então $\mu_X = E(X) = n$ e $\sigma^2_X = Var(X) = 2n$.

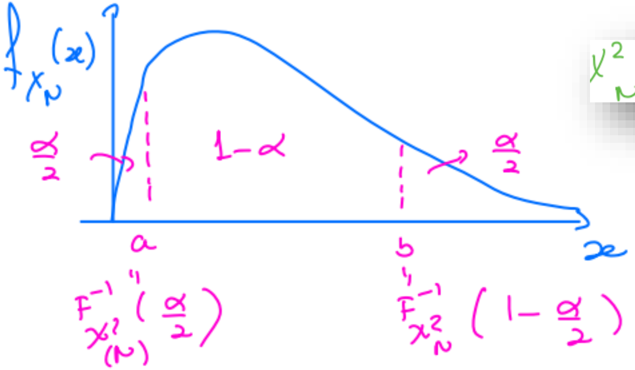
Usualmente utiliza-se a notação $\chi^2_{n;\,\alpha}$ para representar o quantil de probabilidade α de uma v. a. $X \sim \chi^2_n$. Portanto, $\chi^2_{n;\,\alpha}$ corresponde ao menor valor k tal que $P(X \leq k) = \alpha$.

Distribuição do Qui-Quadrado: Resumo

Propriedades:

i) $f_{\chi^2_N}(x) > 0$ para $x > 0$

ii) Não é uma distribuição simétrica



χ^2_N lê-se "distribuição do qui-quadrado com N graus de liberdade"

Distribuição do Qui-Quadrado

Formulário

- **QUI-QUADRADO** $X \sim \chi^2(n)$, (n inteiro positivo).

$$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \sim G(n/2; 1/2)\ ;\ E(X) = n\ ;\ \mathrm{Var}(X) = 2n\ ;\ M_X(s) = (1-2s)^{-\frac{n}{2}},\ s < \frac{1}{2}\ ;\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{n}}\ ;\ \gamma_2 = 3 + \frac{12}{n}$$

Propriedades:

- $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_{(n)}$ com $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$
- $X \sim G(n; \lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$
- $X_i \sim N(0,1)$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Distribuição Gama
(ver slides a seguir)

Distribuição do Qui-Quadrado: Exercícios

4

Variáveis Aleatórias Contínuas

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

   $$P[X < a] = 0{,}95 \quad e \quad P[X > b] = 0{,}975$$

   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

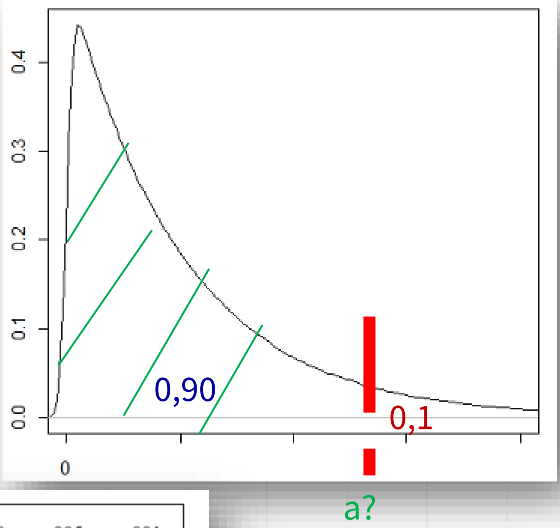
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 1

Área total é igual a 1



$P(X \leq a) = 0{,}90 \Leftrightarrow a = F(0{,}90)^{-1} = 15{,}987$

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

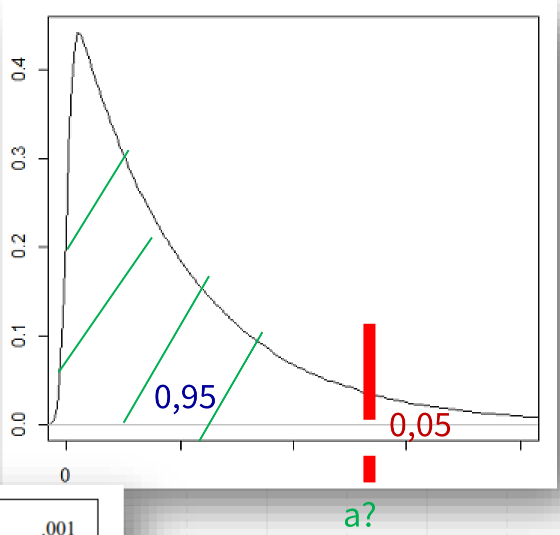
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 a)

