

1. Crie um enunciado para uma aplicação prática do problema do caixeiro viajante.

O Manuel tem uma creche de cães e no fim do dia deve pôr os cães nas respectivas cascas. Os cães q̄ trāi na sua creche durante esta semana s̄o o Rex, o Rex, o Dexter e o Bobi. O Norman na Estrela, o Rex em Alvalade o Dexter na Alameda e o Bobi no Parque das Nações. Determine a rota q̄ o Manuel deve fazer durante esta semana para devolver os cães às suas cascas.

Exercício 2

Monday, October 09, 2023

9:26 AM

2. Considere a seguinte instância para o problema do caixeiro viajante.

	1	2	3	4
1	-	15	12	13
2	15	-	9	2
3	12	9	-	19
4	13	2	19	-

- (a) Resolva o problema utilizando a formulação MTZ.
- (b) Resolva o problema utilizando a formulação SCF.
- (c) Determine o valor da relaxação linear das formulações desenvolvidas nas alíneas anteriores e compare-os.

Alínea (a)

$$z^* = 36$$

Alínea (b)

$$z^* = 36$$

Alínea (c)

$$z_{MTZ}^{RL} = 32$$

$$z_{SCF}^{RL} = 33.333336$$

O valor da relaxação linear do SCF é maior que o do MTZ. Isto é sempre verdade, isto é, $z_{SCF}^{RL} \geq z_{MTZ}^{RL}$ (prova-se teoricamente).

Exercício 3

Monday, October 09, 2023 11:28 AM

3. Uma fábrica, localizada no nodo 0, necessita de matéria-prima e existem n fornecedores que a podem fornecer. O fornecedor $i \in \{1, \dots, n\}$ tem w_i unidades de matéria-prima disponível e a fábrica tem uma necessidade de W unidades. A fábrica pretende determinar a rota que deve executar de forma a garantir que recolhe toda a matéria-prima que necessita ao mínimo custo de deslocação.

- (a) Adapte uma formulação compacta para resolver o problema apresentado. Nota: Este problema é uma variante do problema do caixeiro viajante chamada *prize-collecting traveling salesman problem*.
- (b) Considere a seguinte matriz de custos e valores de w_i .

	0	1	2	3	4
0	-	17	13	7	4
1	14	-	3	10	17
2	9	7	-	8	14
3	11	6	11	-	3
4	17	7	18	2	-

w_i	4	7	2	4
-------	---	---	---	---

- i. Considerando $W = 10$, determine a solução ótima da instância apresentada.
- ii. Considere outros valores de W . Existe alguma relação entre o valor ótimo da instância e o valor de W ? Se sim, indique qual.

Alínea (a)

Como $\bar{n}$ é necessário visitar todos os nodos necessitamos de umas variáveis auxiliares q que nos dizem se o nodo é visitado ou não.

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se nodo } i \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se arco } (i, j) \in A \text{ usado na solução} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_{ij} = \text{fluxo q atravessa arco } (i, j) \in A$$

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j \in V: \\ (i,j) \in A}} x_{ij} = g_i, \quad \forall i \in V$$

$$x(0, V) = 1$$

$$\sum_{\substack{j \in V: \\ (i,j) \in A}} x_{ij} = \sum_{\substack{j \in V: \\ (j,i) \in A}} x_{ji}, \quad \forall i \in V$$

$$\sum_{i \in V} w_i g_i \geq W$$

$$\sum_{i \in V} f_{oi} = \sum_{i \in V} w_i g_i$$

$$\sum_{j \in V:} f_{ji} = \sum_{j \in V} f_{ij} + g_i w_i, \quad i \in V$$

$$f_{ij} \leq \left(\sum_{k \in V} w_k \right) x_{ij}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A$$

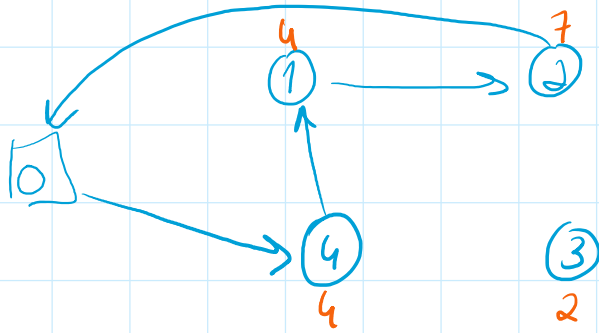
$$g_i \in \{0, 1\} \quad i \in V$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A$$

Alínea (b) (i)

A so da instância apresentada é:

15 ou a instancia apresentada e:



e tem custo 23.

Alínea (b)(ii)

Considerando $w = 5$ o valor ótimo é 17.

Baixando o valor de w estamos a restringir menos o problema e por isso o valor ótimo melhora.

Exercício 4

Monday, October 09, 2023 1:43 PM

5. Considere a seguinte matriz de custos relativa a uma instância do problema do caixeiro viajante.

	1	2	3	4
1	-	3	5	1
2	-	-	1	6
3	6	1	-	3
4	1	5	-	-

- Obtenha a solução ótima do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos.
- Introduza na solução obtida na alínea anterior as restrições de eliminação de subcircuitos da formulação CC até encontrar a solução ótima do problema.

Alínea (a)

A sol. obtida s/ as rest. de eliminação de subcircuitos foi:



com custo 4.

Alínea (b)

Adicionar a restrição: $x_{12} + x_{14} + x_{23} + x_{24} \geq 1$

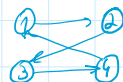


custo = 4

" " " : $x_{12} + x_{13} + x_{42} \geq 1$



A sol. obtida é



q é a so e tem custo 8.

