



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 7 e 8 (Semana 4)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)

- **Capítulo 1:** Análise Descritiva
- **Capítulo 2:** Probabilidades

Aulas TP (Semanas 3 a 6)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas TP (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas TP (Semanas 10 a 12)

- **Capítulo 5:** Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

3. Variáveis aleatórias unidimensionais

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

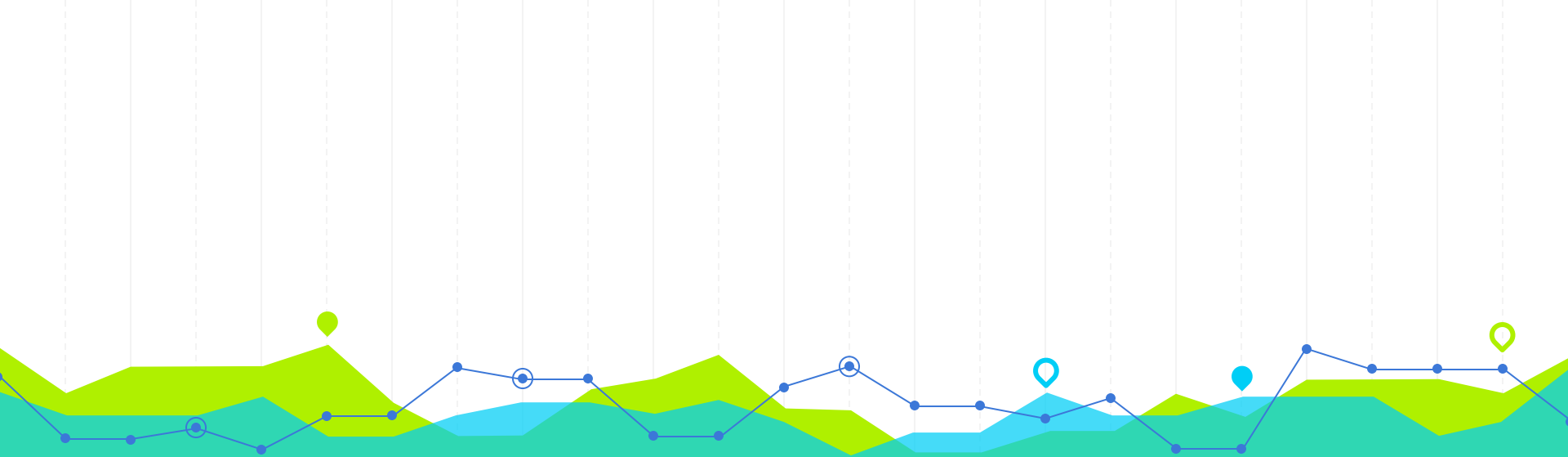
3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória



Variáveis Aleatórias Discretas

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

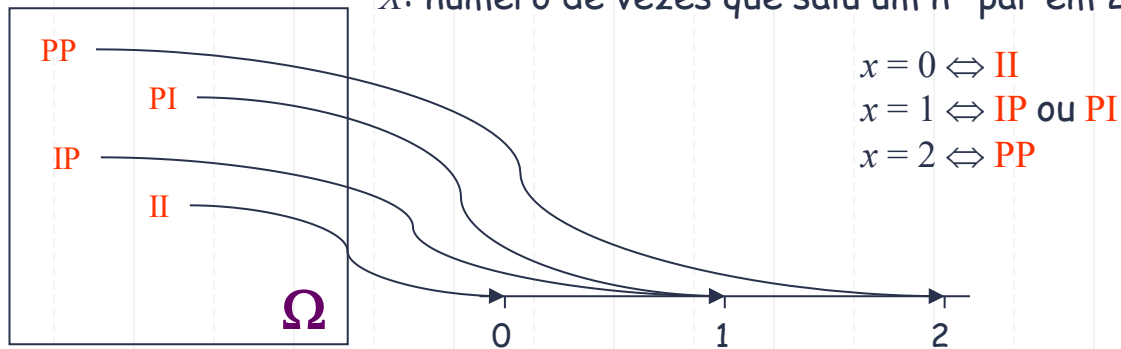
1

Variável Aleatória

Uma função X que associa a cada elemento w do espaço amostral Ω um valor $x \in \mathbf{R}$ é denominada de *variável aleatória (v.a.)*.