Área total é igual a 1



$P(X < a) = 0{,}95 \Leftrightarrow a = F(0{,}95)^{-1} = 18{,}307$

$P(X > b) = 0{,}975 \Leftrightarrow b = F(0{,}025)^{-1} = 3{,}247$

$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$

ε / n	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0,9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0,95$ e $P[X > b] = 0,975$

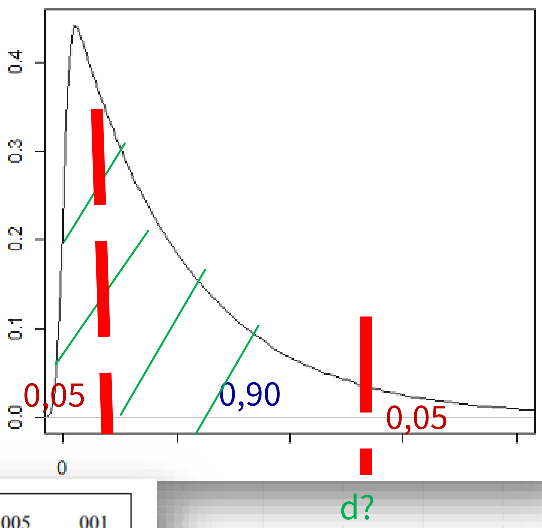
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0,9$.

   c) Calcule $P[X > 30,6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 2 b)

Área total é igual a 1



$P(c < X < d) = 0,90 \Leftrightarrow P(X < d) - P(X < c) = F(d) - F(c) = 0,90$

Logo, tem-se $d = F(0,95)^{-1} = 18,307$ e $c = F(0,05)^{-1} = 3,940$

$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$

ε / n	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Exercício 2 c)

1. Suponha que X ~ $\chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante P[X ≤ a] = 0,9.
2. Suponha que X ~ $\chi^2_{(10)}$.

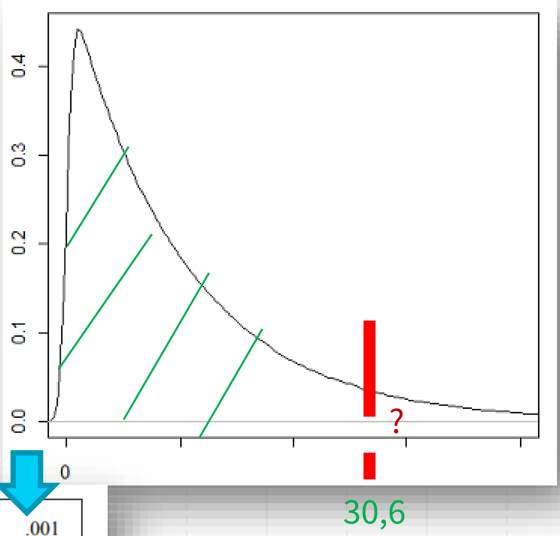
   a) Quais os valores de a e b que garantem:

   P[X < a] = 0,95 e P[X > b] = 0,975

   b) Calcule c e d tais que P[c < X < d] = 0,9.

   c) Calcule P[X > 30,6].
3. Suponha que Y ~ $\chi^2_{(60)}$. Calcule P[Y < 12].

Área total é igual a 1



P(X > 30,6) ~ P(X > 29,588) = 0,001

$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

1. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$. Qual o valor de a que garante $P[X \leq a] = 0{,}9$.

2. Suponha que $X \sim \chi^2_{(10)}$.

   a) Quais os valores de a e b que garantem:

      $P[X < a] = 0{,}95$ e $P[X > b] = 0{,}975$

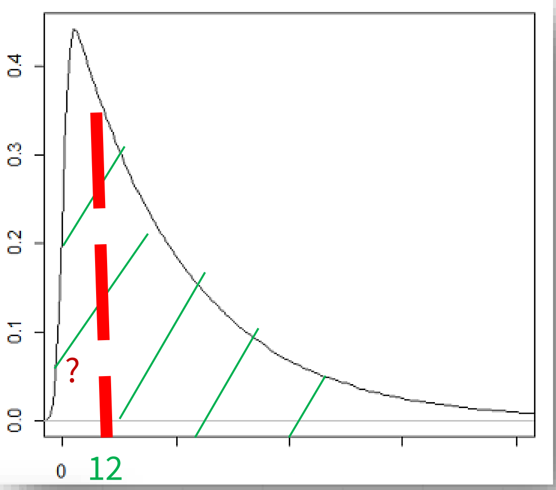
   b) Calcule c e d tais que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

   c) Calcule $P[X > 30{,}6]$.