Não existe
(2,1) e (4,3)

Exercício 5

Monday, October 09, 2023 2:09 PM

6. Considere a matriz de custos seguinte relativa a uma instância do problema do caixeiro viajante.

	1	2	3	4	5
1	-	3	4	1	2
2	3	-	8	4	3
3	4	8	-	5	2
4	1	4	5	-	3
5	2	3	2	3	-

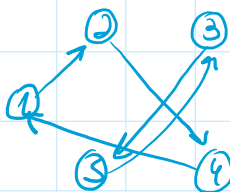
- (a) Obtenha uma solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos. Classifique a solução obtida. *Rel. valor com ótimo*
- (b) Obtenha uma solução para o problema relaxado em que não se consideram as restrições de grau. Classifique a solução obtida. *saída de um nó*
- (c) Obtenha uma solução admissível para o problema utilizando a heurística de inserção de menor custo. *Rel. valor com ótimo*

Página 2

~~(d) O que pode concluir sobre o valor ótimo desta instância?~~

Alínea (a)

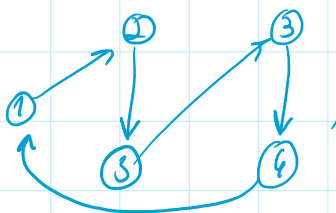
A sol. obtida é



e tem custo total 12. Logo, $Z \geq 12$

Alínea (b)

A sol. obtida é



que como é admissível para o TSP podemos concluir que é a SO. Logo, $Z^* = 14$.

Alínea (c)

Inicializar: $R = \{1, 4\}$

Há cidades por visitar? Sim.

Cidade 2: $C_{12} + C_{24} - C_{14} = 3 + 4 - 1 = 6$

Cidade 3: $C_{13} + C_{34} - C_{14} = 4 + 5 - 1 = 8$

Cidade 5: $C_{15} + C_{54} - C_{14} = 2 + 3 - 1 = 4 \Leftarrow \min$

$R = \{1, 5, 4\}$



Há cidades por visitar? Sim!

Cidade 2:

Aresta $\{1, 5\}$: $C_{12} + C_{25} - C_{15} = 3 + 3 - 2 = 4 \Leftarrow \min$
(há empates)

Aresta $\{5, 4\}$: $C_{52} + C_{24} - C_{54} = 3 + 4 - 3 = 4$

Aresta $\{4, 1\}$: $C_{42} + C_{21} - C_{41} = 4 + 3 - 1 = 6$

Cidade 3:

Aresta $\{1, 5\}$: $C_{13} + C_{35} - C_{15} = 4 + 2 - 2 = 4$

Aresta $\{5, 4\}$: $C_{53} + C_{34} - C_{54} = 2 + 5 - 3 = 4$

Aresta $\{4, 1\}$: $C_{43} + C_{31} - C_{41} = 5 + 4 - 1 = 8$

$R = \{1, 2, 5, 4\}$



Há cidades por visitar? Sim.

Cidade 3:

Resposta $\{1, 2\}$: $C_{13} + C_{32} - C_{12} = 4 + 8 - 3 = 9$

Resposta $\{2, 5\}$: $C_{23} + C_{35} - C_{25} = 8 + 2 - 3 = 7$

Resposta $\{5, 4\}$: $C_{53} + C_{34} - C_{54} = 2 + 5 - 3 = 4 \Leftarrow \min$

Resposta $\{4, 1\}$: $C_{43} + C_{31} - C_{41} = 5 + 4 - 1 = 8$

$$R = \{1, 2, 5, 3, 4\}$$

Há cidades por visitar? Não!

A rota obtida é $R = (1, 2, 5, 3, 4, 1)$ $\bar{q}$ tem

Custo $C_{12} + C_{25} + C_{53} + C_{34} + C_{41} = 3 + 3 + 2 + 5 + 1 = 14$.

Podemos concluir $\bar{q} \leq 14$.

Exercício 6

Monday, October 09, 2023

9:43 AM

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado, onde E é o conjunto das arestas em vez do conjunto de arcos. Considere as variáveis x_e , que tomam valor 1 se a aresta $e \in E$ é visitada na solução.

- Adapte a formulação SCE para o caso simétrico.
- Adapte a formulação CC para o caso simétrico.
- Determine a solução ótima da instância apresentada no exercício anterior utilizando as formulações desenvolvidas na alínea anterior. Quais são as vantagens/desvantagens de usar a formulação simétrica comparativamente à assimétrica?

Alínea (a)

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{se aresta } e \in E \text{ é usada na solução} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{e \in E} x_e = |V|$$

$$e \in \delta(i) \quad \text{com} \quad \left[\begin{array}{l} e \in E: \\ e = (i, j), j \in V \end{array} \right]$$

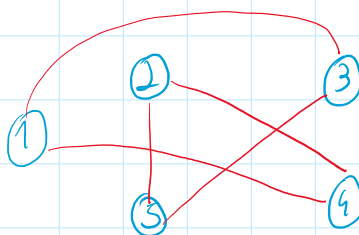
$$\delta(i) = \{ (i, j) \in E : j \in V \}$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq 2, \quad \forall S \subsetneq V : S \neq \emptyset \quad (*)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E$$

Alínea (b)

Resolvendo sem as rest. (*) obtemos:



so to
problem

$$z = 14$$

Restrição : $x_{13} + x_{31} + x_{15} + x_{51} + x_{23} + x_{32} + x_{25} + x_{52}$
 $+ x_{43} + x_{34} + x_{45} + x_{54} \geq 2$

Após adicionar a rest. é obtida a sol. $\bar{q}$
com valor $z=14$ (como sabemos do ex. anterior).

Exercício 7

Monday, October 09, 2023

2:54 PM

8. Considere a seguinte instância do problema do caixeiro viajante.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	-	7	10	12	2	9
C2	7	-	11	14	8	1
C3	10	11	-	12	6	8
C4	12	14	12	-	7	9
C5	2	8	6	7	-	11
C6	9	1	8	9	11	-

- Construa uma solução admissível utilizando a heurística do vizinho mais próximo.
- Identifique um minorante relaxando as restrições de eliminação de subcircuitos. O que pode concluir sobre o valor ótimo da instância apresentada?
- Introduza, na solução da alínea anterior, as restrições relaxadas até encontrar uma solução ótima.
- Comente a seguinte afirmação: "Se eu introduzir o número de restrições que introduzi na alínea anterior obtenho sempre a solução ótima da instância."

↳ Ver como é dito na outra

Alínea (a)

$$R = \{C_1\}$$

Há cidades por visitar? Sim!

Cidade $j \in V \setminus R$ que minimiza c_{1j} : C_5

$$R = \{C_1, C_5\}$$

Há cidades por visitar? Sim.

