Departamento de Matemática
Licenciatura em Gestão e Desporto
Matemática I – 1º Semestre – 2024/2025

Época Normal: 12 de Dezembro de 2024
Duração: 2h
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas

1. **[2 val]** Encontre uma proposição equivalente que apenas use a negação $\neg$, a conjunção $\wedge$ e o quantificador existencial, $\exists$:

$$\neg\forall_x \left[(p(x) \wedge \exists_y q(x,y)) \Rightarrow (r(x) \vee \forall_y q(x,y))\right].$$

2. Seja $A = \mathbb{Z}$ e $B = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que as seguintes afirmações são falsas:

a) **[0.5 val]** $\forall_{x\in A}\exists_{y\in B} x = \frac{1}{y}$

b) **[1 val]** $B = \operatorname{int}(B) \cup \operatorname{fr}(B)$

c) **[0.5 val]** $A \cup B$ é compacto.

3. Considere a seguinte série geométrica:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3*2^2} + \frac{5^2}{3*2^5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

a) **[1 val]** Obtenha uma formula explícita para a sucessão $(u_n)_{n\geq 0}$.

b) **[1.5 val]** Mostre que a série é convergente e calcule o seu valor.

4. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x} + \ln(x+2)}{(x-4)(x-2)}$.

a) **[1.5 val]** Determine analiticamente o domínio da função f, D_f.

[Caso não tenha determinado D_f, use $D_f = (]-3,7] \cap]-4,5]) \setminus]2,3]$ nas alíneas seguintes.]

b) **[1 val]** Indique o $\operatorname{int}(D_f)$ e os pontos de acumulação do conjunto D_f.

5. Seja $g(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1-e^x}$. Calcule os seguintes limites:

a) **[1 val]** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

b) **[1 val]** $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

6. Seja $h(x) = ln(x) + \dfrac{1}{x}$

a) **[2 val]** Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 centrado em $x = 1$ da função h.

b) **[1 val]** Mostre que $x = 1$ é um ponto crítico de h e classifique-o.

7. Calcule as seguintes primitivas:

a) **[1.5 val]** $P(x+2x^3)\sqrt{x^2+x^4} + (x+1)cos(2x)$

b) **[2 val]** $P\dfrac{x^3+1}{(x-2)^2}$

8. Seja $F(x) = \int_0^{x^2} te^{t^2-1}dt$.

a) **[1.5 val]** Calcule o valor de $F(1)$.

b) **[1 val]** Estude a monotonia da função $F(x)$.

Função	Derivada
u^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
e^u	$e^u u'$
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$cos(u)$	$-u' sen(u)$
$sen(u)$	$u' cos(u)$
$arccos(u)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$arcsen(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$