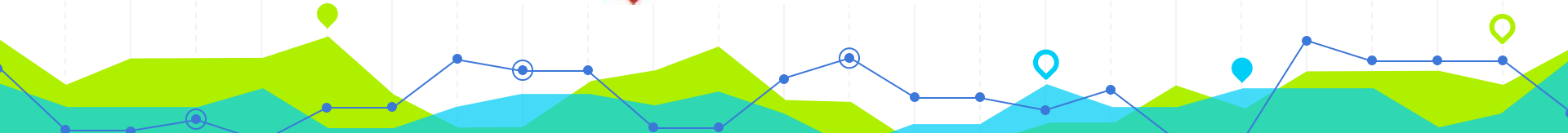




Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa



Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 8 e 9 (Semana 5)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

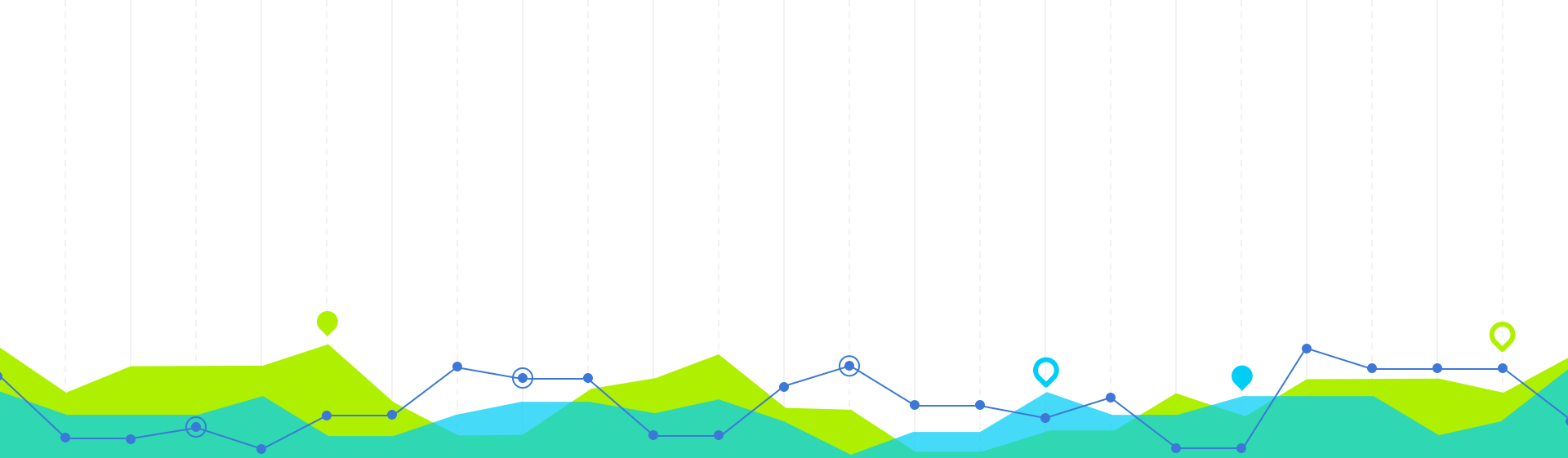
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Método dos Momentos: Exercícios

(continuação)

1

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

- Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
- Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ .
- Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
- Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
- Mostre que $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ .



Exercício 1 a)

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x=0,1,2,3,\dots) \text{ com } (0 < \theta < 1)$$

$$E(X) = \frac{1-\theta}{\theta} = \mu'_1$$

$$\text{Amostra casual: } (X_1, \dots, X_{1000}) \rightarrow \sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$$

$$\bar{x} = \frac{980}{1000} = 0.98$$

a) $\theta = ?$

$$1^{\circ} \text{ momento ordinário da população: } \mu'_1 = E(X) = \frac{1-\theta}{\theta}$$

$$1^{\circ} \text{ momento ordinário da amostra: } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

Método dos momentos:

$$\mu'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \quad (=) \quad \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} \quad (E)$$

$$(E) \quad \frac{1}{\theta} - 1 = \bar{X} \quad (E) \quad \frac{1}{\theta} = \bar{X} + 1 \quad (E) \quad \theta = \frac{1}{\bar{X} + 1}$$

Exercício 1 a)

Estimador: $\theta = \frac{1}{\bar{X}+1}$

Estimativa: $\tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{x}+1} = \frac{1}{0.98+1} \approx 0.5051$

Nota:

Momento ordinário de ordem k (ou momento de ordem k em relação à origem):

- $\mu'_k = E(X^k)$

- Momentos ordinários amostrais de ordem k :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ , para a qual se tem $E(X) = \alpha \theta$ e $\text{Var}(X) = \alpha \theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$ e $\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.



