

Programação Matemática II

Capítulo 2: Programação inteira

Ano letivo 2026/2027



1. A empresa *Imobul* pretende investir 750 mil euros em aquisições de imóveis. Na seguinte tabela indica-se o custo atual (milhares de euros) bem como o valor estimado (milhares de euros) daqui a 10 anos dos 15 apartamentos em consideração:

Imóvel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Atual	70	73	77	80	82	87	90	94	98	106	110	113	115	118	120
10 anos	135	139	149	150	156	163	173	184	192	201	210	214	221	229	240

- (a) Formule o problema em programação linear inteira (PLI). Sugira uma solução admissível, que considere “boa”.
- (b) Mostre como se poderia formular as seguintes restrições:
- Não é possível optar por todos os investimentos.
 - Tem que se escolher pelo menos um dos investimentos.
 - O investimento 1 não pode ser escolhido se o investimento 3 o tiver sido.
 - O investimento 4 só pode ser escolhido se o investimento 2 também for escolhido.
 - Tem que se escolher ou o investimento 1 ou o investimento 4 ou nenhum nenhum destes investimentos.
 - Tem que se escolher pelo menos um dos investimentos 1 e 3 ou pelo menos dois dos investimentos 2, 3 e 4.
- (c) Resolva o problema formulado na alínea (a) utilizando um software apropriado. Como avalia a solução que sugeriu anteriormente?
2. Um jovem casal, a Eve e o Steven, querem dividir as suas principais tarefas domésticas (compras, cozinhar, lavar a louça e lavar a roupa) entre si de modo a que cada um fique com duas tarefas, mas mantendo o tempo total gasto nas tarefas domésticas no mínimo. As suas eficiências nestas tarefas diferem, sendo o tempo que cada um necessitaria para realizar cada tarefa dado pela seguinte tabela:

	Compras	Cozinhar	Lavar a louça	Lavar a roupa
Eve	4,5 horas	7,8 horas	3,6 horas	2,9 horas
Steven	4,9 horas	7,2 horas	4,3 horas	3,1 horas

Formule este problema em PLI e resolva-o utilizando um software apropriado.

3. A Divisão de Investigação e Desenvolvimento da empresa *Progressive* tem vindo a desenvolver quatro novas linhas de produtos. A gestão deve agora tomar uma decisão sobre qual destes quatro produtos será efetivamente produzido e em que níveis. Por conseguinte, foi solicitado um estudo de investigação operacional para encontrar a combinação de produtos mais rentável.

Existe um custo substancial associado ao início da produção de qualquer produto, tal como apresentado na primeira linha da tabela seguinte. O objetivo da gestão é encontrar a combinação de produtos que maximize o lucro total (receita líquida total menos os custos de início de produção).

	Produto			
	1	2	3	4
Custo	50 000	40 000	70 000	60 000
Receita	70	60	90	80

As variáveis de decisão x_i , para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representam os níveis de produção do produto i . A gestão impôs as seguintes restrições:

- Não podem ser produzidos mais do que dois produtos.
- O produto 3 ou o produto 4 só pode ser produzido se o produto 1 ou o produto 2 for produzido.
- Ou

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 6\,000$$

ou

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 6\,000.$$

Formule o problema apresentado em PLI mista e resolva-o utilizando software apropriado.

4. A empresa *Record-a-Song* contratou uma estrela em ascensão para gravar oito canções. Os tamanhos, em MB, das diferentes canções são 8, 10, 8, 7, 9, 6, 7 e 12, respetivamente. A *Record-a-Song* utiliza dois CDs para a gravação. Cada CD tem uma capacidade de 40 MB. A empresa gostaria de distribuir as canções entre os dois CDs de modo a que o espaço utilizado em cada CD seja sensivelmente o mesmo. Formule o problema em PLI e encontre a solução ótima.
5. A companhia aérea *Northeastern Airlines* está a considerar a compra de novos aviões de passageiros de longo, médio e curto alcance. O preço de compra seria de 67 milhões de dólares por cada avião de longo alcance, 50 milhões de dólares por cada avião de médio alcance e 35 milhões de dólares por cada avião de curto alcance. O conselho de administração autorizou um orçamento de 1,5 mil milhões de dólares para estas aquisições. Independentemente de quais os aviões adquiridos, prevê-se que as viagens aéreas para todas as distâncias sejam suficientemente elevadas para que estes aviões sejam utilizados na sua capacidade máxima. Estima-se que o lucro líquido anual (após a dedução dos custos de recuperação de capital) seja de 4,2 milhões de dólares por avião de longo alcance, 3 milhões de dólares por avião de médio alcance e 2,3 milhões de dólares por avião de curto alcance.