Experiência: lançar um 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I = impar)

X : número de vezes que saiu um nº par em 2 lançamentos do dado



Definição: *Uma variável aleatória é uma aplicação do espaço dos possíveis em $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

Tipos de Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. é **discreta** quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for **finito** ou **numerável de possibilidades**.

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 1

Considere-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (M : masculino e F : feminino).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(\underbrace{MMM}_{\omega_1}), (\underbrace{MMF}_{\omega_2}), (\underbrace{MFM}_{\omega_3}), (\underbrace{FMM}_{\omega_4}), (\underbrace{MFF}_{\omega_5}), (\underbrace{FMF}_{\omega_6}), (\underbrace{FFM}_{\omega_7}), (\underbrace{FFF}_{\omega_8})\}$$

Defina-se a v.a. X : nº de crianças do sexo masculino (M).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

→ Então X assume valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, logo é uma **variável aleatória discreta**.

Variável Aleatória Contínua

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

Variável Aleatória Contínua: Exemplo



Considere-se o tempo de vida, em horas, das lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina-se a v.a. T : tempo de vida, em horas, de uma lâmpada que foi escolhida, ao acaso, da fábrica.

→ Então, T é uma **variável aleatória contínua** que assume qualquer valor real não negativo.

Função Massa de Probabilidade

Função massa de probabilidade (f.m.p): É a função que atribui a **cada valor x_i da v. a. discreta X** a sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função massa de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 1

Defina-se a v.a. X : nº de crianças do sexo masculino em famílias com três filhos (M : masculino e F : feminino).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF	Acontecimentos independentes
X	3	2	2	2	1	1	1	0	
x	0		1		2		3		
$P(X = x)$	1/8		3/8		3/8		1/8		

Função Massa de Probabilidade: Resumindo...

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

2. Se n finito, $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1.$

Caso n infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

X : nº de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

Espaço amostral

Probabilidade

X

(HHH)

$$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{19}{33} = 0,203$$

0

(HHM)

$$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{14}{33} = 0,150$$

1

(HMH)

$$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$$

1

(MHH)

$$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$$

1

(HMM)

$$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$$

2

(MHM)

$$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$$

2

(MMH)

$$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{21}{33} = 0,097$$

2

(MMM)

$$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{12}{33} = 0,056$$

3

Acontecimentos
dependentes

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 2

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, tem-se $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347$.

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da **soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6?**

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada ponto w_i de Ω ?

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36, \text{ qualquer } w_i \in \Omega.$$

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

Função massa de probabilidade de X :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

		2º. lançamento					
		1	2	3	4	5	6
1º. Lançamento	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

X : Soma dos pontos nos dois lançamentos do dado

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

X : soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função massa de probabilidade de X :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então, a probabilidade da soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6 é

$$\begin{aligned}P(X < 6) &= P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) \\&= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36 \\&= 10/36 = 0,278\end{aligned}$$

Função Massa de Probabilidade: Outros Exemplos

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

Y : valor máximo obtido nos dois lançamentos do dado.

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Z : diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento do dado.

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

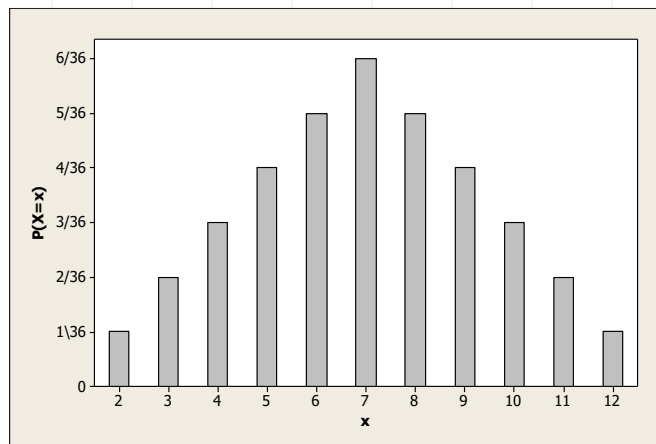
Qual é o valor médio da soma dos pontos (X) no lançamento de dois dados?

