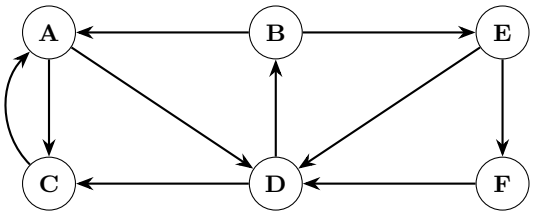
Programação Matemática II

Capítulo 3: Otimização em redes

Ano letivo 2026/2027

1. Considere o seguinte grafo orientado G:

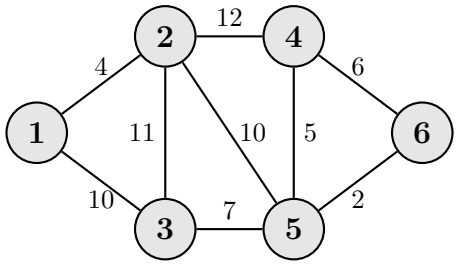


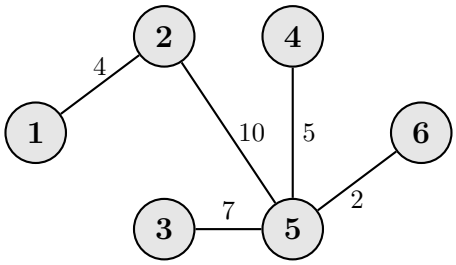
   (a) Determine um caminho do nodo A ao nodo F que seja simples e elementar.

   (b) Ignorando a orientação dos arcos, identifique três cadeias distintas de A a F que sejam elementares e um ciclo que contenha todos os nodos do grafo.

   (c) Diga, justificando, se o grafo G é conexo e, em caso afirmativo, diga se é fortemente conexo.

2. A figura seguinte ilustra um grafo G e a árvore geradora de custo mínimo T^* desse grafo:

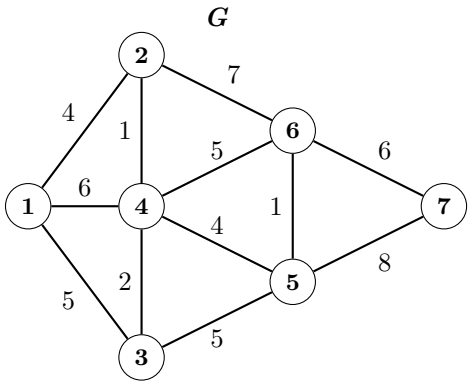


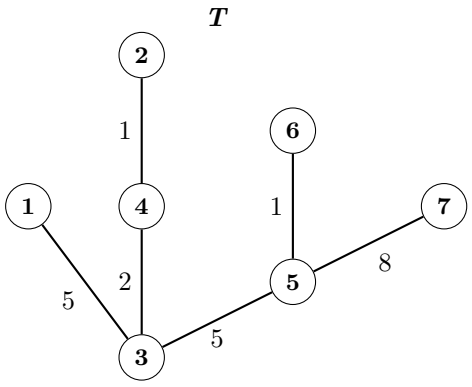


   (a) Listando cada arco não pertencente à árvore geradora de custo mínimo T^*, verifique T^* satisfaz as condições de otimalidade de ciclo.

   (b) Listando cada arco não pertencente à árvore geradora de custo mínimo T^*, verifique T^* satisfaz as condições de otimalidade de corte.

3. A figura seguinte ilustra um grafo G e uma árvore geradora T desse grafo:





(a) Verifique, utilizando as condições de otimalidade de ciclo e de corte, que T não é ótima e sugira uma árvore de custo inferior.

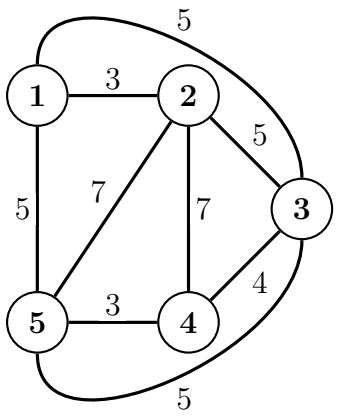
(b) Como pode verificar se existem soluções ótimas alternativas sem determinar todas as árvores geradoras?

(c) Determine a árvore geradora de custo mínimo:

i. Utilizando o algoritmo de Kruskall.

ii. Utilizando o algoritmo de Prim.