3. Suponha que $Y \sim \chi^2_{(60)}$. Calcule $P[Y < 12]$.

Exercício 3

Área total é igual a 1



P(Y < 12) ~ 1-P(Y > 35,534) = 1-0,995 = 0,005

Alternativamente, pelo TLC (aproximação à distribuição Normal)

P(Y < 12) ~P([Y-n]/(2n) $^{-0,5}$ < (12 – 60) / 10,95) = P(Z < -4,38)

$= \Phi(-4{,}38) = 1 - \Phi(4{,}48) \sim 1 - 0{,}999978$ = 0,000022 (ver mais à frente)

$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660	39.335	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215	112.317
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	71.145	79.334	88.130	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839

5 Distribuição Gama

Variáveis Aleatórias Contínuas

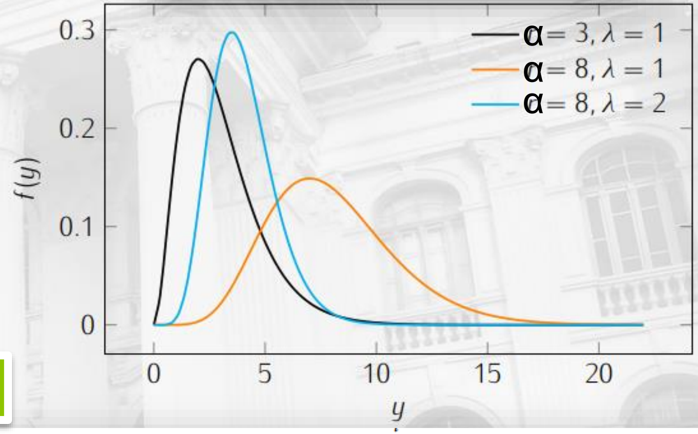
A distribuição exponencial prevê o tempo de espera até o **primeiro** evento. A distribuição gama, por outro lado, prevê o tempo de espera até que o evento **k-ésimo evento** ocorra.

Distribuição Gama

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

- Seja $Y_{Ei} \sim \text{Exp}(\lambda)$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ uma variável com distribuição Exponencial. Então, $Y = Y_{E1} + Y_{E2} + \cdots + Y_{Ek}$ tem distribuição Gama.
- A Gama tem suporte no conjunto dos **reais positivos**, assumindo formas assimétricas.
- Ela tem aplicações na área de **confiabilidade** e análise de **sobrevivência**, assim como a Lognormal.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ x > 0,\ n > 0,$$



Formulário

- **GAMA** $X \sim G(\alpha, \lambda)$, $(\lambda > 0, \alpha > 0)$

$f(x \mid \alpha, \lambda) = \dfrac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$; $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$; $\text{Var}(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$; $M_X(s) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - s}\right)^{\alpha}, s < \lambda$; $\gamma_1 = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$; $\gamma_2 = 3 + \dfrac{6}{\alpha}$

Propriedades:

- $X_i \sim G(\alpha_i; \lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i; \lambda\right)$
- $X \sim G(\alpha, \lambda)$ então $Y = cX \sim G(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ onde c constante positiva

Distribuição Gama: Exemplos

1. Soma de v.a. com distribuição Exponencial.
2. Tempo de carregamento de um navio.
3. Volume de chuva em dias com precipitação.
4. Tempo de permanência de um usuário em um site.
5. Distribuição de idade de animais em ambiente natural.
6. Tempo de vida de um paciente após transplante.
7. Distância dos passes de bola em um jogo de futebol.

[Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)]

Distribuição Gama: Função Densidade de Probabilidade

As **distribuições Exponencial** e **Qui-quadrado** são casos particulares de uma distribuição mais geral, a **distribuição Gama**.

Definição: A v. a. contínua X segue uma distribuição Gama com parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, i. e., $\boldsymbol{X \sim G(\alpha;\ \lambda)}$, se a sua função densidade de probabilidade é:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ x > 0,\ n > 0,}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama, definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$.

O parâmetros caracterizadores desta distribuição são α e λ.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

Distribuição Gama: Função Gama

Para cada número positivo α, seja $\Gamma(\alpha)$ definido como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x = 1$
- Se $\alpha > 1$, então $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$, n interiro positivo.