Exercício 3

V. A. com $F_X(x|\alpha, \theta)$

$$E(X) = \alpha \theta \quad \text{Var}(X) = \alpha \theta^2$$

Amostra casual: $(X_1, \dots, X_{320}) \rightarrow \sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$

$\searrow \sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$

Vamos usar o método dos momentos. Não é possível usar o método da máxima verosimilhança porque não conhecemos a forma funcional de $f(x|\alpha, \theta)$ e por isso não é possível obter $L(\alpha, \theta)$.

Exercício 3

$$\mu_1' = E(X) = \alpha \theta$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (\Rightarrow) \quad E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2$$

$$(\Rightarrow) \quad \mu_2' = \text{Var}(X) + E(X)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i}{320} \\ \mu_2' = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} \end{array} \right. \quad (\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \theta = \bar{x} \\ \alpha^2 \theta^2 + (\alpha \theta)^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\bar{x}}{\theta} \\ \frac{\bar{x}^2}{\theta^2} + \left(\frac{\bar{x}}{\theta} \right)^2 \theta^2 = \sum_{i=1}^{320} x_i^2 / 320 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow)$$

Exercício 3

$$(\Rightarrow) \left\{ \overline{x} \theta + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} \right. \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \left\{ \overline{x} \theta = \frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} - \overline{x}^2 \right. \quad (\Rightarrow) \left\{ \theta = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{320} x_i^2}{320} - \overline{x}^2}{\overline{x}} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\overline{x}^2}{\Delta^2} \\ \theta &= \frac{\Delta^2}{\overline{x}} \end{aligned} \right.$$

Exercício 3

Conclusão :

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 / \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 \right] = 0.00288$$

$$\tilde{\theta} = \left[\frac{535.8}{320} - \left(\frac{22.2}{320} \right)^2 \right] / \left(\frac{22.2}{320} \right) = 24.06576$$

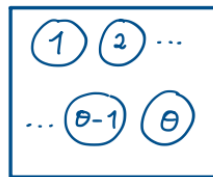
4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ . Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
 - b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ .
 - c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.



Exercício 4 a)

θ bolas

Amostra casual: (X_1, X_2, X_3)



(Amostra com reposição)

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 9 \end{cases}$$

$$f_X(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \quad (x = 1, 2, \dots, \theta)$$

$X \sim U(1, \theta)$ Distribuição uniforme discreta

$$E(X) = \frac{\theta+1}{2} = \mu_1'$$

$$a) \mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{3} \quad (=) \quad \frac{\theta+1}{2} = \bar{X} \quad (=) \quad \theta = \underbrace{2\bar{X}-1}_{\text{Estimador}}$$

$$\text{estimativa: } \tilde{\theta} = 2\bar{X} - 1 = 2\left(\frac{13+5+9}{3}\right) - 1 = 17 \text{ bolas}$$

Exercício 4 a)

Com a amostra observada o método dos momentos resulta numa estimativa admissível para θ uma vez que não se observou nenhuma bola com numero superior a 17. No entanto, não é garantido que isto se verifique em todas as amostras. Por exemplo:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 9) \Rightarrow \hat{\theta} = 2 \frac{(1 + 2 + 9)}{3} - 1 = 7.$$

Com esta amostra o método dos momentos já não resultava numa estimativa admissível para θ uma vez que já se observou a bola nº 9, logo não podem existir apenas 7 bolas.

O método dos momentos é bom para estimar parâmetros referentes a momentos de variáveis aleatórias. Neste exercício, o parâmetro que estamos a estimar é o limite do suporte da variável aleatória (distribuição da população). A qualidade de um estimador não se deve avaliar olhando apenas para estimativas particulares (estejam estas muito próximas ou muito afastadas do verdadeiro valor do parâmetro).

Interessa sim estudar o comportamento do estimador em sucessivas amostras, ou seja, estudar a sua distribuição por amostragem. Neste caso seria melhor usar outro estimador (o EMV).

5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}, \quad (-\theta < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.