Cidade j que minimiza $c_{5j} \Rightarrow C_3$

$$R = \{C_1, C_5, C_3\}$$

Há cidades por visitar? Sim.

Cidade j que minimiza $c_{3j} \Rightarrow C_6$

$$R = \{C_1, C_5, C_3, C_6\}$$

há cidades por visitar? Sim.

Cidade j que minimiza $C_{6j} \Rightarrow C_2$

$$R = \{C_1, C_5, C_3, C_6, C_2\}$$

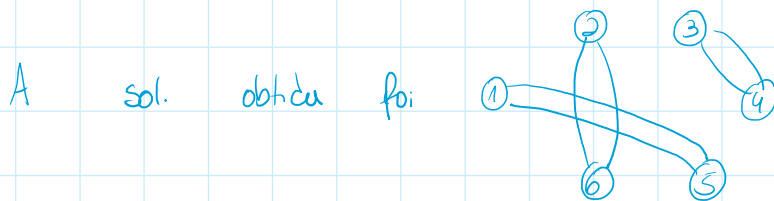
há cidades por visitar? Sim.

$$R = \{C_1, C_5, C_3, C_6, C_2, C_4\} \quad (\text{só faltava } C_4)$$

A sol. obtida utilizando aheur. do vizinho + próximo é $R = \{C_1, C_5, C_3, C_6, C_2, C_4, C_1\}$ e o seu custo é $C_{15} + C_{53} + C_{36} + C_{62} + C_{24} + C_{41} = 2 + 6 + 8 + 1 + 14 + 12 = 43$.

Podemos concluir $\bar{z} \leq 43$.

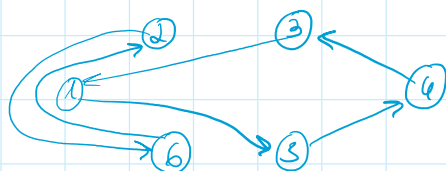
Alínea (b)



com valor 30. Logo, $z \geq 30$.

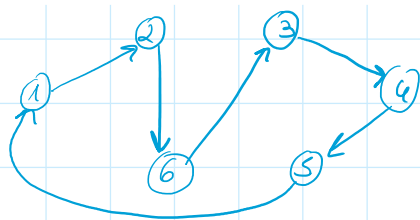
Alínea (c)

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{56} \geq 1$$



valor = 33

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{61} + x_{63} + x_{64} + x_{65} \geq 1$$



Como é sol.
admissível para o TSP
é SO. Logo, $z=37$.

9. Considere a seguinte instância do problema do caixeiro viajante.

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	-	3	7	6	2
C2	4	-	11	9	6
C3	2	6	-	1	5
C4	5	5	3	-	4
C5	6	2	7	6	-

- Obtenha uma solução admissível para a instância utilizando a heurística de inserção de menor custo.
- Identifique um minorante recorrendo à relaxação das restrições de saída de um nodo.
- Introduza, na solução da alínea anterior as restrições relaxadas até encontrar uma solução ótima para a instância apresentada.

Alínea (a)

$R = \{3, 4\}$

Há cidades por visitar? Sim!

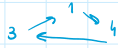
Nodo (3,4):

$$\text{Cidade 1: } C_{31} + C_{41} - C_{34} = 2 + 6 - 1 = 7 \Leftarrow \min$$

$$\text{Cidade 2: } C_{32} + C_{42} - C_{34} = 6 + 9 - 1 = 14$$

$$\text{Cidade 5: } C_{35} + C_{45} - C_{34} = 5 + 4 - 1 = 8$$

$R = \{3, 1, 4\}$



Há cidades por visitar? Sim

Cidade 2:

$$\text{Resposta } \{3, 1\}: C_{32} + C_{12} - C_{31} = 6 + 4 - 7 = 3$$

$$\text{Resposta } \{1, 4\}: C_{12} + C_{42} - C_{14} = 3 + 9 - 6 = 6$$

$$\text{Resposta } \{4, 3\}: C_{42} + C_{23} - C_{43} = 5 + 11 - 3 = 13$$

Cidade 5:

$$\text{Resposta } \{3, 1\}: C_{35} + C_{51} - C_{31} = 5 + 6 - 2 = 9$$

$$\text{Resposta } \{1, 4\}: C_{45} + C_{54} - C_{14} = 2 + 6 - 6 = 2 \Leftarrow \min$$

$$\text{Resposta } \{4, 3\}: C_{45} + C_{53} - C_{43} = 4 + 7 - 3 = 8$$

$R = \{3, 1, 5, 4, 3\}$



Há cidades por visitar? Sim!

Cidade 2:

$$\text{Resposta } \{1, 3\}: C_{12} + C_{23} - C_{13} = 3 + 11 - 7 = 7$$

$$\text{Resposta } \{3, 4\}: C_{32} + C_{24} - C_{34} = 6 + 9 - 1 = 14$$

$$\text{Resposta } \{4, 5\}: C_{42} + C_{25} - C_{45} = 5 + 6 - 4 = 7$$

$$\text{Resposta } \{5, 1\}: C_{52} + C_{21} - C_{51} = 2 + 4 - 6 = 0 \Leftarrow \min$$

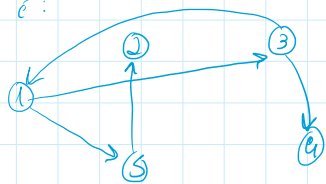
$R = \{1, 3, 4, 5, 2, 1\}$

Há cidades por visitar? Não! FIM.

A sol. obtida é $R = (1, 3, 4, 5, 2, 1)$ e o seu custo é $C_{13} + C_{34} + C_{45} + C_{52} + C_{21} = 7 + 1 + 4 + 2 + 4 = 18$.

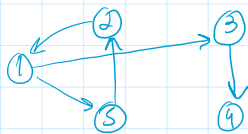
Alínea (b)

A sol. obtida adicionando as rest. de saída do nó 1 é:



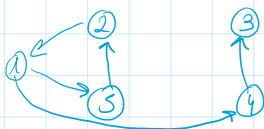
e tem custo 14.

