

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. A empresa DoJo vai produzir pela última vez os produtos P_1, P_2, P_3 e P_4 , pois deixou de ser fabricado um ingrediente indispensável para a produção dos quatro produtos, do qual a empresa ainda possui 100 toneladas. Para o efeito, pretende usar, no máximo, 200 horas máquina e manter os 80 trabalhadores efetivos.

Com o objetivo de minimizar os custos de produção, respeitando as condições impostas, foi resolvido o seguinte problema de Programação Linear:

$$(P) \begin{cases} \min & z = 12x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4 & (\$) \\ \text{s.a} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 100 & (\text{ingrediente}) \\ & 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 200 & (\text{horas máquina}) \\ & 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 80 & (\text{trabalhadores}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

onde x_j representa a quantidade a produzir de P_j (em toneladas), $j = 1, \dots, 4$.

Ao resolver o problema obteve o seguinte quadro ótimo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r_1	r_2	RHS
z (min)	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	—	—	375
x_6	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{4}$	-1	45
x_5	$\frac{21}{4}$	0	$\frac{7}{2}$	2	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	175
x_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	25

sendo x_5 e x_6 as variáveis auxiliares associadas à segunda e terceira restrições, respetivamente, e r_1 e r_2 as variáveis artificiais associadas à primeira e terceira restrições, respetivamente.

- Apresente uma solução ótima do dual.
- Faça um pequeno relatório contendo toda a informação relevante que se pode obter a partir do quadro ótimo e da alínea anterior.
- Indique a matriz da base ótima e a sua inversa.
- Existe alguma solução ótima em que a quantidade a produzir de P_2 seja 20 toneladas? Em caso afirmativo, indique uma.
- Para que valores unitários do custo de produção de P_2 se pode garantir que continua ótimo o plano de produção correspondente ao quadro apresentado?
- Devido a um pico na corrente elétrica, algumas máquinas avariaram, ficando disponíveis menos horas máquina. Estude as consequências desta avaria.
- A DoJo esqueceu-se de considerar a produção de um quinto produto. Cada tonelada desse produto tem o custo unitário de 12, consome 4 toneladas do ingrediente especial, precisa de 6 horas máquina e de 4 trabalhadores. Vale a pena produzir esse produto? Em caso afirmativo, determine o novo plano ótimo.

- (h) Considere que os custos de produção foram modificados, passando a função objetivo a ser $11x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 11x_4$. Além disso, deixou de existir limitação quanto ao número de horas máquina disponíveis, pelo que a segunda restrição foi eliminada do modelo.

Sabendo que o problema resultante admite uma solução ótima única, indique, sem resolver o problema, o número máximo de produtos diferentes que podem ser produzidos na solução ótima.

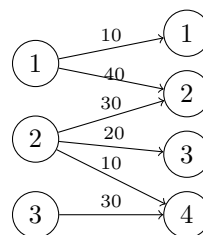
Justifique cuidadosamente a sua resposta.

2. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$(P) \begin{cases} \max & z = -2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_2 \geq x_1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Reescreva (P) na forma standard e indique uma solução básica admissível e uma solução básica não admissível.
- (b) A solução ótima de (P) é $(0, 5)$. Escreva as relações de complementaridade primal-dual e, usando-as, determine a solução ótima do dual de (P) .
3. Considere a tabela seguinte com os dados de um **problema de transportes** com três origens e quatro destinos e o grafo representado ao lado.

	1	2	3	4	Oferta
1	5	4	3	1	50
2	7	5	2	1	60
3	4	6	3	1	30
Procura	10	70	20	40	



Na tabela estão representados os custos unitários de transporte (em 10^3 euros por tonelada a transportar) de uma determinada mercadoria bem como a oferta total em cada origem e a procura total de cada destino. No grafo está representado um possível plano de transportes para este problema.

- (a) Verifique se o plano apresentado no grafo é ótimo, caso não seja, **parta do plano apresentado no grafo** e, caso seja possível, determine o plano de transportes ótimo. Justifique.
- (b) As procuras e ofertas foram modificadas: o cliente C1 pretende receber entre 5 e 15 unidades, C2 no máximo 70, C3 pelo menos 20 e C4 exatamente 40. Considerando que nada mais se altera, formalize o novo problema como um problema de transportes equilibrado.

Questão	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	2a	2b	3a	3b
Cotação	1,5	2	1	2	1,5	2	1,5	1,5	1	1,5	2,5	2