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
 $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
 $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

Representação algébrica e gráfica da função massa de probabilidade da v.a. X

x	$P(X=x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Variável Aleatória Discreta: Valor Médio

Valor Esperado (média populacional): Dada a v.a. X , assumindo os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, chamamos de **valor médio**, **valor esperado** ou **esperança matemática de X** o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \dots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

Seja X uma variável aleatória discreta que assume valores em $\mathcal{R}_X$ com função de probabilidade $p(x)$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Temos então que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i) p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

Valor Médio da V.a. Discreta: Exemplo 3

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

No exemplo, para média da v.a. X (soma de pontos), tem-se:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times (1/36) + 3 \times (2/36) + \dots + 11 \times (2/36) + 12 \times (1/36) \\ &= 252/36 = 7, \end{aligned}$$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

Variável Aleatória Discreta: Variância

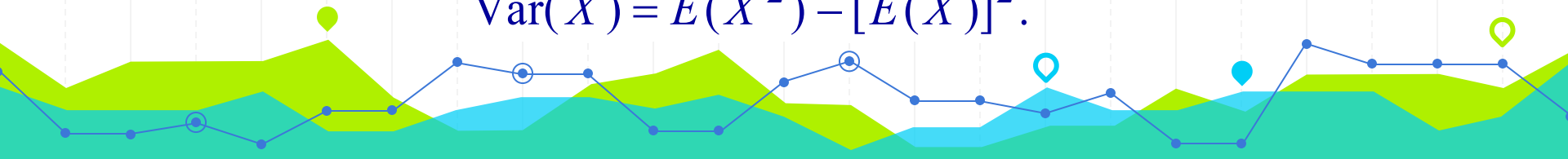
Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, então

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Da relação acima, tem-se que

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$



Momentos

- **Definição 3.9 – Momento de ordem k em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \quad (\text{se existir})$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

- **Definição 3.10 – Momento de ordem k em relação à média**

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] \quad (\text{se existir})$$

Variável Aleatória Discreta: Desvio Padrão

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = DP(X)$.



Variância da V.a. Discreta: Exemplo 3

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \dots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{210}{36} = 5,83.\end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e, portanto, $\text{Var}(X) = 54,83 - 7^2 = 5,83$.

Propriedades do Valor Médio e Variância

1) Se $X = a$, em que a é uma constante, então

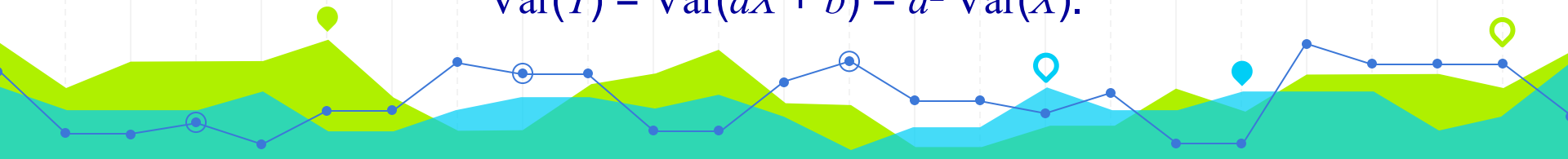
$$E(X) = a \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que a e b são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$



Propriedades do Valor Médio e Variância (Cont.)

