



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 17 e 18 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)

- **Capítulo 1:** Análise Descritiva
- **Capítulo 2:** Probabilidades

Aulas TP (Semanas 3 a 6)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas TP (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas TP (Semanas 10 a 12)

- **Capítulo 5:** Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

5. Variáveis aleatórias especiais

5.1. Variáveis aleatórias discretas

5.1.1. A distribuição uniforme discreta

5.1.2. A variável aleatória de Bernoulli

5.1.3. A variável aleatória binomial

5.1.4. A variável aleatória de Poisson

5.2. Variáveis aleatórias contínuas

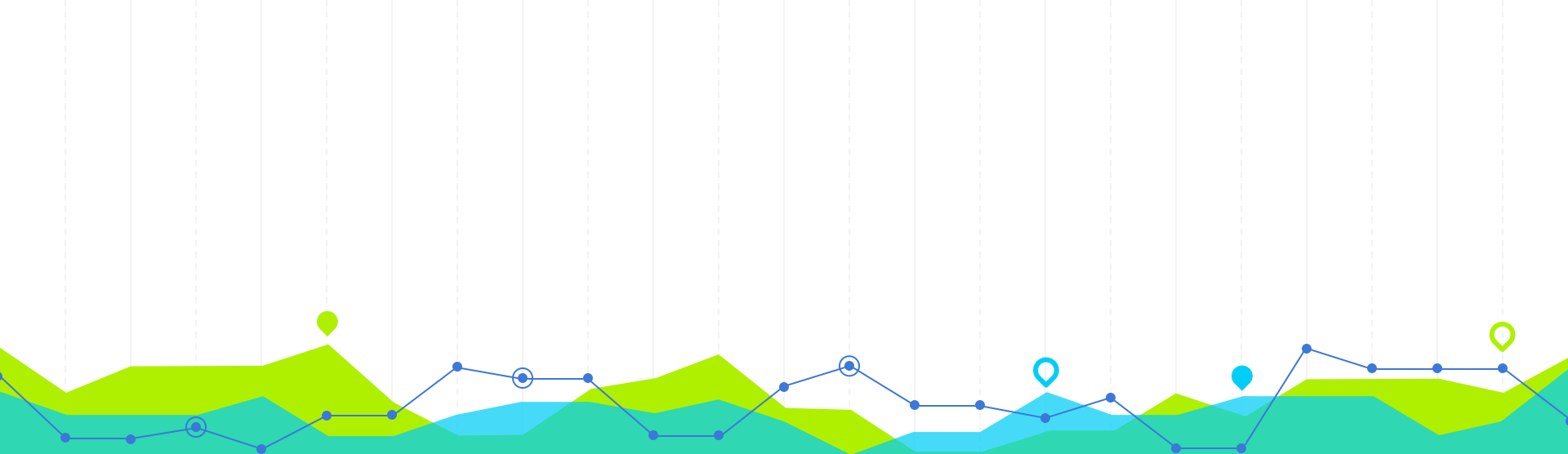
5.2.1. A variável aleatória uniforme contínua

5.2.2. A variável aleatória normal

5.2.3. A variável aleatória exponencial

5.2.4. As variáveis aleatórias gama e chi-quadrado

5.3. O Teorema Limite Central



Distribuição Bernoulli e Binomial

Variáveis Aleatórias Discretas

1

Distribuição Bernoulli

Na prática, existem muitas experiências que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- Uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

Distribuição Bernoulli

As experiências com alternativas *dicotômicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo **sucesso-fracasso** ou **sucesso-insucesso**.

- Essas experiências recebem o nome de **Ensaio de Bernoulli** ou Provas de Bernoulli e originam uma v.a. com **Distribuição Bernoulli**.

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- **1** se ocorrer **sucesso**,
- **0** se ocorrer **insucesso/fracasso**.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p , $0 < p < 1$.