Adicionado as rest. de saída para o nó 2
 $x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$ obtemos:



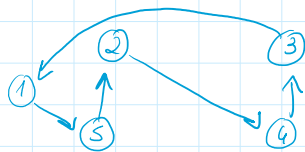
com valor 16.

Adicionando as rest. de saída para o nó 4
 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1$ obtemos:



com valor 17.

Adicionando a rest. de saída para o nó 3
obtemos:



com valor 18.

Como esta sol. é admissível para o TSP é a so. logo, $z = 18$.

Exercício 9

Monday, October 09, 2023

5:41 PM

9. Considere a seguinte instância para o problema do caixeiro viajante:

	1	2	3	4	5
1	-	22	61	44	50
2	22	-	40	22	31
3	61	40	-	22	42
4	44	22	22	-	22
5	50	31	42	22	-

Obtenha uma solução admissível para a instância apresentada utilizando as seguintes heurísticas:

- (a) Heurística do vizinho mais próximo.
- (b) Heurística da inserção de menor custo.

Alínea (a)

1. $R = \{1\}$ e $i = 1$.

2. Há cidades por visitar? Sim.

$R = (1, 2)$ e $i = 2$.

3. Há cidades por visitar? Sim.

$R = (1, 2, 4)$ e $i = 4$.

4. Há cidades por visitar? Sim.

$R = (1, 2, 4, 3)$ e $i = 3$.

5. Há cidades por visitar? Sim.

$R = (1, 2, 4, 3, 5)$ e $i = 5$.

6. Há cidades por visitar? NÃO. FIM.

A sol. obtida com a heurística do vizinho + próximo é $(1, 2, 4, 3, 5, 1)$
 e $v(V+P) = 22 + 22 + 22 + 42 + 50 = 158$.

Alínea (b)

1 2 3 4 5

1. $R = (1, 2)$ Há empates, podemos ter feito $R = (2, 4)$
 ou $R = (3, 4)$ ou $R = (4, 5)$.

2. Há cidades por visitar? SIM

• Cidade 3:

- Aresta $\{1, 2\}$: $C_{13} + C_{32} - C_{12} = 61 + 40 - 22 = 79$

• Cidade 4:

- Aresta $\{1, 2\}$: $C_{14} + C_{42} - C_{12} = 44 + 22 - 22 = 44$

• Cidade 5:

- Aresta $\{1, 2\}$: $C_{15} + C_{52} - C_{12} = 50 + 31 - 22 = 59 \leftarrow \text{min}$

$R = (1, 5, 2)$

2. Há cidades por visitar? Sim.



• Cidade 3:

- Aresta $\{1, 5\}$: $C_{13} + C_{35} - C_{15} = 61 + 42 - 50 = 53$

- Aresta $\{5, 2\}$: $C_{53} + C_{32} - C_{52} = 42 + 40 - 31 = 51$

- Aresta $\{2, 1\}$: $C_{23} + C_{31} - C_{21} = 40 + 61 - 22 = 79$

• Cidade 4:

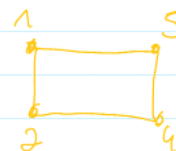
- Aresta $\{1, 5\}$: $C_{14} + C_{45} - C_{15} = 44 + 22 - 50 = 16$

- Aresta $\{5, 2\}$: $C_{54} + C_{42} - C_{52} = 22 + 22 - 31 = 13 \leftarrow \text{min}$

- Aresta $\{2, 1\}$: $C_{24} + C_{41} - C_{21} = 22 + 44 - 22 = 44$

• $R = (1, 5, 4, 2)$

3. Há cidades por visitar? Sim.



• Cidade 3:

$$\text{- Aresta } \{1, 5\}: C_{13} + C_{35} - C_{15} = 61 + 42 - 50 = 53$$

$$\text{- Aresta } \{5, 4\}: C_{53} + C_{34} - C_{54} = 42 + 22 - 22 = 42$$

$$\text{- Aresta } \{4, 2\}: C_{43} + C_{32} - C_{42} = 22 + 40 - 22 = 40 \text{ min}$$

$$\text{- Aresta } \{2, 1\}: C_{23} + C_{31} - C_{21} = 40 + 61 - 22 = 79$$

• $R = (1, 5, 4, 3, 2)$

4. Há cidades por visitar? Não. FIM.

A sol. obtida com a heurística IMC foi
 $(1, 5, 4, 3, 2, 1)$ e $v(\text{IMC}) = C_{15} + C_{54} + C_{43} + C_{32} + C_{21} =$
 $= 50 + 22 + 22 + 40 + 22 = 156$

10. Crie um enunciado para uma aplicação prática do problema do roteamento de veículos.

O Sr. S tem uma loja de frigoríficos e tem uma caminhão que apenas tem capacidade para transportar 2 frigoríficos. Devido às promoções da última semana, o Sr. S tem 4 frigoríficos para entregar amanhã. A loja do Sr. S localiza-se em Alenquer e as entregas devem ser feitas em Ota, Mexurana, Abregada e Artigana. Determinar qual o melhor plano de entrega, sabendo que o Sr. S tem que fazer 2 viagens para entregar os frigoríficos devido à capacidade da Caminhão.

Exercício 11

Monday, October 30, 2023

7:58 AM

11. Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

	0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
0	-	20	55	50	40	15	30	40
C1	20	-	40	20	50	25	15	50
C2	55	40	-	50	20	30	40	10
C3	50	20	50	-	20	50	60	35
C4	40	50	20	20	-	50	60	20
C5	15	25	30	50	50	-	80	20
C6	30	15	40	60	60	80	-	25
C7	40	50	10	35	20	20	25	-

Existem três veículos homogêneos com capacidade 80 e as procuras dos clientes são apresentadas na tabela seguinte.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
d_i	45	50	30	20	25	35	30

- Formule o problema utilizando a formulação MTZ e determine a sua solução ótima.
- Considere a formulação SCF.
 - Determine o valor da sua relaxação linear utilizando as restrições de limite $0 \leq f_{ij} \leq Qx_{ij}$.
 - Determine o valor da sua relaxação linear utilizando as restrições de limite $d_j x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - d_i)x_{ij}$ e compare-o com o valor obtido na alínea anterior.
 - Determine o valor ótimo da instância apresentada.