3) Sejam X e Y duas variáveis quaisquer, então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

P4. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$. Então,

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

4) Sejam X e Y duas variáveis independentes, então

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

P4) Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Variável Aleatória Discreta: Moda

Moda: A moda de uma variável aleatória discreta X , designada por mo , corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de X

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única.**

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

Variável Aleatória Discreta: Covariância

Definição 4.2.1: Sejam X e Y variáveis aleatórias integráveis. Então a covariância entre X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

Teorema 4.2.1: Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias integráveis. Então,

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Em particular se $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para $i \neq j$ então

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

Definição 4.2.2: Seja X e Y variáveis aleatórias integráveis então o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Proposição 4.2.1: O coeficiente de correlação é independente da escala e translação das variáveis, ou seja,

$$\rho(X, Y) = \rho(aX + b, cY + d)$$

Função de Distribuição

- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$F(x) = P[X \leq x].$$

Esta função tem domínio $\mathbb{R}$, conjunto de chegada $[0,1]$ e verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
2. $F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$ (é uma função monótona não decrescente);
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2.$

A **Função distribuição** é uma função contínua à direita.

Elementos de Estatística e
Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição: Notas

1. $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} f_X(x_i);$
2. $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i);$
3. $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$, onde $F_X(x^-) \equiv P(X < x);$
4. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a);$
5. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b);$
6. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b) + f_X(a);$
7. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$

Função Massa de Probabilidade: Exemplo 4

X = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

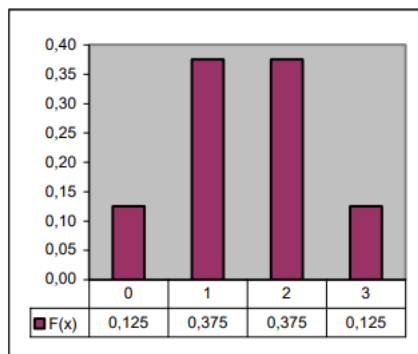
$$P[X = 0] = P[(C \cap C \cap C)] = \frac{1}{8}$$

$$P[X = 1] = P[(F \cap C \cap C) \cup (C \cap F \cap C) \cup (C \cap C \cap F)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 2] = P[(F \cap F \cap C) \cup (F \cap C \cap F) \cup (C \cap F \cap F)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 3] = P[(F \cap F \cap F)] = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8



Elementos de Estatística e
Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição: Exemplo 4

$$F(0) = P[X \leq 0] = \sum_{x \leq 0} f(x) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = P[X \leq 1] = \sum_{x \leq 1} f(x) = \frac{4}{8}$$

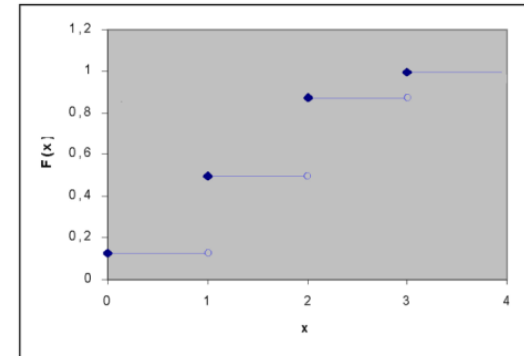
$$F(2) = P[X \leq 2] = \sum_{x \leq 2} f(x) = \frac{7}{8}$$