Distribuição Bernoulli

“ $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ ” representa uma v.a. com **Distribuição Bernoulli** com parâmetro p , isto é,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer “sucesso”} \\ 0, & \text{se ocorrer “insucesso”} \end{cases}$$

e a sua função massa de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

$$\begin{aligned} E(X) &= p, \\ \text{Var}(X) &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Distribuição Bernoulli: Exemplo

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 1 vez.
Qual é a probabilidade de se obter a face 5?

Denotamos,

S : “sucesso”, ocorrer face 5;

I : “insucesso”, não ocorrer face 5.

A variável X “indica” se ocorreu sucesso ou não numa prova Bernoulli!

É fácil ver que $p = P(\text{sucesso}) = P(X=1) = 1/6$ e
 $q = 1 - p = P(\text{insucesso}) = P(X=0) = 5/6$

$\Omega = \{S, I\}$	X	1	0
	$P(X=x)$	1/6	5/6

$X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$

Distribuições Bernoulli e Binomial

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de “sucesso”, dão origem ao ***Modelo de Probabilidade Binomial***.

Distribuição Binomial

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios/provas de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem Distribuição Binomial com parâmetros n e p .

A função massa de probabilidade da v.a. X é dada por

Formulário

- **BINOMIAL** $X \sim B(n; \theta)$, $(0 < \theta < 1)$

$$f(x | \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = n\theta ; \text{Var}(X) = n\theta(1 - \theta) ; M_X(s) = [(1 - \theta) + \theta e^s]^n ; \gamma_1 = (1 - 2\theta) / \sigma$$

Propriedades:

- $X \sim B(n; \theta) \Leftrightarrow (n - X) \sim B(n; 1 - \theta)$
- $X_1 \sim B(n_1; \theta)$, $X_2 \sim B(n_2; \theta)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, \theta)$
- **BERNOULLI** $X \sim B(1; \theta)$

Notação: $X \sim \text{Bin}(n; p)$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Distribuição Binomial

Resultado: Se $X \sim \text{Bin}(n; p)$, então

média: $\mu = E(X) = n \times p$

variância: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \times p \times (1-p)$

Distribuição Binomial: Resumindo...

A **distribuição binomial** verifica as seguintes condições:

1. A experiência tem um **n° fixo de provas, n** .
2. As provas são **independentes**. (O resultado de uma prova não afecta a probabilidade de ocorrência das restantes.)
3. Cada prova origina um de dois resultados possíveis: **sucesso** ou **insucesso**.
4. A probabilidade de sucesso, denotada por **p** , é **constante** em cada prova.

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a face 5 duas vezes?

Denotamos,

S : “sucesso”, ocorrer face 5;

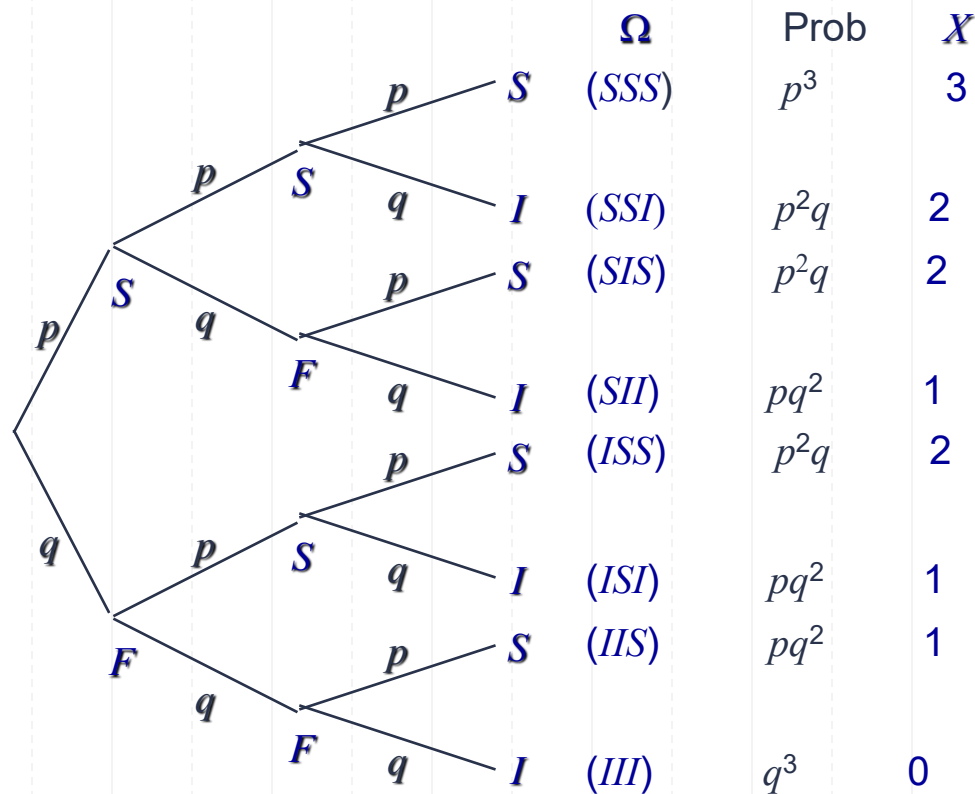
I : “insucesso”, não ocorrer face 5.