Alínea (a)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se algum dos veículos atende o caso } (i,j) \in A \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

U_i = procura distribuída pelo veículo qdo sai do nó $i \in N \cup \{0\}$

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} x_{0j} = 3$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ij} = \sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ji}, \quad \forall i \in N \cup \{0\}$$

$$U_i - U_j + Q x_{ij} \leq Q - d_j, \quad \forall (i,j) \in A : i,j \neq 0$$

$$d_i \leq U_i \leq Q, \quad \forall i \in N$$

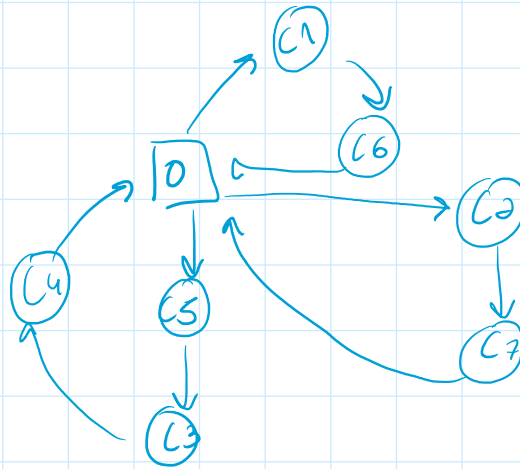
$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$\forall (i, j) \in A$$

A so é

e tem custo

295.



Alcunha (b)

f_{ij} = fluxo atravessa arco $(i, j) \in A$, o $\bar{q}$ corresponde à capacidade disp. do veículo

$$\text{Min} \quad \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} x_{0j} = K$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ij} = \sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ji}, \quad \forall i \in N \cup \{0\}$$

$$\sum_{i \in N} f_{0i} = \sum_{i \in N} d_i$$

$$\sum_{i \in N \cup \{0\}} f_{ji} = \sum_{i \in N \cup \{0\}} f_{ij} + d_i, \quad \forall i \in N$$

$$0 \leq f_{ij} \leq Q x_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

"

Alinea (b)(i)

Utilizando as rest. $0 \leq f_{ij} \leq Q_{ij}$ o valor da sol. linear é: 244.6875.

Alinea (b)(ii)

Utilizando os limites melhorados $d_j x_{ij} \leq f_{ij} \leq (a-d_i) x_{ij}$ o valor da sol. linear é: 274.3750085, o $\bar{q}$ corresponde a uma melhoria de 30 un.

Alinea (b)(iii)

O valor ótimo é 295 e a sol. corresponde à sol. apresentada na linha (a).

Exercício 12

Monday, October 30, 2023 11:16 AM

12. O Sr. Y tem uma pequena empresa de distribuição de enlatados com uma frota de dois caminhões. O caminhão 1 tem capacidade para transportar 80 caixas de enlatados enquanto o caminhão 2 tem capacidade para transportar 40. As necessidades em caixas de enlatados dos clientes do Sr. X assim com as distâncias entre o centro de distribuição (depósito) e as localizações dos são apresentadas na tabela seguinte.

		C1	C2	C3	C4	C5	C6
	d_i	28	22	26	33	20	34
c_{ij}	0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
0	-	37	28	35	21	30	39
C1	32	-	28	29	31	31	33
C2	38	28	-	38	27	30	24
C3	37	29	20	-	38	20	35
C4	25	26	33	37	-	25	34
C5	37	40	21	20	32	-	32
C6	20	20	34	32	29	22	-

Desenvolva uma formulação compacta para o problema apresentado e indique qual o plano ótimo de distribuição que o Sr. Y deve adotar.

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se arco } (i,j) \in A \text{ atravessado pelo caminhão } k=1,2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } i \in N \text{ é visitado pelo caminhão } k=1,2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

f_{ij}^k = qt. de fluxo q atravessa o arco $(i,j) \in A$ a ser usado ao caminhão k, $\bar{q}$ corresponde à procura q ainda falta satisfazer

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^2 \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1, \quad k=1,2 \quad (\text{será um arco para cada caminhão})$$

$$\sum_{j \in N \cup 0} x_{ij}^k = \sum_{j \in N \cup 0} x_{ji}^k, \quad \forall i \in N, k=1,2 \quad (\text{para cada rota, o grau de entrada é igual ao grau de saída})$$

$$\sum_{j \in N \cup 0} x_{ij}^k = y_i^k, \quad \forall i \in N, k=1,2 \quad (\text{se um nó é visitado numa rota, há um arco a sair nessa rota})$$

$$\sum_{k=1}^2 y_i^k = 1, \quad \forall i \in N \quad (\text{cliente visitado})$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{j \in N} f_{0j}^k = D$$

(sai a procura total do depósito)

$$\sum_{j \in N_{\text{total}}} f_{ji}^k = \sum_{j \in N} f_{ij}^k + d_i g_i^k, \quad \forall i \in N, k=1,2$$

(cons. fluxo para cada cliente em cada rota)

$$0 \leq f_{ij}^k \leq Q_k x_{ij}^k,$$

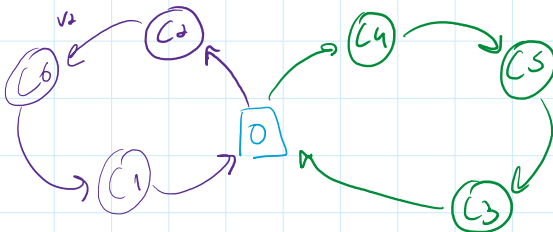
$$\forall (i,j) \in A, k=1,2$$

(rel. f com x)

$$x_{ij}^k, g_i^k \in \{0,1\},$$

$$\forall (i,j) \in A, i \in N, k=1,2$$

A SO obtida é: v_1



e tem valor 207.

Exercício 13

Monday, October 30, 2023

1:46 PM

13

O Sr. U tem dois veículos disponíveis com capacidade 130 para fazer a distribuição de produtos adquiridos na sua loja online. Quando fazem a sua encomenda, os clientes indicam uma janela temporal $[a_i, b_i]$ que corresponde ao intervalo de tempo durante qual a sua encomenda pode ser entregue. Na tabela seguinte encontra-se a procura de cada cliente (d_i), a janela temporal em que devem ser servidos ($[a_i, b_i]$) e o tempo de serviço (TS), o tempo que a sua encomenda demora a ser entregue.