Exercício 5

$(X_1, \dots, X_n)$ amostra casual

$$f_x(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \quad (-\theta < x < \theta), \quad \theta > 0$$

Distribuição uniforme contínua

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot f_x(x|\theta) dx =$$

$$= \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{(-\theta)^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} \right) = 0$$

Como $E(X)$ não depende de θ vamos tentar o 2º momento:

Exercício 5

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\theta}^{\theta} x^2 f_x(x|\theta) dx = \\ &= \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta} dx = \frac{1}{2\theta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\theta}^{\theta} = \\ &= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^3}{3} - \left(\frac{(-\theta)^3}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\theta} \left(\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^3}{3} \right) = \frac{1}{2\theta} \left(2 \frac{\theta^3}{3} \right) = \frac{\theta^2}{3} \end{aligned}$$

Exercício 5

$$\underline{M.M} : E(X^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{\theta}{3}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (=) \quad \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

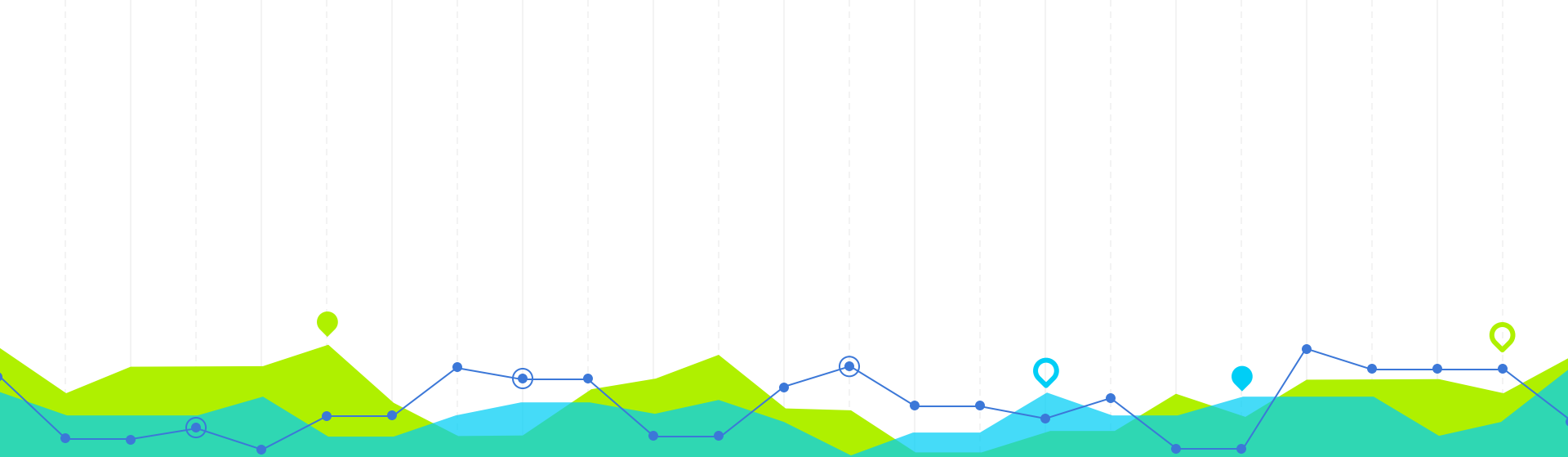
$$\Rightarrow \tilde{\theta} = + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (\text{porque } \theta > 0)$$

Exercício 5

Nota: Caso se reparasse que $X \sim U(-\theta, \theta)$, então:

$$E(X) = \frac{-\theta + \theta}{2} = 0$$

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + \underbrace{E(X)}_0^2 = \frac{(\theta - (-\theta))^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3} =$$



Método da Máxima Verosimilhança

Estimadores

2

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em **estimadores** e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos **principais métodos de estimação paramétrica**.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

- o Método dos momentos e
- o **Método da Máxima verosimilhança**

Função de Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um **parâmetro** θ , desconhecido, e $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, \dots, x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verossimilhança da amostra** e representa-se por **$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$** a

$$f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i|\theta) \quad \text{caso discreto}$$

Método da Máxima Verosimilhança

O **método da máxima verosimilhança**, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como **estimativa de θ** o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, face a uma amostra observada $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Função de Log-Verosimilhança

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a verosimilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítmica é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que
$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ é a **estimativa de máxima verosimilhança**, que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$.

MMV: Exemplo 1

Considere-se $X \cap P(\lambda)$ e a amostra (0, 0, 2, 5, 3, 1).
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança
de λ ?