É fácil ver que $p = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e
 $q = 1 - p = P(\text{insucesso}) = 5/6$

$$\Omega = \{SSS, SSI, SIS, ISS, SII, ISI, IIS, III\}$$

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o número de vezes que a face 5 é observada nos três lançamentos do dado.



Distribuição Binomial: Exemplo 1

Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$

nº. de sucessos	probabilidades	$p = 1/6$
0	q^3	$125/216=0,5787$
1	$3pq^2$	$75/216=0,3472$
2	$3p^2q$	$15/216=0,0694$
3	p^3	$1/216=0,0046$

A função de probabilidade de X é dada por:

Podemos escrever essa função como

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x q^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para $n = 3$ e $p = 1/6$, $P(X = 2) = 0,0694$.

Distribuição Binomial: Exemplo 2

Considere-se uma prova de escolha múltipla com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha-se que o aluno escolhe as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade dele ***acertar pelo menos a 6 questões?***

X : nº de questões que o aluno acertará

X pode assumir valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$P(\text{Sucesso}) = P(\text{acertar a cada questão}) = 1/4 = 0,25$

$n = 12$

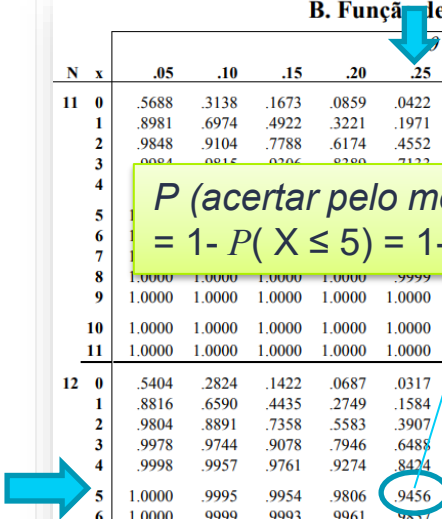
$X \sim \text{Bin}(12; 0,25)$

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x (1 - 0,25)^{12-x}$$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

$$X \sim \text{Bin}(12; 0,25)$$

B. Função de distribuição



N	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
	3	.9984	.9815	.9306	.8380	.7133	.5606	.4266	.3063	.2011	.1133
	4										
	5										
10	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
13	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
14	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049	.0017
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269	.0112
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929	.0461
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279	.1334
15	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268	.2905
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437	.5000
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212	.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302	.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797	.9539
	10										

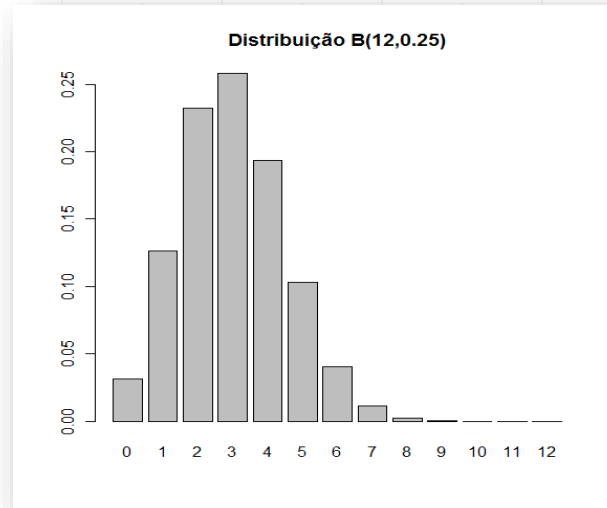
$$P(\text{acertar pelo menos a 6}) = P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) \\ = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,9456 = 0,0544$$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
[1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
[6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08
```