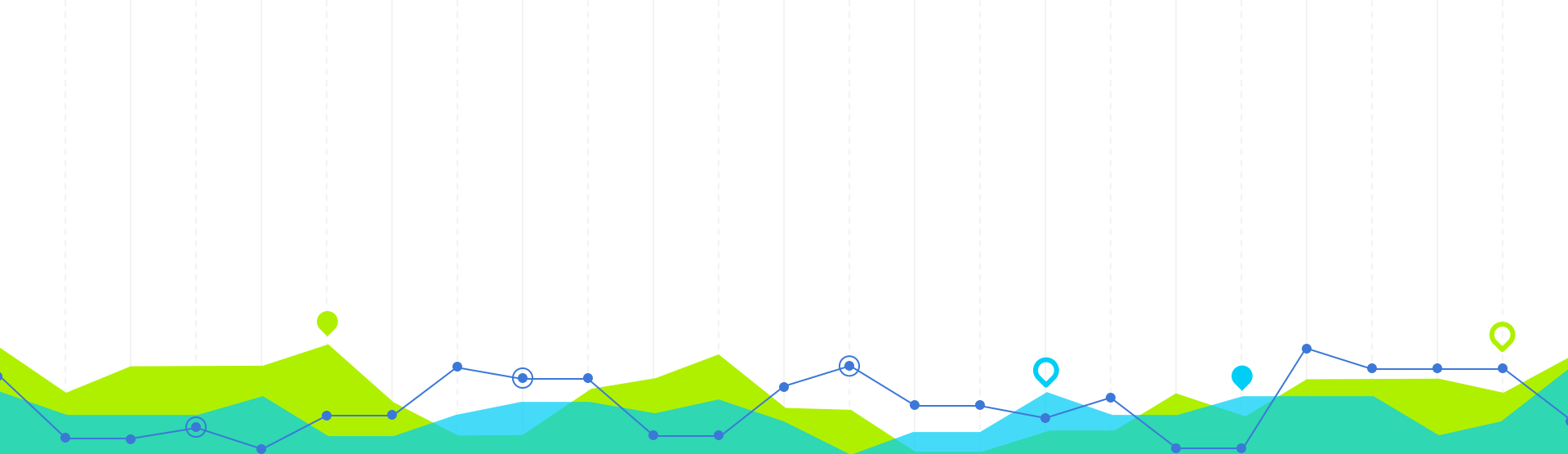
$$F(3) = P[X \leq 3] = \sum_{x \leq 3} f(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"

Elementos de Estatística e
Probabilidades II (uevora.pt)





Variáveis Aleatórias Discretas: Exercícios

2

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição dada por,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 0.2 & (-1 \leq x < 0) \\ 0.7 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1). \end{cases}$$

- a) Determine a função probabilidade de X .
- b) Calcule $P(X \geq 1)$.
- c) Calcule $P(X < 0.5 \mid X \geq 0)$.



Exercício 6 a): V.a. Discreta e Função de Probabilidade

$$f(x) = F(x) - F(x^-)$$

- $x = -1 \rightarrow f(-1) = F(-1) - F(-1^-) = 0.2 - 0 = 0.2$
- $x = 0 \rightarrow f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.7 - 0.2 = 0.5$
- $x = 1 \rightarrow f(1) = F(1) - F(1^-) = 1 - 0.7 = 0.3$

Logo,

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x = -1) \\ 0.5 & (x = 0) \\ 0.3 & (x = 1) \end{cases}$$

Exercício 6 b): V.a. Discreta e Probabilidades

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1^-) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Exercício 6 c): V.a. Discreta e Probabilidades

$$\begin{aligned} P(X < 0.5 | X \geq 0) &= \frac{P(X < 0.5 \wedge X \geq 0)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X < 0.5)}{1 - P(X < 0)} = \frac{F(0.5^-) - F(0^-)}{1 - F(0^-)} \\ &= \frac{0.7 - 0.2}{1 - 0.2} = \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

7. O número de automóveis encomendados mensalmente num *stand*, é uma variável aleatória X com a seguinte função probabilidade:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

- Calcule a função de distribuição de X .
- Determine o número mínimo de automóveis que o *stand* deve ter num mês para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75.
- Num mês em que haja apenas dois automóveis em *stock* no *stand*, calcule a probabilidade de serem todos vendidos, e especifique a distribuição da variável aleatória que representa as vendas nesse mês.