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

- A distribuição Gama tem como **caso particular** a distribuição exponencial (λ) ao fixarmos $\alpha = 1$.
- Dessa relação, a Gama pode ser obtida como o **tempo acumulado** para k eventos de Poisson, uma vez que o intervalo entre eventos é Exponencial.
- A Gama tem mais variedades de formas por ter 2 parâmetros, permitindo modelar adequadamente um maior número de variáveis aleatórias que a Exponencial.
- A **soma** de v.a. Gama é Gama, ou seja, se $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição Gama de parâmetros α e λ, então

$$Y_{\text{soma}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \sim \text{Gama}(k\alpha, \lambda).$$

- A distribuição Erlang é um **caso particular** da Gama quando r é um número natural, $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

Distribuições contínuas: Lognormal, Gama, Weibull e Beta (ufpr.br)

Distribuição Gama: Relação com outras Distribuições

Casos particulares:

- $X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow X \sim G\left(\alpha = \dfrac{n}{2};\ \lambda = \dfrac{1}{2}\right);$
- $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(\alpha = 1;\ \lambda).$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuição Gama

α Parâmetro de forma
λ Parâmetro de taxa

O aspeto da distribuição depende do valor dos parâmetros (Figura 5.13).

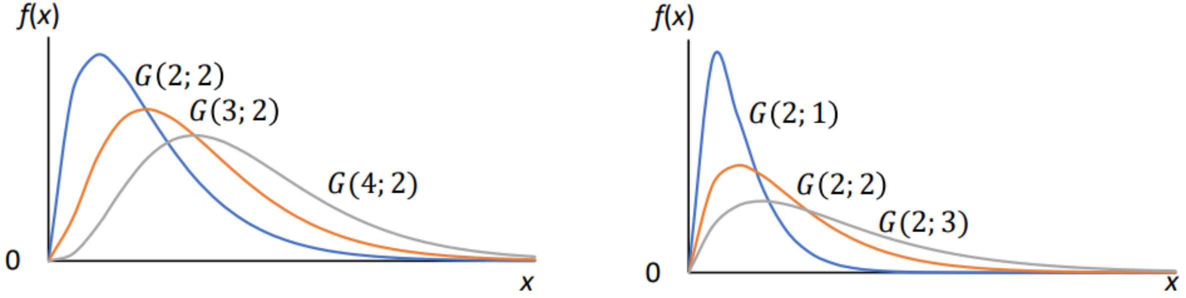


Figura 5.13: *Função densidade de probabilidade da distribuição Gama para diferentes valores de α e λ.*

Se $X \sim G(\alpha;\ \lambda)$, então $\mu_X = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Teorema da aditividade: Se $X_i, i = 1, 2, \ldots, K$, são v. a. independentes e $X_i \sim G(\alpha_i;\ \lambda)$, então

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} X_i \sim G(\alpha;\ \lambda), \text{com } \alpha = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i.}$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Distribuição Gama

A distribuição Gama pode ser como uma generalização da distribuição Exponencial para descrever a v.a. X que representa **o tempo de espera até à ocorrência do n-ésimo sucesso**. A variável X resulta da soma dos

tempos de espera entre as várias ocorrências sucessivas (X_i) até à ocorrência pretendida. Deste modo, pelo teorema da aditividade como $X_i, i = 1, \dots, n$, são v. a. independentes e $X_i \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim G(1;\ \lambda)$, então

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n;\ \lambda).$$

Distribuição Exponencial, Gama e Qui-Quadrado e Gama: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

6

56. O tempo decorrido desde a avaria até à reparação (designado por tempo de reparação) de um certo tipo de máquina, é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 2 horas.

a) Qual a probabilidade de uma máquina que se avariou ter um tempo de reparação superior a uma hora?

b) Seleccionadas aleatoriamente dez máquinas que se avariaram, qual a probabilidade da reparação mais rápida se realizar em menos de 15 minutos?

c) Qual a probabilidade do tempo total de reparação de 50 máquinas avariadas não exceder 90 horas?

Exercício 56 (a)

X - v.a. tempo reparação, em horas

$X \sim Ex(\lambda)$, com $E(x) = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow X \sim Ex(0.5)$

(a)

$$P(X>1) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} 0.5\, e^{-0.5x}\,dx = \left[-e^{-0.5x}\right]_1^{+\infty} = -e^{-\infty} - \left(-e^{-0.5}\right) = e^{-0.5} \approx$$

$$\approx 0.60653$$

Exercício 56 (b)

X_i $(i=1,2,\dots,10)$ - v.a. tempo de reparação de cada máquina, em horas $\sim Ex(0.5)$

A reparação mais rápida corresponde ao $\min_i X_i$ (mínimo dos X_i).

Quer-se então: $P\left(\min_i X_i < 0.25\right)$. Qual a distribuição de $\min_i X_i$?