```
> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
  [,1]  [,2]
[1,]  0 3.167635e-02
[2,]  1 1.267054e-01
[3,]  2 2.322932e-01
[4,]  3 2.581036e-01
[5,]  4 1.935777e-01
[6,]  5 1.032414e-01
[7,]  6 4.014945e-02
[8,]  7 1.147127e-02
[9,]  8 2.389848e-03
[10,] 9 3.540516e-04
[11,] 10 3.540516e-05
[12,] 11 2.145767e-06
[13,] 12 5.960464e-08
```



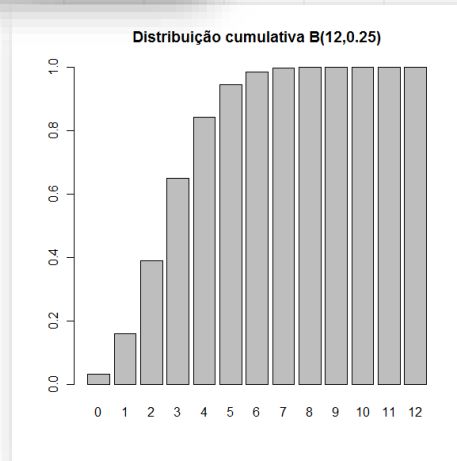
```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
[1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
[7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000
```

```
> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
  [,1] [,2]
[1,] 0  0.03167635
[2,] 1  0.15838176
[3,] 2  0.39067501
[4,] 3  0.64877862
[5,] 4  0.84235632
[6,] 5  0.94559777
[7,] 6  0.98574722
[8,] 7  0.99721849
[9,] 8  0.99960834
[10,] 9  0.99996239
[11,] 10 0.99999779
[12,] 11 0.99999994
[13,] 12 1.00000000
```