MMV: Exemplo 1

Exemplo

$X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$(0, 0, 2, 5, 3, 1)$

$\text{emv}(\lambda)$ [estimativa de máxima verosimilhança de λ com base nestes dados]

milhange de λ com base nestes dados)

Passo 1 : $\alpha(\lambda; 0, 0, 2, 5, 3, 1) =$

$$= \prod_{i=1}^6 \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} \right]$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^5}{5!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^3}{3!} \right] \left[\frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} \right]$$

$$= e^{-6\lambda} \frac{\lambda^4}{2! 5! 3! 1!} \equiv g(\lambda)$$

MMV: Exemplo 1

Passo 2 $g'(\lambda) = \frac{-6e^{-6\lambda} \lambda^{11} + 11e^{-6\lambda} \lambda^{10}}{2!3!5!1!}$

$$= 0 \Leftrightarrow -6\lambda + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{6}$$

$$g''(\lambda) = 36e^{-6\lambda} \dots \Big|_{\lambda=\frac{11}{6}} < 0$$

$$\text{Lnv}(\lambda) = \frac{11}{6}$$

Passo 2^x: Em vez de maximizar $g(\lambda)$
vamos maximizar $\log g(\lambda)$

$$g(\lambda) = \frac{e^{-6\lambda} \lambda^{11}}{0!2!5!3!1!}$$

$$\ln g(\lambda) = -6\lambda + 11 \log \lambda - \log(\dots)$$

$$[\ln g(\lambda)]' = -6 + \frac{11}{\lambda}$$

$$[\ln g(\lambda)]'' = -\frac{11}{\lambda^2} < 0, \forall \lambda$$

$$\text{Lnv: } -6 + \frac{11}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{11}{6}}$$

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$;
2. $y = c \Rightarrow y' = 0$, onde k é uma constante real;
3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
4. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u'$, ($a > 0, a \neq 1$)
6. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
7. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
8. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$
9. $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
10. $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
11. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$
12. $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$, desde que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
13. $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \csc^2 u$, desde que $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

MMV: Exemplo 2

Considere-se a v.a. $X \cap \text{Exp}(\mu)$ e a amostra $(1.2, 0.5, 3)$.
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de μ ?



MMV: Exemplo 2

Exemplo 2: $X \sim \text{Exp}(\mu)$ $f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$, $x > 0$

amostras: $(1.2; 0.5; 3)$

$$\text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{1.2 + 0.5 + 3}$$

Como X é v.c. contínua:

$$\begin{aligned} \bullet d(\mu; x_1, x_2, x_3) &= \prod_{i=1}^3 \mu e^{-\mu x_i} = \\ &= \mu^3 e^{-\mu \sum x_i} = \mu^3 e^{-\mu(1.2 + 0.5 + 3)} \end{aligned}$$

$$\bullet \ln g(\mu) = 3 \ln \mu - 4.7 \mu$$

$$[\ln g(\mu)]' = \frac{3}{\mu} - 4.7 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4.7}$$

$$[\ln g(\mu)]'' = -\frac{3}{\mu^2} < 0, \forall \mu$$

$$\Rightarrow \text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{4.7}$$

Propriedade Fundamental dos EMV: Invariância

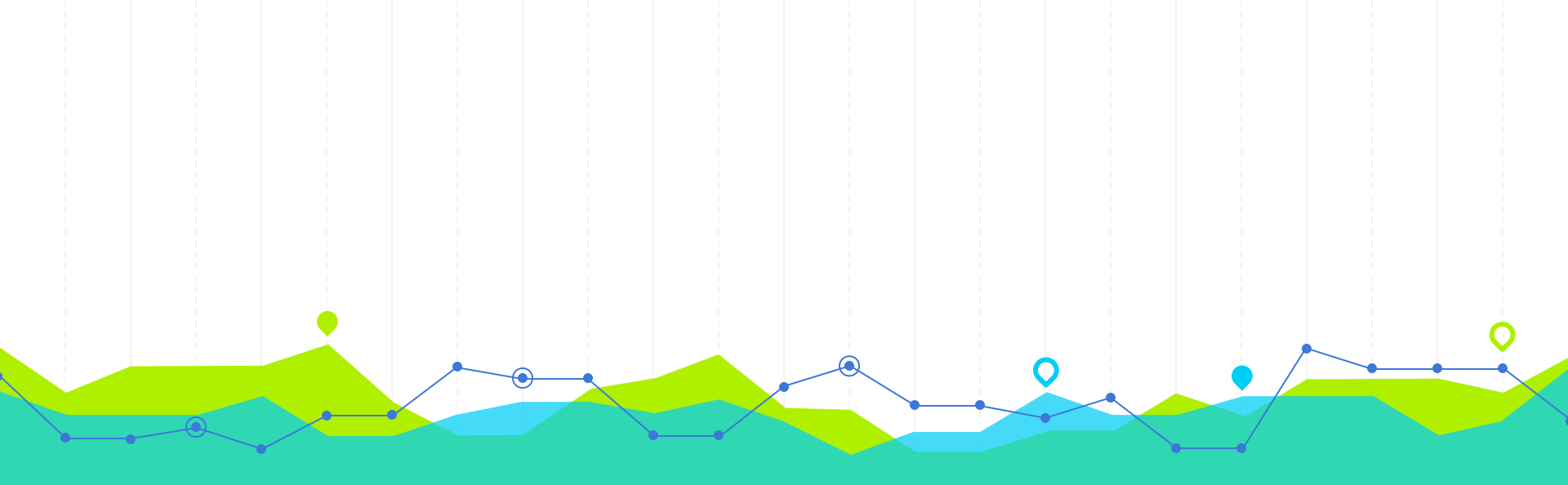
Propriedade fundamental dos EMV: Invariância