4. Numa cidade há cinco bairros com problemas de roubos e violência. A polícia decidiu instalar um sistema de computadores em rede para facilitar a comunicação entre os respetivos quartéis. A disposição geográfica dos bairros e a distância entre cada um deles estão representadas na figura seguinte:



Pretende-se efetuar uma ligação com cabos subterrâneos de modo que a partir de um qualquer bairro se possa aceder a qualquer dos outros minimizando o comprimento total de cabo utilizado.

(a) Resolva este problema utilizando um algoritmo apropriado.

(b) Mostre que a solução encontrada não é única e obtenha uma solução ótima alternativa.

5. A empresa *Wirehouse Lumber Company* iniciará em breve a exploração de oito terrenos florestais na mesma área. Por isso, deve desenvolver um sistema de estradas de terra que torne cada terreno acessível a partir de qualquer outro. A distância, em unidades de distância, entre cada par de terrenos é a seguinte:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	-	13	21	9	7	18	20	15
2	13	-	9	18	12	26	23	11
3	21	9	-	26	17	25	19	10
4	9	18	26	-	7	16	15	9
5	7	12	17	7	-	9	11	8
6	18	26	25	16	9	-	6	10
7	20	23	19	15	11	6	-	5
8	15	11	10	9	8	10	5	-

A gestão pretende determinar quais as estradas a construir para ligar todos os terrenos com um comprimento total mínimo. Resolva este problema com um algoritmo apropriado e indique que estradas devem ser construídas.

6. O banco *Premiere Bank* irá em breve interligar os computadores de cada uma das suas sucursais ao computador central na sede. As linhas telefónicas dedicadas podem ser ligadas diretamente ou indiretamente (através de outra sucursal). O custo das linhas depende da distância entre sucursais e é dado na tabela seguinte:

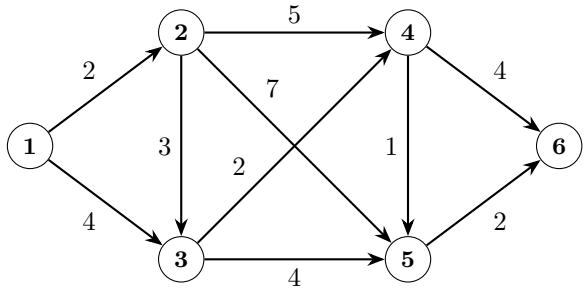
	Sede	**Suc. 1**	**Suc. 2**	**Suc. 3**	**Suc. 4**
Sede	–	190	70	115	270
Suc. 1	190	–	100	110	215
Suc. 2	70	100	–	140	120
Suc. 3	115	110	140	–	175
Suc. 4	270	215	120	175	–

   Indique que linhas devem ser ligadas de forma a minimizar o custo de ligação das linhas.

7. Adapte os algoritmos de Kruskal e Prim para determinarem a árvore de custo máximo num grafo.

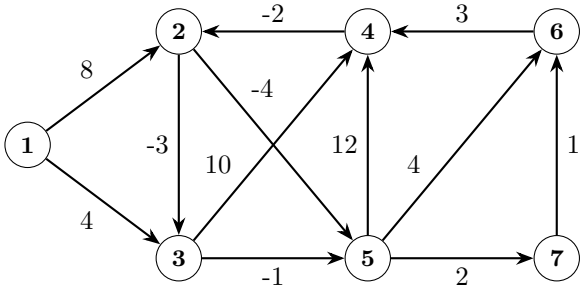
8. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
   (a) Dada uma árvore geradora, existe um caminho de qualquer nodo i a qualquer nodo j e, se a árvore geradora for de custo mínimo, então o caminho entre o nodo i e o nodo j é o caminho mais curto.
   (b) Se o caminho mais curto entre um nodo i e um nodo j passa por um nodo k, então o subcaminho de i a k é o caminho mais curto do nodo i ao nodo k.

9. Considere o seguinte grafo orientado G onde os valores junto a cada arco representam o seu comprimento:



   (a) Use o Algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho mais curto entre o nodo 1 e o nodo 6.
   (b) Ignore a orientação dos arcos e identifique uma cadeia simples mas não elementar entre o nodo 1 e o nodo 6.