Página 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
d_i	45	50	30	20	25	35	30
$[a_i, b_i]$	[2, 15]	[8, 20]	[10, 30]	[2, 15]	[10, 30]	[10, 30]	[15, 40]
TS	2	4	2	3	4	2	3

A matriz de do tempo de deslocação é apresentada de seguida.

	0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
0	-	10	8	7	6	4	5	6
C1	8	-	4	2	5	3	2	5
C2	10	4	-	5	2	3	4	1
C3	6	3	4	-	2	5	6	4
C4	5	4	3	3	-	5	6	2
C5	6	3	1	6	4	-	8	2
C6	7	2	5	5	7	5	-	3
C7	8	5	2	4	3	6	5	-

- Construa uma formulação compacta para o problema apresentado.
- Determine o plano ótimo de distribuição para o Sr. U.
- Tendo em conta as especificidades do problema, crie uma desigualdade válida.

Alcena (a)

t_i - instante em q o cliente $i \in N$ começa a ser servido

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sa:} \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = |K|$$

sa:

$$\sum_{j \in N} x_{0j} = |K|$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in N$$

$$t_i + s_i + d_{ij} x_{ij} \leq t_j + \overbrace{M - M x_{ij}}^{M - M x_{ij}}, \quad \forall (i,j) \in A; i \neq 0$$

$$t_i - t_j + (M + d_{ij}) x_{ij} \leq M - s_i \quad M = 40$$

$$d_{0i} x_{0i} \leq t_i, \quad \forall i \in N$$

$$a_i \leq t_i \leq b_i$$

$$u_i - u_j + Q x_{ij} \leq Q - d_{ij} \quad \forall (i,j) \in A; i, j \neq 0$$

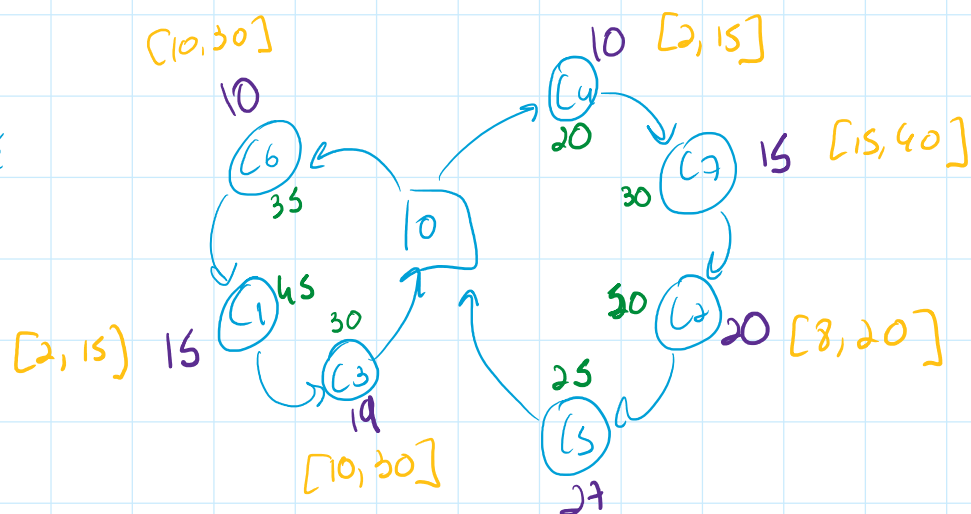
$$d_i \leq u_i \leq Q$$

$$t_i \geq 0$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Alcena (b)

A SO e



[10, 30]

e tem valor ótimo 36.

Alínea (c)

Uma das, válida é $x_7 = 0$, pois a janela temp. do 1 é antes da do 7 e logo nunca vamos do 7 para o 1.

Exercício 14

Monday, October 30, 2023

8:45 AM

14

Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

	0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
0	-	20	55	50	40	15	30
C1	25	-	40	20	50	25	15
C2	60	35	-	50	20	30	40
C3	35	30	45	-	20	50	60
C4	25	40	35	30	-	50	60
C5	30	35	10	60	35	-	80
C6	45	20	35	50	70	45	-

Considere ainda que estão disponíveis três veículos homogêneos com capacidade 65 e que as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
d_i	23	17	47	20	36	43

- Construa uma relaxação do problema removendo as restrições de eliminação de subcircuitos e as restrições de capacidade e determine um minorante para o valor ótimo.
- Adicione cortes RCC até obter uma solução admissível para a instância apresentada.

Página 4

Alínea (a)

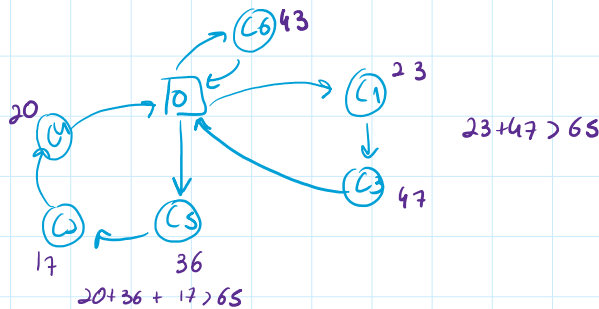
$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.:} \sum_{j \in N} x_{0j} = K$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ij} = \sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Um minorante para o valor ótimo da inst. apresentada é 220 e a SO da relaxação é:



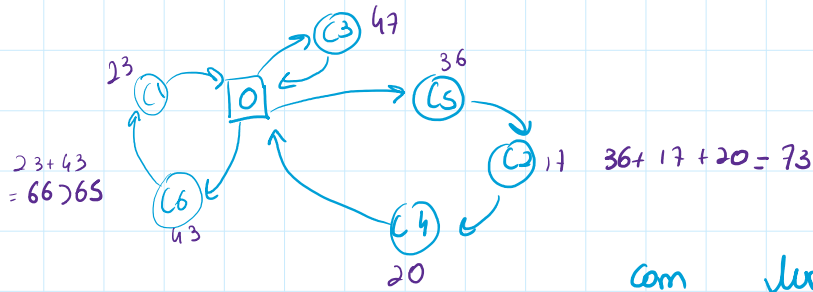
Alínea (b)