- se $X_i \sim Ex(0.5)$ $(i=1,2,\dots,\underset{\downarrow\atop k}{10})$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\min_i X_i}_{Y} \sim Ex(10\times 0.5) \Leftrightarrow Y \sim Ex(5)$

Logo,

$$P\left(\min_i X_i < 0.25\right) = P(Y<0.25) = \int_0^{0.25} f(y)\,dy = \int_0^{0.25} 5\,e^{-5y}\,dy = \left[-e^{-5y}\right]_0^{0.25} =$$

$$= -e^{-1.25} - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-1.25} \approx 0.7135$$

Exercício 56 (c)

$\sum_{i=1}^{50} X_i$ → v.a. tempo total reparação de 50 máquinas, em horas

Quer-se : $P\left(\sum X_i \leq 90\right)$. Qual a distribuição de Z ?

- $\underset{\lambda}{X_i \sim Ex(0.5)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{50} X_i \sim G(\underset{n}{50}, \underset{\lambda}{0.5}) \Rightarrow \underbrace{2\lambda \sum X_i}_{Q} \sim \chi^2(2 \times \underset{n}{50})$ ou $Q \sim \chi^2(100)$

Assim,

$$P(Z \leq 90) = P(\underbrace{2\lambda Z}_{Q} \leq 2 \times 0.5 \times 90) = P(\underset{\chi^2(100)}{Q} \leq 90) \approx 0.2468 \rightarrow \chi^2 cdf\,(0,90,100)$$

<u>Nota</u>: Exponencial, Gama e Qui-quadrado não admitem valores x negativos!

58. Se $X \sim \chi^2(23)$, obtenha:

a) $P(14.85 < X < 32.01)$.

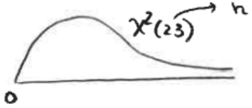
b) Os valores de a e b tais que $P(a < X < b) = 0.95$ e $P(X < a) = 0.025$.

c) A média e a variância de X.

d) $\chi^2_{23,0.05}$ e $\chi^2_{23,0.95}$.

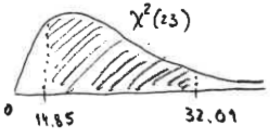
Exercício 58 (a)

$X \sim \chi^2(23)$



(a)

$P(14.85 < X < 32.01) \approx 0.8 \quad \rightarrow \quad \chi^2 cdf\,(14.85, 32.01, 23)$



$P(14.85 < X < 32.01) = P(X > 14.85) - P(X > 32.01)$

Pela tabela 6 :

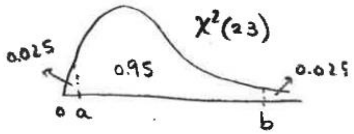
- $P(X > 14.85) = 0.9$
- $P(X > 32.01) = 0.1$

$$\left.\begin{array}{l} P(X > 14.85) = 0.9 \\ P(X > 32.01) = 0.1 \end{array}\right\} \quad P(14.85 < X < 32.01) = 0.9 - 0.1 = 0.8$$

Exercício 58 (b), (c) e (d)

(b)

a, b : $P(a < X < b) = 0.95$ e $P(X < a) = 0.025$



Pela tabela 6 :

$P(X < a) = 0.025 \Leftrightarrow P(X \geq a) = 0.975 \Rightarrow \boxed{a = 11.689}$

$P(X > b) = 0.025 \Rightarrow \boxed{b = 38.076}$

(c)

$E(X) = n = 23$ $\quad$ $Var(X) = 2n = 2 \times 23 = 46$

(d)

$\chi^2_{23,0.05}$ é o valor numa $\chi^2(23)$ com probabilidade à direita de 0.05 $\Rightarrow \chi^2_{23,0.05} = 35.172$

$\chi^2_{23,0.95}$ é o valor numa $\chi^2(23)$ com probabilidade à direita de 0.95 $\Rightarrow \chi^2_{23,0.95} = 13.091$

7

Distribuição t-Student

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student é uma distribuição de probabilidade contínua.

- A distribuição t-Student geralmente surge quando temos uma população com variância desconhecida (e tem de ser estimada a partir dos dados recolhidos) e uma amostra de dimensão pequena (n < 30).

- A distribuição t-Student é dada pelo quociente entre uma normal reduzida e a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida pelo respectivo número de graus de liberdade.

