
LABORATÓRIO DE ESTATÍSTICA



Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
1º Ano / 1º Semestre
2026/2027

CONTACTO

Professora: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

PROGRAMA



1. Conceitos
Fundamentais de
Estatística



2. Análise
Exploratória de
Dados



3. Redução e
Sintetização de
Dados



4. Associação e
Relações entre
Variáveis



5. Números
Índices



6. Sucessões
Cronológicas

AULA PRÁTICA 6: EXERCÍCIOS

3.2, 3.4 E 3.6

EXERCÍCIO 3.2

3.2 Considere a informação constante do enunciado relativo ao exercício 2.3.

- a) Analise a simetria ou assimetria da distribuição a partir da construção da caixa de bigodes.
- b) Determine o salário médio resultante de um aumento generalizado de 10% dos salários.
- c) Avalie a concentração dos dados.

2.3 A informação estatística relativa aos salários mensais auferidos por 100 trabalhadores de uma empresa têxtil consta do quadro que se segue:

Salário (euros)	Trabalhadores (%)
[600 ; 900]	9
]900 ; 1000]	18
]1000 ; 1100]	35
]1100 ; 1200]	22
]1200 ; 1300]	16

- a) Defina a variável em estudo e classifique-a.
- b) Represente graficamente os dados.
- c) Avalie a simetria dos dados a partir da representação gráfica realizada.



EXERCÍCIO 3.2 A): SOLUÇÃO



Answer:

a) Assume-se $\min(x_i) = 600$ e $\max(x_i) = 1300$.

Quadro de frequências

Salário (x)	x_j	f_j	F_j^*
[600, 900]	750	0.09	0.09
]900, 1000]	950	0.18	0.27
]1000, 1100]	1050	0.35	0.62
]1100, 1200]	1150	0.22	0.84
]1200, 1300]	1250	0.16	1

$$\bullet Q_1 = q_{0.25} = 900 + \frac{0.25 - 0.09}{0.27 - 0.09} \times 100 = 988. (8)$$

$$\bullet Q_2 = q_{0.5} = 1000 + \frac{0.5 - 0.27}{0.62 - 0.27} \times 100 = 1065. (714285)$$

$$q_p = l + \frac{p - F^*(l)}{F^*(L) - F^*(l)} \cdot h$$

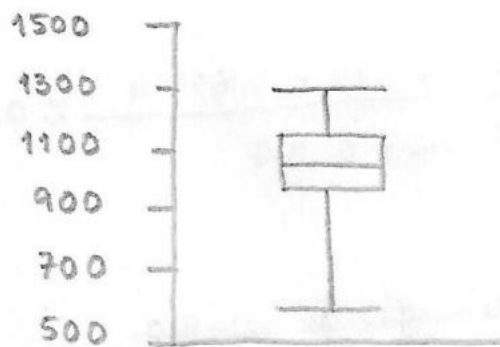
EXERCÍCIO 3.2 A): SOLUÇÃO



Answer:

$$\bullet Q_3 = q_{0.75} = 1100 + \frac{0.75 - 0.62}{0.84 - 0.62} \times 100 = 1159.09$$

Caixa de Bigodes



Na caixa de bigodes verifica-se que o terceiro quartil está muito próximo do máximo, o que evidencia uma distribuição dos dados assimétrica negativa (enviesada à direita).

QUANTIS PARA DADOS CLASSIFICADOS

$$q_p = l + \frac{p - F^*(l)}{F^*(L) - F^*(l)} \cdot h$$

Silvestre (2007)

Legend / Notes:

- q_p = p-th quantile of grouped data
- l = lower class boundary of the class containing q_p
- L = upper class boundary of that class
- $F^*(l)$ = cumulative relative frequency at l
- $F^*(L)$ = cumulative relative frequency at L
- p = quantile proportion (e.g., 0.25 for Q1)
- $h = L - l$ = class width of the class containing the quantile

EXERCÍCIO 3.2 B): SOLUÇÃO



Answer:

b) Salário médio atual : $\bar{x} = \sum_{j=1}^5 x_j f_j = 750 \times 0.09 + 950 \times 0.18 + 1050 \times 0.35 + 1150 \times 0.22 + 1250 \times 0.16 = 1059$

Seja z o novo salário com o aumento generalizado de 10%. Assim,

$$z = x + 0.1x = x(1 + 0.1) = 1.1x$$

$$z = 1.1 x$$

Por uma propriedade da média, sabe-se que:

$$\bar{z} = 1.1 \bar{x} = 1.1 \times 1059 = 1164.9$$

FOUR PROPERTIES OF THE MEAN

Let $m(x)$ or $\bar{x}$ be the mean of variable x .