Prevê-se que haverá pilotos suficientes para tripular 30 novos aviões. Se fossem adquiridos apenas aviões de curto alcance, as instalações de manutenção seriam capazes de processar 40 novos aviões. No entanto, cada avião de médio alcance é equivalente a $\frac{4}{3}$ aviões de curto alcance e cada avião de longo alcance é equivalente a $\frac{5}{3}$ aviões de curto alcance em termos de utilização das instalações de manutenção.

A gestão pretende saber quantos aviões de cada tipo devem ser adquiridos de modo a maximizar o lucro.

6. As enfermeiras de um hospital trabalham três dias por semana. A necessidade diária de enfermeiras é indicada na seguinte tabela, bem como os vários turnos existentes e o respetivo custo semanal em euros.

Dia	Turno					N.º de enfermeiras
	1	2	3	4	5	
2.ª feira	X		X			20
3.ª feira	X				X	25
4.ª feira			X	X		26
5.ª feira		X			X	26
6.ª feira		X		X	X	30
sábado		X		X		30
domingo	X		X			35
Custo	525	470	550	500	425	

Formule o problema em PLI e resolva-o utilizando software apropriado.

7. A empresa *Jobco* pretende planear a produção de um lote de, pelo menos, 2000 peças, utilizando as três máquinas disponíveis.

Por razões operacionais, se uma determinada máquina for utilizada, é necessário respeitar uma quantidade mínima de produção de 600 peças nessa mesma máquina. Os custos de preparação (*set-up*), os custos unitários de produção e as capacidades máximas de produção de cada máquina estão apresentados na tabela seguinte:

Máquina	Custo de Preparação	Custo Unitário	Capacidade Máxima
1	300	2	650
2	100	10	850
3	200	5	1250

Determinar quantas peças devem ser produzidas em cada máquina, de modo minimizar o custo total.

8. Suponha que o produto zw ocorre numa restrição, onde z e w são variáveis binárias. Como é que este termo pode ser linearizado?
9. No seguinte mapa encontra-se representada uma floresta dividida em 7 talhões i , com $i = 1, \dots, 7$, com as áreas indicadas. A quantidade de madeira é proporcional à área plantada. Devido a condicionantes ecológicas e paisagísticas, não é possível cortar talhões que sejam adjacentes. O tipo de corte praticado é o “corte raso”, isto é são cortadas todas as árvores dos talhões selecionados. Pretende-se determinar os talhões a cortar de forma a maximizar a quantidade de madeira cortada. Escreva um modelo de PLI para este problema e resolva-o utilizando software apropriado.

1 : 45 ha		
2 : 20 ha	3 : 10 ha	
	4 : 40 ha	
5 : 10 ha	6 : 15 ha	
7 : 30 ha		

10. Seja $I = \{1, 2, \dots, m\}$ um conjunto de agentes, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de tarefas a realizar, c_{ij} o custo do agente $i \in I$ realizar a tarefa $j \in J$, r_{ij} os recursos necessários para o agente $i \in I$ realizar a tarefa $j \in J$ e b_i a quantidade de recursos disponíveis no agente $i \in I$. Pretende-se afetar as tarefas aos agentes com custo mínimo respeitando as quantidades de recursos disponíveis. Formule o problema em PLI, e resolva-o considerando os seguintes dados:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

11. Considere os seguintes problemas de PLI:

(a)

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Resolva a sua relaxação linear e indique o que pode concluir sobre o seu valor ótimo.

12. Escreva o algoritmo de *branch-and-bound* considerando que P é um problema de maximização.
13. Resolva utilizando o algoritmo de *branch-and-bound* os seguintes PLIs, considerando as seguintes regras de ramificação: (i) Ramificando a variável de menor índice, e (ii) Ramificando a variável “mais fracionária”.

(a)

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 4x_2 \\
\text{s.a: } &-x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
&4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\min z &= 5x_1 + x_2 \\
\text{s.a: } &5x_1 - x_2 \geq 7 \\
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

14. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned}
\min z &= 21x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\
\text{s.a: } &1.4x_1 - 2.3x_2 + 2.4x_3 + 2.2x_4 \geq 33.3 \\
&-0.5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 5 \\
&-x_1 - 0.8x_2 + 2.5x_3 - 3.5x_4 \geq 15 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