10. Considere o seguinte grafo:

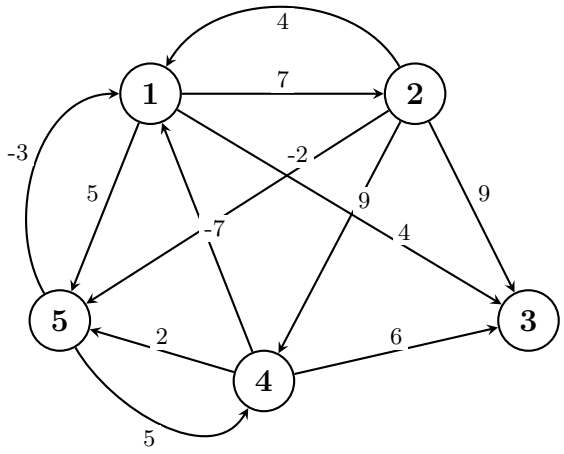


   (a) Aplicando o Algoritmo de Bellman-Ford, encontre o caminho mais curto entre o nodo 1 e todos os outros nodos do grafo.

(b) Altere o custo do arco $(2,3)$ de -3 para -6 e repita o exercício.

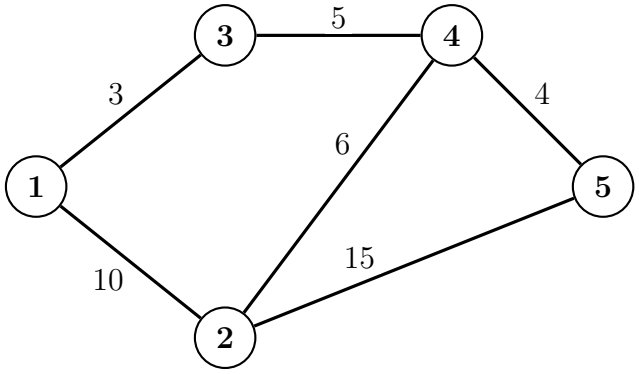
Em qualquer dos casos, identifique os circuitos de custo total negativo que eventualmente existam, assim que forem detetados.

11. Considere agora o seguinte grafo:



Aplique o Algoritmo de Floyd para determinar o caminho mais curto entre todos os pares de nodos. Indique o caminho mais curto entre 1 e 4 e qual o seu custo.

12. Considere agora o seguinte grafo:



(a) Faça duas iterações do Algoritmo de Floyd.

(b) Supondo que no final da aplicação do Algoritmo de Floyd obtinha as seguintes matrizes:

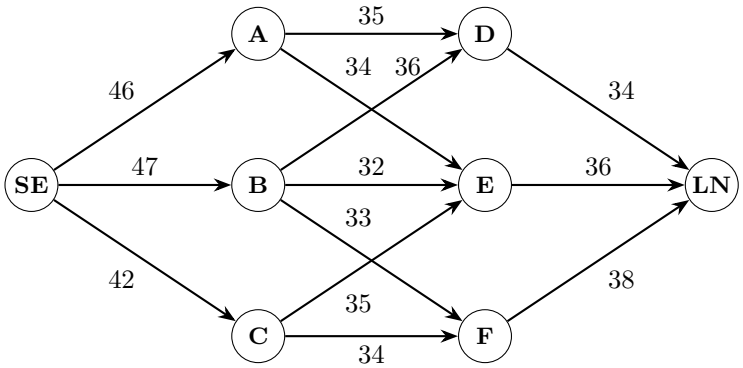
$$D^5 = \begin{bmatrix} - & 10 & 3 & 8 & 12 \\ 10 & - & 11 & 6 & 10 \\ 3 & 11 & - & 5 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & - & 4 \\ 12 & 10 & 9 & 4 & - \end{bmatrix} \qquad P^5 = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & - & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & - & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & - & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & - \end{bmatrix}$$

Identifique os seguintes caminhos bem como os respetivos comprimentos:

i. Caminho mais curto de 1 a 5.

ii. Caminho mais curto de 1 a 5 passando pelo nodo 2.

13. Os voos da *Speedy Airlines* estão prestes a descolar de Seattle para Londres. Existe alguma flexibilidade na escolha da rota, que deve ter em conta as condições meteorológicas. A rede seguinte representa as rotas possíveis em consideração, onde *SE* e *LN* são Seattle e Londres, respetivamente, e os outros nodos representam várias localizações intermédias.



(a) O que representam as "distâncias" na interpretação deste problema como um problema de caminho mais curto?

(b) Utilize um algoritmo do caminho mais curto apropriado para resolver este problema.