Programação Matemática II

Capítulo 3: Otimização em Redes

Raquel Bernardino

rbernardino@iseg.ulisboa.pt
Gabinete 511 Quelhas 6

Sumário

Problema do fluxo máximo

Problema do fluxo de custo mínimo

Sumário

Problema do fluxo máximo

Problema do fluxo de custo mínimo

Fluxo admissível

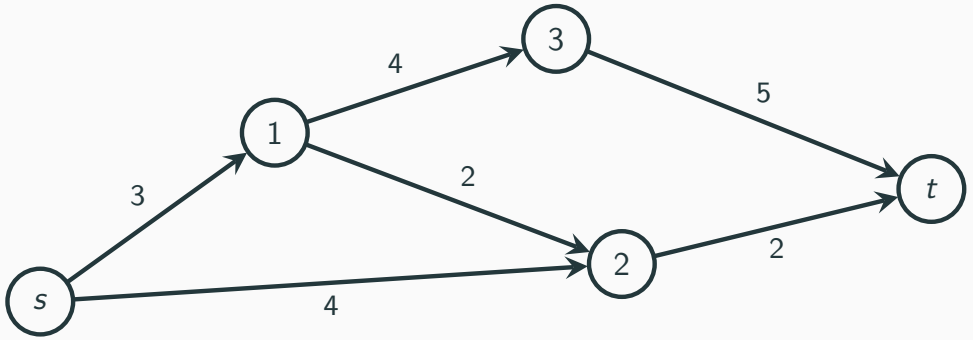
Definição

Considere-se um grafo orientado $G = (V, A)$. A capacidade máxima u_{ij} do arco $(i, j) \in A$ define o limite máximo de fluxo que pode passar nesse arco.

Um fluxo admissível é uma função $x : A \to \mathbb{R}_0^m$ que atribui a cada arco $(i, j) \in A$ um valor real x_{ij} que satisfaz duas propriedades:

1. Para todos os nodos que não são a origem nem o destino do fluxo, a quantidade de fluxo que entra no nodo é igual à quantidade de fluxo que sai do nodo - conservação de fluxo.
2. O fluxo em cada arco $(i, j) \in A$ não pode exceder u_{ij}, que é a capacidade do arco – limite de fluxo.

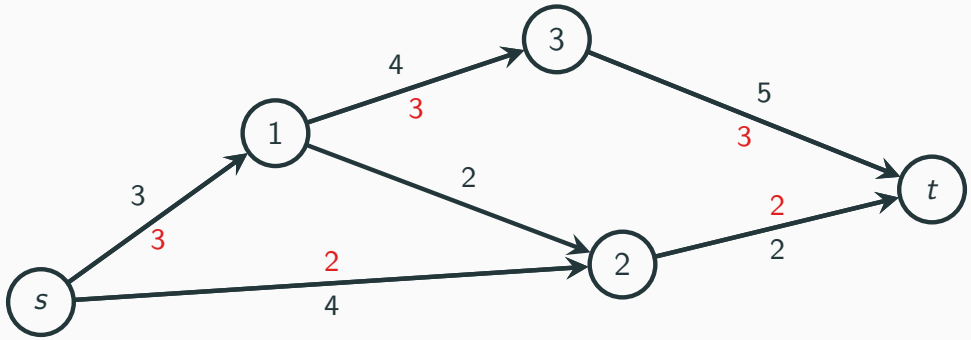
Exemplo



Considere-se que:

- s é a origem e t é o destino do fluxo; e
- os valores nos arcos representam as suas capacidades u_{ij}.

Exemplos de fluxos admissíveis de s a t?



- Quantidade de fluxo enviado de s a t?

Problema do fluxo máximo

Definição

Considere-se um grafo orientado $G = (V, A)$, com uma só origem $s \in V$ e um só destino $t \in V : s \neq t$. A cada arco $(i, j) \in A$ está associado um valor u_{ij}, que representa o limite máximo de fluxo que é possível atravessar esse arco. O problema do fluxo máximo consiste em determinar o fluxo admissível máximo que é possível enviar de s a t.

- Suposições:
  - As capacidades associadas aos arcos são valores inteiros e não negativos.
  - O grafo não contém um caminho de s a t que só contenha arcos com capacidade infinita - problema ilimitado.