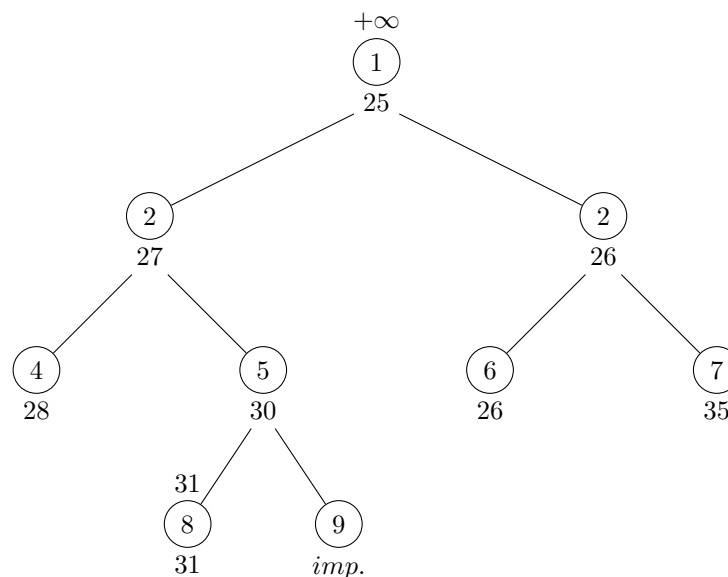
Resolva-o recorrendo ao algoritmo de *branch-and-bound*, considerando como critério de paragem “resolver não mais de dez subproblemas”, e ramificando escolhendo sempre a variável de índice mais baixo. Indique a melhor SA encontrada e indique o valor ótimo ou, caso não o tenha encontrado, enquadre-o utilizando os melhores valores possíveis para o minorante e o majorante. Nota: Utilize o Solver do Excel para resolver as relaxações lineares dos subproblemas.

15. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned}
(P) \equiv \max z &= x_1 - x_2 \\
\text{s.a: } &2x_1 - x_2 \leq 3 \\
&6x_1 + 10x_2 \geq 15 \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

- (a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P). O que pode concluir acerca do valor ótimo de (P)?
 (b) Resolva (P) com o algoritmo de *branch-and-bound*.

16. Considere a seguinte árvore de enumeração para um problema de minimização, onde se indicam os limites inferiores para os subproblemas associados a cada nodo, bem como limites superiores para alguns dos subproblemas.



- (a) Indique os melhores limites, inferior e superior, para o valor ótimo do problema, bem como um majorante do desvio da melhor solução em relação ao valor ótimo.
- (b) Quais os nodos da árvore apresentada poderiam ser cancelados e quais deveriam estar sujeitos a nova ramificação ?
17. Resolva pelo algoritmo de *branch-and-bound* os seguintes problemas de PLI. Escolha para ramificar o problema com melhor majorante/minorante (em caso de empate escolha o último problema criado), e a variável mais fracionária (em caso de empate escolha a variável com maior coeficiente na FO).

$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a: } 2x_1 + 5x_2 &\leq 25 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } 16x_1 - 4x_2 &\leq 13 \\ -3x_1 - 2x_2 &\leq -8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$
--	---

18. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Indique quais das seguintes desigualdades são válidas para o problema apresentado e, das desigualdades válidas, quais são planos de corte para a solução ótima da relaxação linear.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| i. $3x_1 + 4x_2 \leq 6$ | iii. $-x_1 + 2x_2 \leq 3$ |
| ii. $-2x_1 + 2x_2 \leq 1$ | iv. $x_1 + 3x_2 \leq 4$ |
19. Resolva os problemas de PLI apresentados de seguida utilizando o algoritmo de planos de corte de Gomory. Represente graficamente os cortes de Gomory obtidos para cada um dos problemas.

$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$
---	--

20. Considere o seguinte PLI em que x_2 e x_3 são as VBs na SO da sua relaxação linear.

$$\begin{aligned} \min z &= 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a: } 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\geq 27 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq 16 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Obtenha o valor ótimo da relaxação linear após a introdução de um corte de Gomory. Para gerar o corte de Gomory considere a restrição associada à VB de menor índice. Compare o valor obtido com o valor que obterias se resolvesse o PLI dado. Sem resolver, explique se seria necessário introduzir novo corte.

21. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Através do processo de Chvátal-Gomory obtenha as desigualdades válidas $x_2 \leq 1$ e $x_1 + x_2 \leq 2$.

22. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a: } 3x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(a) Mostre que $(\frac{21}{11}, \frac{29}{11})$ é a solução ótima da relaxação linear de P .

(b) Utilize os multiplicadores $u_1 = \frac{1}{11}$ e $u_2 = \frac{3}{11}$, para derivar um plano de corte de Chvátal-Gomory válido. Mostre que obteve um corte.

23. Considere o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 36, x_1 \leq 20y_1, x_2 \leq 10y_2, x_3 \leq 10y_3, x_4 \leq 8y_4\}.$$

Derive uma restrição válida para X .

24. Determine desigualdades válidas para o conjunto de pontos $(x_1, \dots, x_m, y)$ definidos por

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq my, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad y \in \{0, 1\}.$$