Note: The notation used here follows **Silvestre (2007)**.

1. Addition / Subtraction of a Constant:

- Adding a constant c to all values:

$$m(x + c) = m(x) + c$$

- Subtracting a constant c from all values:

$$m(x - c) = m(x) - c$$

2. Multiplication / Division by a Constant:

- Multiplying all values by a constant c :

$$m(c \cdot x) = c \cdot m(x)$$

- Dividing all values by a constant c :

$$m(x/c) = m(x)/c$$

Silvestre (2007)

EXERCÍCIO 3.2 C): SOLUÇÃO



Answer:

c) Cálculo do Índice de Gini

Salário (x)	x_j	n_j	f_j	p_i	t_j	t_i	$q_i = t_i / \sum t_j$
[600, 900]	750	9	0.09	0.09	6750	6750	0.06374
]900, 1000]	950	18	0.18	0.27	17100	23850	0.22521
]1000, 1100]	1050	35	0.35	0.62	36750	60600	0.57224
]1100, 1200]	1150	22	0.22	0.84	25300	85900	0.81114
]1200, 1300]	1250	16	0.16	1	20000	105900	1

Logo, o índice de Gini é:

$$G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 q_i}{\sum_{i=1}^4 p_i} = 1 - \frac{0.06374 + 0.22521 + 0.57224 + 0.81114}{0.09 + 0.27 + 0.62 + 0.84} \approx 0.081$$

Este valor sugere pouca desigualdade na distribuição do salário.

MEASURE OF CONCENTRATION: GINI INDEX & LORENZ CURVE

1. Gini Index (G) – Discrete version

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{m-1} p_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m-1} q_i}{\sum_{i=1}^{m-1} p_i}$$

Notation:

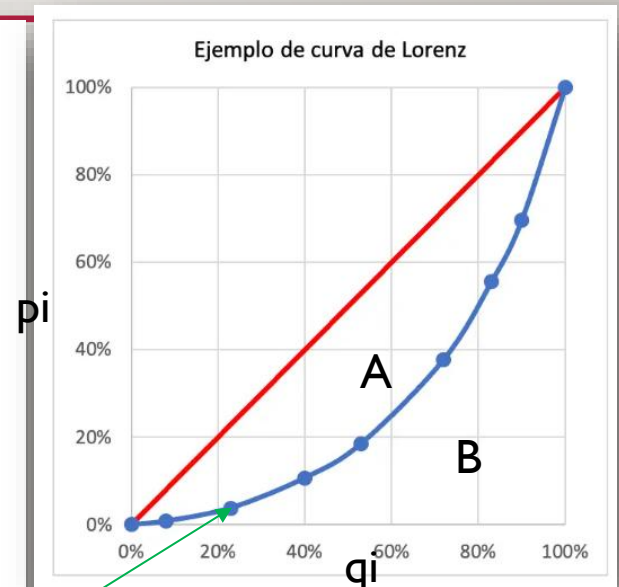
- $p_i = \frac{\sum_{j=1}^i n_j}{n}$ → cumulative proportion of **observations** up to class i
- $q_i = \frac{\sum_{j=1}^i t_j}{\sum_{k=1}^m t_k}$ → cumulative proportion of the **variable** up to class i
- $t_j = n_j \cdot x'_j$ → total of the variable in class j (x'_j = class midpoint)
- m = total number of classes

Conditions:

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad 0 \leq q_i \leq 1, \quad p_i \geq q_i, \quad i = 1, \dots, m$$

💡 Interpretation:

- $G = 0$ → perfect equality
- $G = 1$ → maximum inequality



$$Gini\ Index = \frac{A}{A + B}$$

2. Lorenz Curve

- Graph of q_i (cumulative share of variable) vs. p_i (cumulative population)
- The area between the Lorenz curve and the line of equality is used to calculate G

GINI INDEX FOR DATA GROUPED: EXAMPLE

Data

Class (k€)	n_j	x'_j	$t_j = n_j x'_j$
0–20	10	10	100
20–40	15	30	450
40–60	20	50	1000
60–80	5	70	350

Totals:

$$N = 10 + 15 + 20 + 5 = 50$$

$$T = 100 + 450 + 1000 + 350 = 1900$$

- n_j : class frequency
- x'_j : class midpoint
- $t_j = n_j x'_j$ (class total income)
- $N = \sum_j n_j$ (total population)
- $T = \sum_j t_j$ (total income)
- n_j/N (class population share)
- t_j/T (class income share)
- $P_i =$ (cumulative population share up to class i)
- $Q_i =$ (cumulative income share up to class i)

Shares and cumulative shares

Class	n_j/N	t_j/T	P_i (cum.)	Q_i (cum.)
0–20	0.20000	0.0526316	0.20000	0.0526316
20–40	0.30000	0.2368421	0.50000	0.2894737
40–60	0.40000	0.5263158	0.90000	0.8157895
60–80	0.10000	0.1842105	1.00000	1.0000000

(Values shown to 5–7 significant digits for clarity.)

GINI INDEX FOR DATA GROUPED: EXAMPLE

Apply Silvestre's formula

Silvestre's version sums the cumulative shares **up to the penultimate class** (i.e. exclude the last row where $P_m = Q_m = 1$):

$$G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m-1} Q_i}{\sum_{i=1}^{m-1} P_i}.$$

Compute the sums (exclude last class):

- $\sum_{i=1}^{m-1} P_i = 0.20000 + 0.50000 + 0.90000 = 1.60000$
- $\sum_{i=1}^{m-1} Q_i = 0.0526316 + 0.2894737 + 0.8157895 = 1.1578948$

Now

$$G = 1 - \frac{1.1578948}{1.60000} = 1 - 0.72368425 = 0.27631575 \approx \mathbf{0.27632}.$$

★ In theory:

- $G = 0 \rightarrow$ perfect equality (everyone has exactly the same income).
- $G = 1 \rightarrow$ maximum inequality (one person has all the income).

★ In practice:

Researchers often classify Gini values into approximate ranges:

Gini Value	Typical Interpretation
0.00 – 0.20	Very low inequality (almost perfect equality, rarely observed in large societies).
0.20 – 0.30	Low inequality.
0.30 – 0.40	Moderate inequality.
0.40 – 0.50	High inequality.
> 0.50	Very high (extreme) inequality.

EXERCISE 3.4

3.4 A informação relativa aos salários dos trabalhadores de uma multinacional consta do quadro que se segue:

Classes	0 - 3	3 - 6	6 - 9	9 - 12
Número de trabalhadores	500	1500	2500	500

- a) Calcule o salário médio e o salário mediano.
- b) Qual a percentagem de trabalhadores que auferem um salário superior à média?
- c) Determine o salário médio dos 30% de trabalhadores com menores salários.
- d) Determine o rendimento médio dos 30% de trabalhadores com maiores salários.



EXERCISE 3.6

3.6 Considere os dados relativos ao consumo de gásóleo (litros) de 10 automóveis das marcas A e B, num determinado percurso de 100 km:

Marca A: 7,8; 7,0; 8,2; 7,6; 6,9; 7,7; 7,2; 7,8; 7,3; 7,5

Marca B: 7,0; 7,1; 7,1; 7,3; 7,2; 7,0; 7,8; 8,0; 7,0; 7,0

- a) Avalie comparativamente o consumo médio através de uma medida de tendência central que considere adequada para o efeito.
- b) A partir do diagrama de caule e folhas duplo analise a simetria dos dados e interprete no contexto do enunciado.
- c) Recorrendo à função cumulativa de frequências, calcule a proporção de carros da amostra da marca A cujo consumo é superior a 7.3 litros. Identifique a frequência calculada.



OBRIGADA!

Questões?