$$EMV(h(\theta)) = h(EMV(\theta))$$

Exemplo:

$$EMV(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$EMV(\ln \bar{x}) = \ln(EMV(\bar{x})) = \ln \bar{x}$$



Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

Estimadores

3

3. Considere uma população com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p , com $0 < p < 1$.
- a) Derive o estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro p .
 - b) Foi obtida uma amostra de dimensão $n = 3$, cujos valores observados foram $(1, 1, 0)$.
 - i. Esboce o gráfico da função de verosimilhança e interprete-o.
 - ii. Forneça uma estimativa para p com base no método da máxima verosimilhança.

[ProbabilidadesEstatistica_2019 \(uevora.pt\)](#)



Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

a) Função de probabilidade (f. p.):

$$f(x; p) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \text{ com } 0 < p < 1.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^n f(x_i; p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1 - p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1 - p).$$

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

Condição de 1ª ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(p))}{\partial p} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{p}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-p) \sum_{i=1}^n x_i - p \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - pn = 0 \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.\end{aligned}$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 \ln L(p; x)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} + \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)(-1)}{(1-p)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{(1-p)^2} < 0,$$

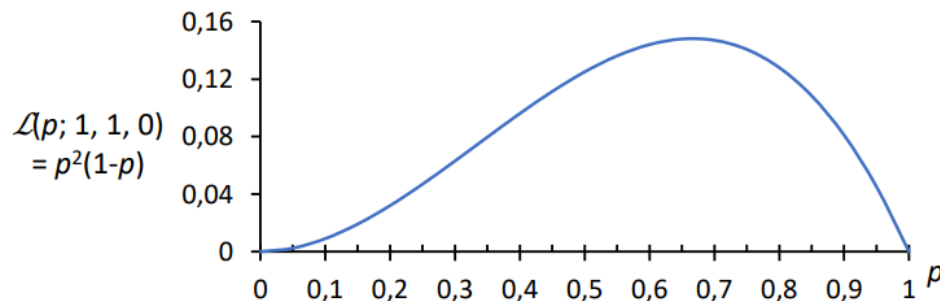
pois $x_i \geq 0, p^2 > 0, n > 0, (1-p)^2 > 0$ e $n \geq \sum_{i=1}^n x_i$ pois $x_i = 0$ ou 1 .

Portanto, o estimador de máxima verosimilhança é:

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

Exercício 2 b) i e ii: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) i) Substituindo em $\mathcal{L}(p)$, (x_1, x_2, x_3) pelos valores observados na amostra, $(1, 1, 0)$, obtemos,
$$\mathcal{L}(p) = p^2(1 - p).$$



A função de verosimilhança atinge o seu valor máximo quando o p se situa perto de 0,65, sendo este o valor de p mais provável que deu origem à observação desta amostra.

ii) $\hat{p} = \frac{2}{3} = 0,6667$

2. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a. a. de uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu; \sigma)$. Estime os parâmetros μ e σ pelo método:

b) Da máxima verosimilhança.

[ProbabilidadesEstatistica_2019 \(uevora.pt\)](http://ProbabilidadesEstatistica_2019(uevora.pt))



Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) Função densidade de probabilidade (f. d. p.):

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0.$$

Função de verosimilhança:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}. \end{aligned}$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)) = -\frac{n}{2} (\ln(2) + \ln(\pi) + \ln(\sigma^2)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\sigma^2} \left(-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\mu \right) = 0 \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \frac{2}{4\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \left(\frac{n-1}{n} \right) s^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} 2n < 0 \\ \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^4} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} < 0 \end{cases},$$

pois $n > 0, \sigma^2 > 0, \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} > \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^4}$.

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Portanto, os estimadores de máxima verosimilhança obtidos foram:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{n-1}{n} S^2 \end{cases}.$$

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

- Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
- Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ .
- Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
- Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
- Mostre que $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ .



4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ . Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
 - b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ .
 - c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.



7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ . Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.
- a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para λ .
 - b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.
 - c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.



8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas, X , segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n = 10, \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.



Obrigada!

Questões?