I.e., se $Z \sim N(0;1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \cap t_{(n)}}$$

- Se X tem distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:

$$\boxed{X \sim t_{(n)}}$$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

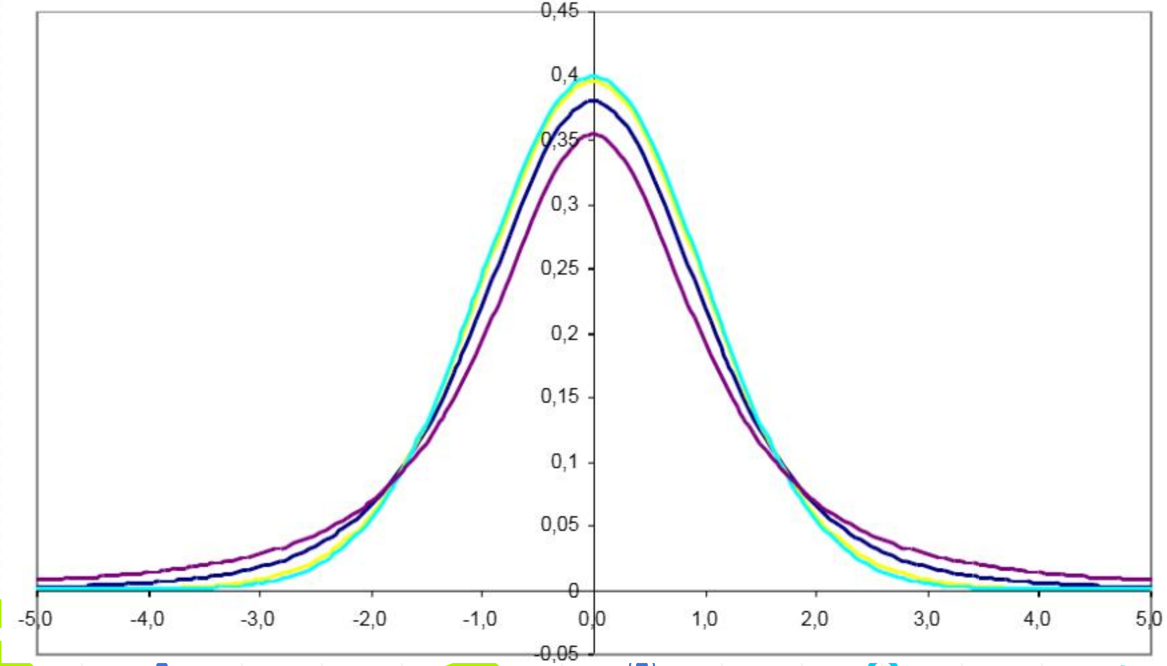
Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student tem um parâmetro: n – o nº de graus de liberdade.
- É uma distribuição simétrica.

- $E[X] = 0$
- $Var[X] = n/(n-2)$, se $n > 2$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student

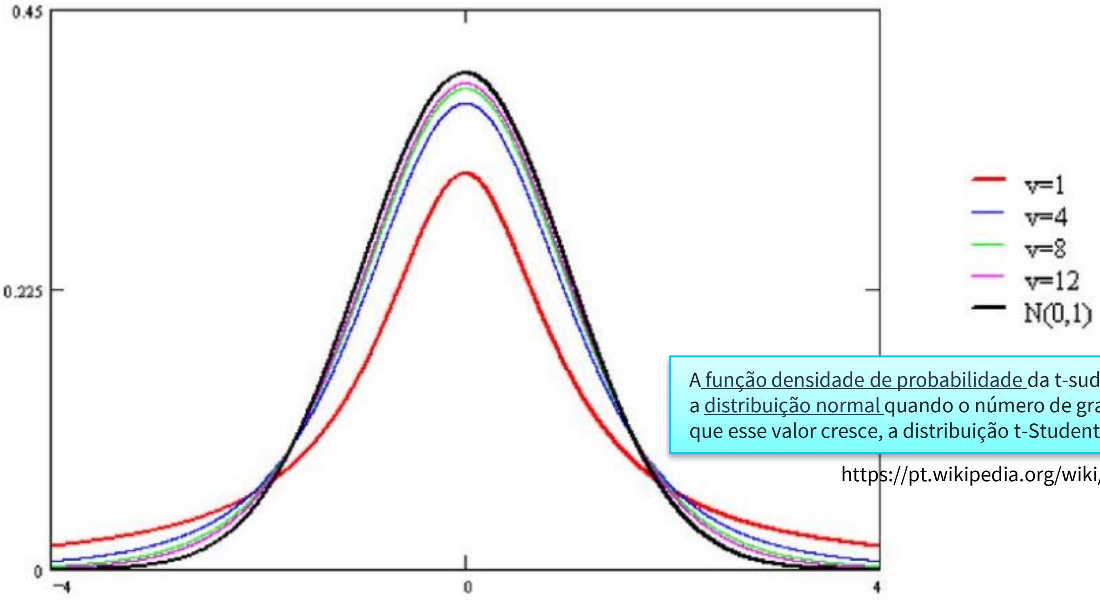


Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

T-Student

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- **...** A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por ν