A rota $(0, C1, C3, 0)$ $\bar{\pi}$ é admissível em termos de capacidade do veículo. Vamos adicionar a seguinte

A rota $(0, c_1, c_3, 0)$ n̄ é admissível em termos de capacidade do veículo. Vamos adicionar a seguinte RC:

$$x_{0c_1} + x_{c_1c_3} + x_{c_3c_1} + x_{c_3c_0} + x_{c_0c_3} + x_{0c_3} + x_{c_3c_0} + x_{c_0c_1} + x_{c_1c_0} + x_{c_0c_3} \geq \left\lceil \frac{23+47}{65} \right\rceil = \lceil 1.07 \rceil = 2$$

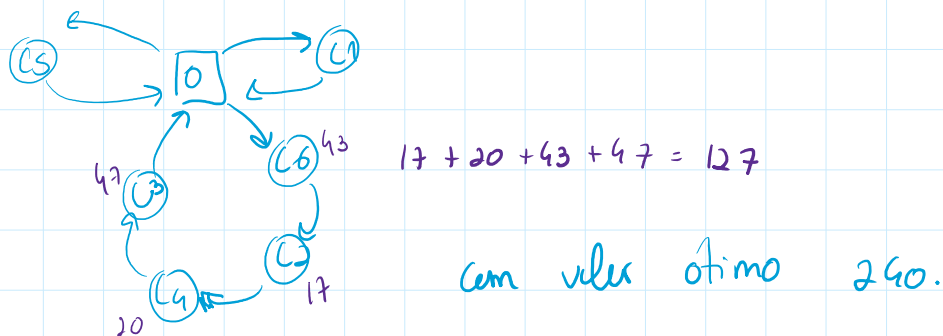
Resolvendo a pt. com a rest. adicional obtemos:



A rota $(0, c_5, c_2, c_4)$ n̄ é admissível em termos de capacidade. Vamos adicionar o corte:

$$x_{0c_2} + x_{c_1c_2} + x_{c_3c_2} + x_{c_6c_2} + x_{0c_4} + x_{c_1c_4} + x_{c_3c_4} + x_{c_6c_4} + x_{0c_5} + x_{c_1c_5} + x_{c_3c_5} + x_{c_6c_5} \geq \left\lceil \frac{73}{65} \right\rceil = 2$$

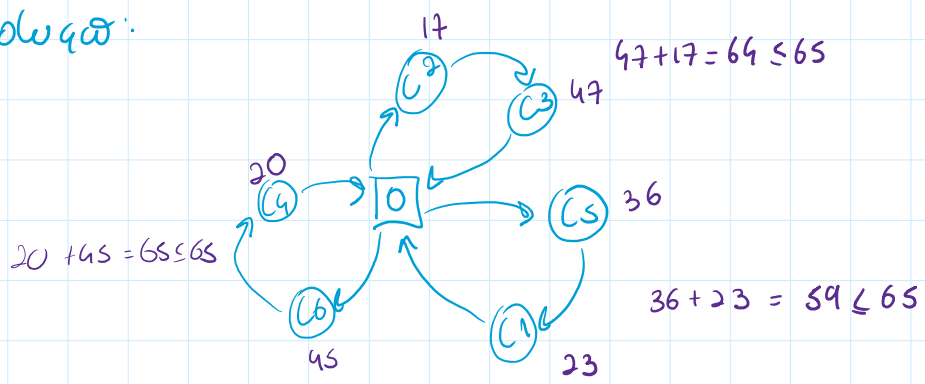
Resolvendo a rest. adicional obtemos:



A rota $(0, c_6, c_2, c_4, c_3)$ n̄ satisfaz as rest. de capacidade. Vamos adicionar o seguinte corte:

$$x_{0c_2} + x_{c_1c_2} + x_{c_3c_2} + x_{0c_3} + x_{c_1c_3} + x_{c_3c_3} + x_{0c_4} + x_{c_1c_4} + x_{c_3c_4} + x_{0c_6} + x_{c_1c_6} + x_{c_3c_6} \geq \left\lceil \frac{127}{65} \right\rceil = 2$$

Depois de adicionados 27 costs obtiver-se a solução:



com valor 340. Esta sol. é admissível para o problema original. Logo é a SO.

Exercício 15

Monday, October 30, 2023 9:55 AM

15 Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

	0	C1	C2	C3	C4	C5
0	-	20	55	50	40	15
C1	20	-	40	20	50	25
C2	55	40	-	50	20	30
C3	50	20	50	-	20	50
C4	40	50	20	20	-	50
C5	15	25	30	50	50	-

Existem dois veículos homogêneos com capacidade ~~90~~ 100 e as procuras dos clientes são apresentadas na tabela seguinte.

	C1	C2	C3	C4	C5
d_i	45	50	30	20	25

- Determine uma solução admissível utilizando a heurística de Clarke & Wright.
- Proponha uma heurística de decomposição do tipo Agregar $\rightarrow$ Rotear e aplique-a.
- Proponha uma heurística de decomposição do tipo Rotear $\rightarrow$ Agregar e aplique-a.
- Compare as soluções admissíveis obtidas nas alíneas anteriores entre si e com a solução ótima.

Alínea (a)

Inicialização: $R_1 = (0, c_1, 0)$; $R_2 = (0, c_2, 0)$;
 $R_3 = (0, c_3, 0)$; $R_4 = (0, c_4, 0)$; $R_5 = (0, c_5, 0)$.

Calcular a poupança:

$c_i + c_j - c_{ij}$					
S_{ij}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	-	35	50	10	20
C_2	-	-	55	75	40
C_3	-	-	-	70	15
C_4	-	-	-	-	5
C_5	-	-	-	-	-

Seja $R = \emptyset$ e $i = 1$.

R é admissível? Não.

(c_2, c_4) origina a maior poupança (75).

c_2 e c_4 são não visitados? Sim

$R = \{(0, c_2, c_4, 0)\}$ e $i = 2$

R é admissível? Não.