Problema do fluxo máximo

- Formulação em programação linear:

x_{ij} : quantidade de fluxo que atravessa o arco $(i,j) \in A$

$$\max \quad v$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} v, & i = s \\ 0, & i \in V \setminus \{s,t\} \\ -v, & i = t \end{cases} \qquad \text{conservação fluxo}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad \text{limite fluxo}$$

Problema do fluxo máximo

Definição

Considere-se um grafo orientado $G = (V, A)$. Seja S' um subconjunto de nodos contendo o nodo s e seja $S = V \setminus S'$ tal que $t \in S$. Define-se como o corte que separa s de t o conjunto de arcos:

$$[S', S] = \{(i,j) \in A : i \in S' \text{ e } j \in S\} \cup \{(i,j) \in A : i \in S \text{ e } j \in S'\}.$$

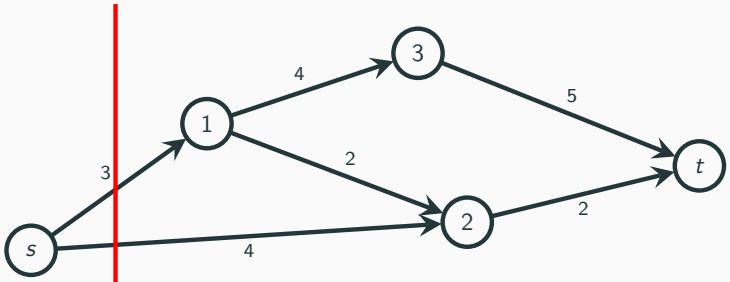
A capacidade do corte $[S', S]$ define-se como:

$$capacidade[S', S] = \sum_{(i,j) \in A : i \in S', j \in S} u_{ij}.$$

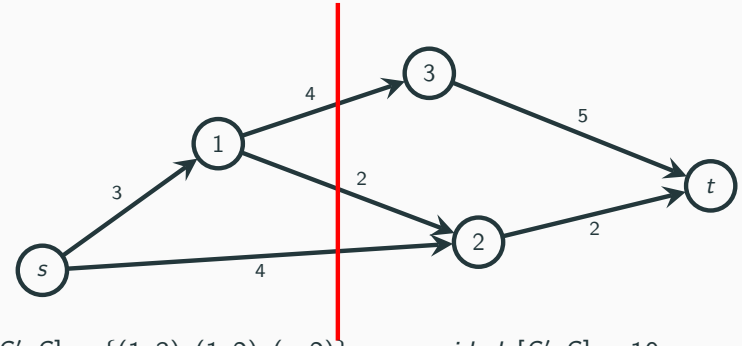
- Se os arcos $(i,j) \in A$ tiverem um limite inferior $l_{ij} > 0$, a capacidade do corte define-se como:

$$capacidade[S', S] = \sum_{(i,j) \in A : i \in S' \text{ e } j \in S} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in A : i \in S \text{ e } j \in S'} l_{ij}.$$

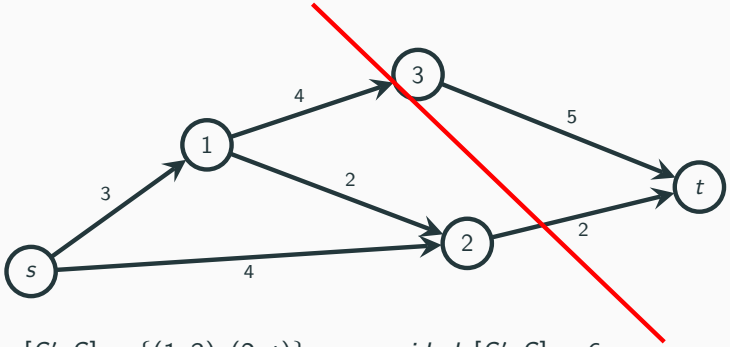
Exemplo



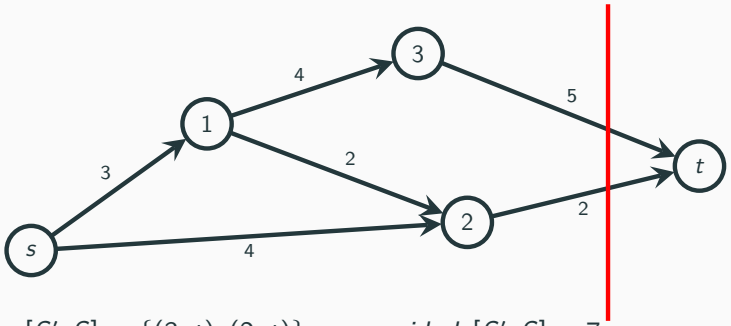
$[S', S] = \{(s, 1), (s, 2)\}$ e $capacidade[S', S] = 7$



$[S', S] = \{(1, 3), (1, 2), (s, 2)\}$ e $capacidade[S', S] = 10$



$[S', S] = \{(1, 3), (2, t)\}$ e $capacidade[S', S] = 6$



$[S', S] = \{(3, t), (2, t)\}$ e $capacidade[S', S] = 7$

Problema do fluxo máximo

Lema

O valor de qualquer fluxo admissível entre s e t é menor ou igual que a capacidade de qualquer corte que separa s de t.

Demonstração.

Considere-se um corte $[S', S]$: $s \in S'$ e $t \in S$ e x um fluxo admissível com valor v.