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \cap t_{(n-1)}$$



A [função densidade de probabilidade] da t-sudent detém caudas mais pesadas que a [distribuição normal] quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

https://slideplayer.com.br/slide/14561961

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student varia de acordo com os graus de liberdade. Isto significa que a sua curva depende da dimensão da amostra, n.

- Está tabelada para algumas probabilidade e $n \leq 30$, $n = 40$, $n = 60$, $n = 120$ e $n = \infty$.

- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal. Em tais casos, $\mu = 0$ e $Var = n/(n-2)$.

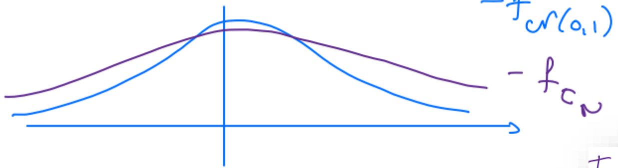
- À medida que n aumenta, a distribuição tende para a distribuição normal. Para n grande, a distribuição t-Student tende a ser muito semelhante à distribuição normal.

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student: Resumo...

propriedades básicas desta distribuição

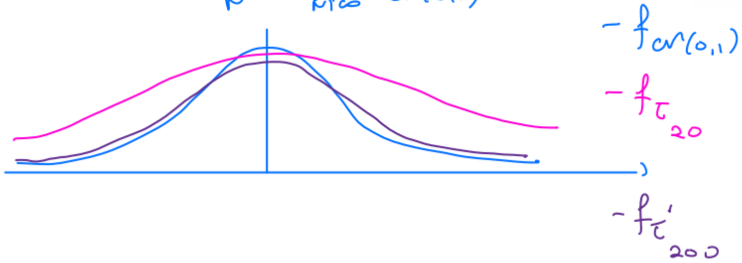
i) a sua função densidade de probabilidade é simétrica em torno de zero e tem uma representação gráfica muito parecida com a da $N(0,1)$:



t_N lê-se "distribuição t de student com N graus de liberdade"

ii) Quando N é "bastante grande",

$$f_{t_N}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f_{N(0,1)}(x)$$



Distribuição t-Student

Formulário

- ***t*-"STUDENT"**

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t(n) \text{ com } U \sim N(0,1) \text{ e } V \sim \chi^2(n) \text{ independentes}$$

$$E(T) = 0\,;\ \mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2}\ (n > 2)\,;\ \gamma_1 = 0\,;\ \gamma_2 = \frac{3(n-2)}{n-4}\ (n > 4)$$

Propriedade: • Sendo $T \sim t(n) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} F_T(t \mid n) = \Phi(t)$

Distribuição do t-Student: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

8

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2,7]$;

b) Qual o valor de <u>a</u> tal que $P[X \geq a] = 0,95$;

c) Qual o valor de <u>b</u> tal que $P[X > b] = 0,05$;

d) Qual o valor de <u>c</u> tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.

Exercício a)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

ε / n	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

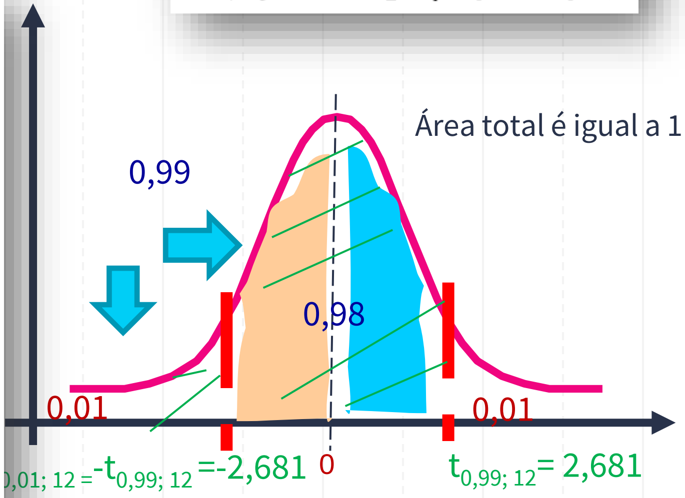
Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2,7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.