(C_3, C_4) origina a maior poupança (70).

C_3 e C_4 são $\bar{n}$ visitados? Não

Existem cursos $(C_4, 0)$ e $(0, C_3)$ em $R \cup R_i$? Sim.

$$d_{C_2} + d_{C_3} + d_{C_4} = 50 + 30 + 20 > 90 \Rightarrow \bar{n} \text{ ad. e } i=3$$

R é admissível? Não.

(C_2, C_3) origina a maior poupança

$\Rightarrow \bar{n}$ é admissível e $i=4$.

R é admissível? Não

(C_1, C_3) origina a maior poupança

C_1 e C_3 são não visitados? Sim

$$R = \{(0, C_2, C_4, 0), (0, C_1, C_3, 0)\} \quad d_{C_1} + d_{C_3} = 45 + 30 < 90 \\ \text{e } i=6$$

R admissível? Não

(C_2, C_5) origina a maior poupança.

Existem cursos $(0, C_2)$, $(C_5, 0)$ em $R \cup R_i$.

$$d_{C_2} + d_{C_4} + d_{C_5} = 50 + 20 + 25 \leq 95 \quad \text{Sim.}$$

$$R = \{(\underbrace{0, C_5, C_2, C_4, 0}_{50 + 20 + 25 \leq 95}, \underbrace{0, C_1, C_3, 0}_{45 + 30 \leq 95})\}$$

R é admissível? Sim. FIM.

R é admissível? Sim. $r \leq M$.

A sol. obtida pelaheur. de CLW é:

$$R = \{(0, c_5, c_2, c_4, 0), (0, c_1, c_3, 0)\} \quad \bar{q} \text{ tem valor}$$

$$C_{0c5} + C_{c5c2} + C_{c2c4} + C_{c40} + C_{0c1} + C_{c1c3} + C_{c30}$$

$$= 15 + 30 + 20 + 40 + 20 + 20 + 50 = 195.$$

Alínea (b)

- Agrupar os nodos por ordem lexicográfica
- Rotar com o $v+p$.

Agrupar:

$$c_1 + c_2 = 95 \leq 95 \leftarrow \text{Grupo 1} = \{c_1, c_2\}$$

$$c_3 + c_4 + c_5 = 75 \leq 95 \leftarrow \text{Grupo 2} = \{c_3, c_4, c_5\}$$

Rotar:

- Grupo 1: $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow 0$
- Grupo 2: $0 \rightarrow c_5 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow 0$

A sol. obtida com uma heur. do tipo Agrupar $\rightarrow$

$$\rightarrow \text{Rotar é } R = \{(0, c_1, c_2, 0), (0, c_5, c_3, c_4, 0)\}$$

$$\text{e tem valor } C_{0c1} + C_{c1c2} + C_{c20} + C_{0c5} + C_{c5c3} + C_{c3c4} + C_{c40} \\ = 20 + 40 + 55 + 15 + 50 + 20 + 40 = 240.$$

Alínea (c)

- Rotar com $v+p$
- Agrupar até caber

Rotar:

$$0 \rightarrow C_5 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2 \rightarrow 0$$

Agrupar:

$$d_5 + d_1 = 25 + 45 = 70$$

$$d_5 + d_1 + d_3 = 70 + 30 \leq 100$$

$$(0, C_5, C_1, C_3)$$

$$d_4 + d_2 \leq 100$$

$$(0, C_4, C_2, 0)$$

A sol. obtida com aheur. do tipo Rotar $\rightarrow$ Agrupar foi $R = \{(0, C_5, C_1, C_3, 0), (0, C_4, C_2, 0)\}$ q tem custo $C_{0C_5} + C_{C_5C_1} + C_{C_1C_3} + C_{C_30} + C_{0C_4} + C_{C_4C_2} + C_{C_20} = 15 + 25 + 20 + 50 + 40 + 20 + 20 = 190$.

Alinca: (d)

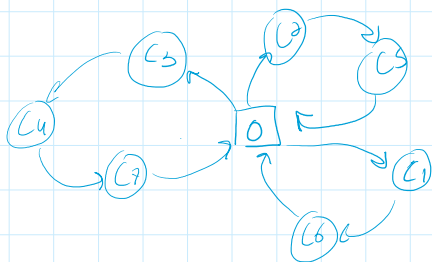
A sol. obtida pela heur. de Clarke & Wright tem valor 195, a da heur. Agrupar $\rightarrow$ Rotar 240 e da heur. Rotar $\rightarrow$ Agrupar 190. Assim, podemos concluir q $\bar{z} \leq 190$.

16. Resolva de novo os Exercícios 11, 14 e 15 utilizando o VRP Spreadsheet Solver. Compare as soluções obtidas pelo VRP Spreadsheet Solver com as que obteve quando resolveu os exercícios. **FALTA**

+ ex. 12 e 13 → Para o 13 preciso de definir bem as junções temporais

Exercício 11

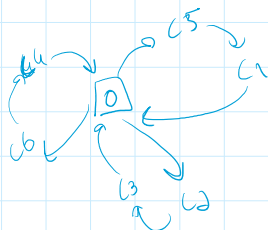
Utilizando o VRP Solver para resolver o exercício 11 obtive-se a seguinte solução:



q tem custo 295 (é so).

Exercício 14

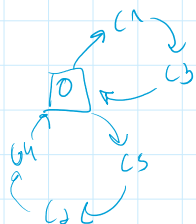
Utilizando o VRP Solver a sol. obtida foi:



com custo 340 (é so).

Exercício 15

Utilizando o VRP Solver obtivemos a seguinte solução:

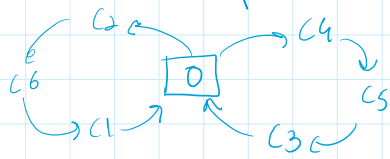


q tem valor 195. O valor desta sol. é igual ao da sol. obtida pela heurística da CLW, mas n podemos concluir q é so.

Exercício 12

A sol. obtida pelo VRP Solver foi:

A sol. obtida pelo VRP Solver foi:



$\bar{q}$ tem custo 207. Pelo ex. 12 sabemos $\bar{q}$
a SO tem valor 207, logo a sol obtida é a SO.