```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
```

```
[1] 0.05440223
```

```
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
```

```
[1] 0.05440223
```

$$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$$E(X) = n \times p = 12 \times 0,25 = 3,$$

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso a todas as questões acertará 3.

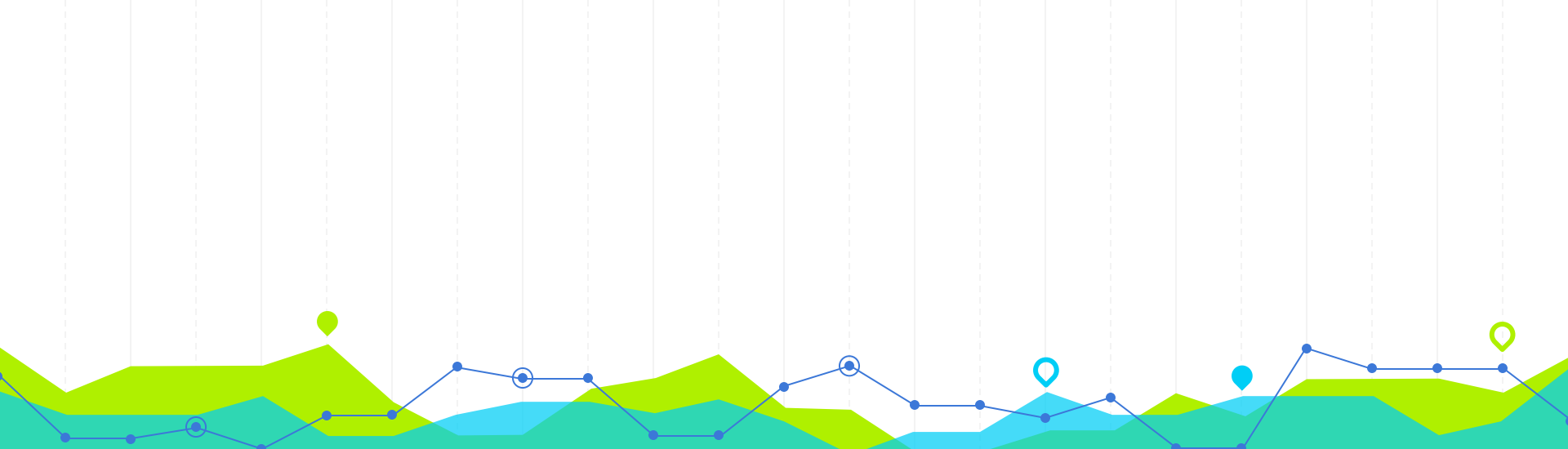
Soma de Binomiais Independentes

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro θ** .

Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$Y_1 \sim B(n_1; \theta), Y_2 \sim B(n_2; \theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n, \theta)$$

onde $n = n_1 + n_2$.



Distribuição Binomial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

2

1. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, calcule a probabilidade de
- a) existirem somente duas garrafas com prémio.
 - b) receber pelo menos um prémio.



Exercício 1 (a)

X - v.a. n.º garrafas premiadas num conjunto de 15 unidades $\Rightarrow X \sim B(15, 0.05)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 n θ = proporção
garrafas
premiadas

(a)

$$P(X=2) = 0.1348$$

Exercício 1 (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.4633 = 0.5367$$

2. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeitos de controlo, 10 peças. Da experiência passada sabe-se que 80% das peças podem considerar-se “boas”. Calcule a probabilidade de, nas 10 peças, haver mais que 8 peças “boas”.



3. Sabe-se, por experiência, que a probabilidade de uma máquina necessitar de ser afinada em cada período de trabalho de 30 minutos é de 0.05 (períodos independentes). Em cada período só pode haver, no máximo uma afinação. Determine:
- a) O número médio de afinações numa semana em que a máquina trabalha 20 horas.
 - b) A probabilidade de em 8 horas de trabalho se verificar pelo menos uma afinação, e a de se verificarem 2 a 5 afinações.



Exercício 3 (a)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se máquina afurada em 30 min} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow X \sim B(1, 0.05)$$

(a)

20 horas = $20 \times 2 = 40$ períodos de 30 minutos

Seja $\sum_{i=1}^{40} X_i \rightarrow$ n.º afinações num conjunto de 40 períodos $\rightarrow \sum_{i=1}^{40} X_i \sim B(40, 0.05)$

Então,

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} X_i\right) = 40 \times 0.05 = 2$$

Exercício 3 (b)

8 horas = $8 \times 2 = 16$ períodos de 30 minutos

Seja,

$Y = \sum_{i=1}^{16} X_i \rightarrow$ nº afinações num conjunto de 16 períodos (8 horas) $\rightarrow Y \sim B(16, 0.05)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.4401 = 0.5599$$

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y \leq 5) - P(Y < 2) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 1) = 0.9999 - 0.8108 = 0.189$$

4. A produção de parafusos em certa unidade fabril é assegurada por duas máquinas (M_1 e M_2) de funcionamento independente. Da experiência passada pode concluir-se que a proporção de parafusos com defeito, em cada uma das máquinas, é de 5%. Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de quatro parafusos da máquina M_1 e uma de oito da máquina M_2 .
- a) Calcule a probabilidade de se encontrarem dois parafusos com defeito no conjunto das duas amostras.
 - b) Os parafusos são vendidos em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade de essa garantia ser violada, isto é, de haver mais que dois parafusos defeituosos numa embalagem.



8. Sabe-se que 1% dos parafusos de determinado fabricante são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com a garantia de devolução do valor pago caso existam dois ou mais parafusos defeituosos.

- a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução?
- b) Se se comprar dez caixas, qual a probabilidade de haver devoluções?



Obrigada!

Questões?