Exercício 7 a): V.a. Discreta e Função de Distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

$$\bullet x < 0 \rightarrow F(x) = 0$$

$$\bullet 0 \leq x < 1 \rightarrow F(x) = f(0) = 0.3$$

$$\bullet 1 \leq x < 2 \rightarrow F(x) = f(1) + f(0) = 0.3 + 0.3 = 0.6$$

$$\bullet 2 \leq x < 3 \rightarrow F(x) = f(2) + f(1) + f(0) = 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.8$$

$$\bullet 3 \leq x < 4 \rightarrow F(x) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.9$$

$$\bullet x \geq 4 \rightarrow F(x) = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(0) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 1$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.3 & (0 \leq x < 1) \\ 0.6 & (1 \leq x < 2) \\ 0.8 & (2 \leq x < 3) \\ 0.9 & (3 \leq x < 4) \\ 1 & (x \geq 4) \end{cases}$$

Exercício 7 b): V.a. Discreta e Probabilidades

- Stand não tem automóveis $\Rightarrow P(E) = P(X=0) = f(0) = 0.3 < 0.75$
- Stand tem 1 automóvel $\Rightarrow P(E) = P(X \leq 1) = F(1) = 0.6 < 0.75$
- Stand tem 2 automóveis $\Rightarrow P(E) = P(X \leq 2) = F(2) = 0.8 > 0.75$

Logo, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75, o stand deve ter, no mínimo, 2 automóveis num mês.

Exercício 7 c): V.a. Discreta e Probabilidades

$$P(V) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2^-) = 1 - 0.6 = 0.4$$

Seja,

Y - nº automóveis vendidos num mês com 2 em stock

$$Y = \begin{cases} 0 & (X=0) \\ 1 & (X=1) \\ 2 & (X \geq 2) \end{cases} \rightarrow Y \text{ é v.a. discreta}$$

Exercício 7 c): V.a. Discreta e Probabilidades

Função probabilidade de Y

- $y = 0 \rightarrow f_Y(0) = P(Y=0) = P(X=0) = f_X(0) = 0.3$
- $y = 1 \rightarrow f_Y(1) = P(Y=1) = P(X=1) = f_X(1) = 0.3$
- $y = 2 \rightarrow f_Y(2) = P(Y=2) = P(X \geq 2) = 1 - F_X(2^-) = 1 - 0.6 = 0.4$

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & (y=0) \\ 0.3 & (y=1) \\ 0.4 & (y=2) \end{cases}$$

Função distribuição de Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ 0.3 & (0 \leq y < 1) \\ 0.6 & (1 \leq y < 2) \\ 1 & (y \geq 2) \end{cases}$$

25. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

- a) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
- b) Faça $Y = 1 - 3X$ e calcule $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.
- c) Sendo $Z = |X - 2|$, determine $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$.



Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x=0) \\ 0.2 & (x=1) \\ 0.1 & (x=2) \\ 0.3 & (x=3) \\ 0.2 & (x=4) \end{cases} \rightarrow D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$E(x) = \sum_{x \in D} x f(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.1$$

μ_x

$$\text{Var}(x) = E[(x - \mu_x)^2] = \sum_{x \in D} (x - \mu_x)^2 f(x) = (0 - 2.1)^2 \times 0.2 + (1 - 2.1)^2 \times 0.2 + \\ + (2 - 2.1)^2 \times 0.1 + (3 - 2.1)^2 \times 0.3 + (4 - 2.1)^2 \times 0.2 = 2.09$$

σ_x^2

Alternativamente,

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\bullet E(x^2) = \sum_{x \in D} x^2 f(x) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 6.5$$

$$\text{Var}(x) = 6.5 - 2.1^2 = 2.09$$

Exercício 25 (b): Valor Médio e Variância

$Y = 1 - 3X$ → É uma função linear em X .

$$E(Y) = E(1 - 3X) = 1 - 3E(X) = 1 - 3 \times 2.1 = -5.3$$

μ_y

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(1 - 3X) = (-3)^2 \text{Var}(X) = 9 \times 2.09 = 18.81$$