$$P(X \leq 2,7) \sim P(X \leq 2,681) = 1 - P(X > 2,681) = 1 - 0,01 = 0,99$$

Exercício b)

Suponha que X ~ $t_{(12)}$.

a) Calcule P[X ≤ 2,7];

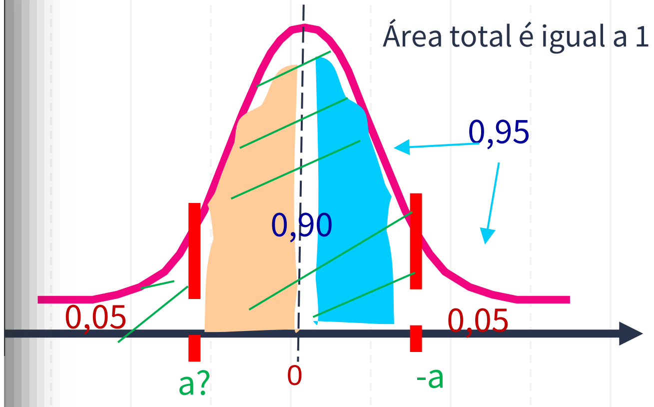
b) Qual o valor de a tal que P[X ≥ a] = 0,95;

c) Qual o valor de b tal que P[X > b] = 0,05;

d) Qual o valor de c tal que P[-c < X < c] = 0,9.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



P(X ≥ a) = 0,95 ⇔ P(X>-a) = 0,05 ⇔ -a= 1,782 ⇔ a = -1,782

Exercício c)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

$$P(X > b) = 0{,}05 \Leftrightarrow b = 1{,}782$$

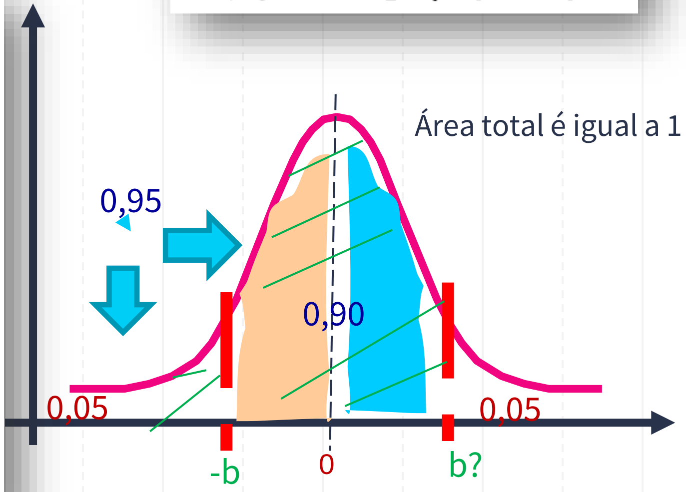
Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.



Exercício d)

Suponha que X ~ t $_{(12)}$.

a) Calcule P[X ≤ 2,7];

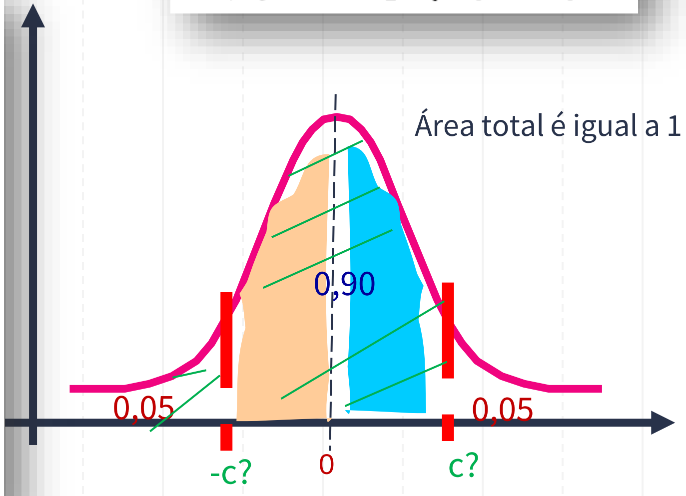
b) Qual o valor de a tal que P[X ≥ a] = 0,95;

c) Qual o valor de b tal que P[X > b] = 0,05;

d) Qual o valor de c tal que P[-c < X < c] = 0,9.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



P(-c < X < c) = 0,90 ⇔ P(X < c) - P(X <-c) = F(c) – F(-c) = F(c) – (1- F(c))
= 2×F(c) – 1 = 0,90 ⇔ F(c) = 0,95 ⇔ c = $F(0,95)^{-1}$ = 1,782

Obrigada!

Questões?