σ_y^2

Exercício 25 (c): Valor Médio e Variância

$Z = |X-2| \rightarrow$ É uma função não linear em X

Z	0	1	2
$f(z)$	0,1	0,5	0,4

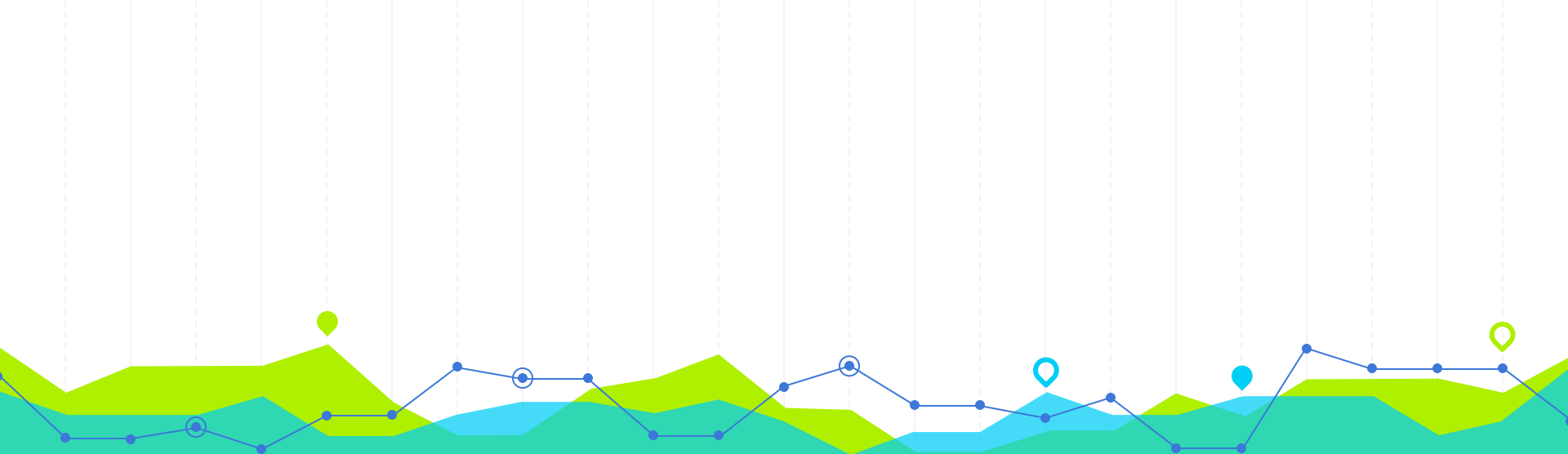
$$E(Z) = E(|X-2|) = \sum_{x \in D} |x-2| f(x) = |0-2| \times 0.2 + |1-2| \times 0.2 + |2-2| \times 0.1 + |3-2| \times 0.3 + |4-2| \times 0.2 = 1.3$$

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$\begin{aligned} \bullet E(Z^2) &= E(|X-2|^2) = E[(X-2)^2] = E(X^2 - 4X + 4) = E(X^2) - 4E(X) + 4 = \\ &= 6.5 - 4 \times 2.1 + 4 = 2.1 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Z) = 2.1 - 1.3^2 = 0.41$$

σ_Z^2



Variáveis Aleatórias Discretas: TPC

3

3. Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x/3 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2). \end{cases}$$

- a) Verifique que se trata de uma função de distribuição.
- b) Classifique a variável aleatória em causa.



9. Calcule o valor de k de modo que as funções dadas nas alíneas seguintes definam funções probabilidade da variável aleatória X .

a) $f(x) = kx$ ($x = 1, 2, \dots, 10$);

b) $f(x) = k \left(\frac{1}{5} \right)^x$ ($x = 1, 2, 3, \dots$).



26. O número de unidades de um produto procuradas diariamente por uma empresa é uma variável aleatória X com função probabilidade dada por:

$$f(x) = 1/5 \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Se o produto é vendido durante o dia, proporciona um ganho de 5 euros por unidade; se o não é, deve ser inutilizado, o que acarreta um prejuízo de 4 euros por unidade.

- a) Calcule o valor esperado e a variância de X .
- b) Qual deve ser o aprovisionamento diário de modo que o lucro esperado seja máximo?



27. Sabe-se que o primeiro e o segundo momentos em relação à origem da variável aleatória discreta X , são iguais a 6 e a 62, respectivamente. Sendo $Y = (X/2) + 3$, determine a média, a variância e o desvio padrão de Y .



Obrigada!

Questões?