Somando as restrições de conservação de fluxo para $i \in S'$ obtemos:

$$\sum_{i \in S'} \Big(\sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} - \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} \Big) = v$$

$$\iff \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S'} x_{ji} + \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ji} - \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S'} x_{ij} - \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ij} = v$$

$$\iff \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ji} - \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ij} = v \implies \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ji} \geq v$$

Usando as restrições de limite do fluxo obtemos $\sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} u_{ji} \geq v$.

Relembrando que $\mathit{capacidade}[S', S] = \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} u_{ji}$, temos que o valor de qualquer fluxo admissível entre s e t é menor ou igual que a capacidade de qualquer corte que separe s de t. □

Problema do fluxo máximo

- Dado um grafo $G = (V, A)$, um fluxo admissível x e u_{ij} a capacidade máxima do arco $(i, j) \in A$:
  - Se $x_{ij} < u_{ij}$: O fluxo no arco (i, j) pode ser aumentado.
  - Se $x_{ij} > 0$: O fluxo no arco (i, j) pode ser diminuído.

Definição

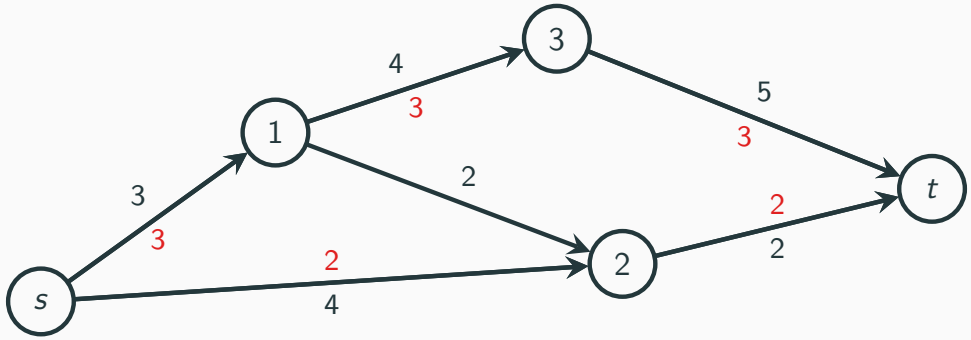
Considere-se grafo $G = (V, A)$ onde a capacidade máxima do arco $(i, j) \in A$ é u_{ij} e um fluxo admissível x. Define-se o grafo incremental (ou residual) $G' = (V, A')$ onde:

- $A' = \{(i, j) \in A : x_{ij} < u_{ij}\} \cup \{(j, i) : (i, j) \in A \text{ e } x_{ij} > 0\}$;
- $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, para $\{(i, j) \in A : x_{ij} < u_{ij}\}$; e
- $u'_{ji} = x_{ij}$, para $\{(j, i) : (i, j) \in A \text{ e } x_{ij} > 0\}$.

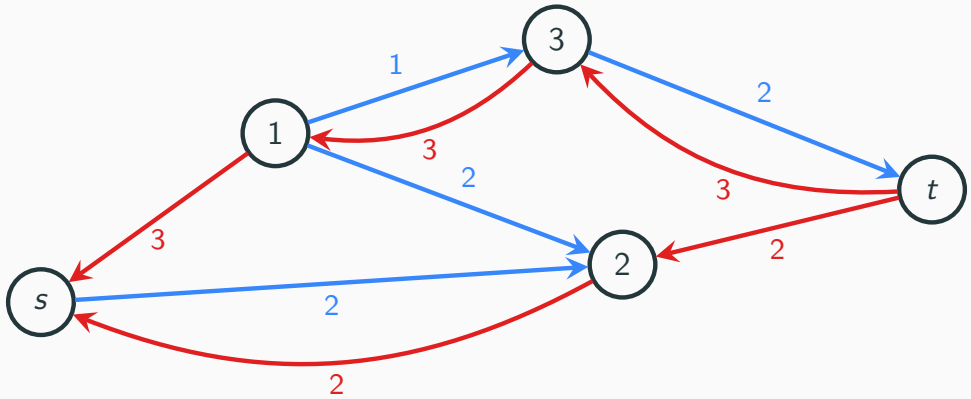
Um caminho de s a t em G' é um caminho de aumento.

Exemplo

- Grafo original $G = (V, A)$:



- Grafo incremental $G' = (V, A')$:



Nota: Não existe nenhum caminho de aumento entre s e t em G'.

Problema do fluxo máximo

Definições

Considere-se um grafo $G = (V, A)$ em que a capacidade do arco $(i, j) \in A$ é u_{ij} e um fluxo admissível x.

- Um arco está saturado se $x_{ij} = u_{ij}$.
- Um caminho está saturado se pelo menos um dos seus arcos está saturado.
- Um fluxo é saturante se todos os caminhos entre s e t estão saturados.

Problema do fluxo máximo

Teorema

Dado um grafo G e um fluxo admissível x, x é o fluxo máximo entre s e t se e só se não existir nenhum caminho de aumento em G'.

Demonstração.

$\Longrightarrow$) Suponha-se que existe um caminho de aumento P de s a t em G'. Assim, podemos enviarmos $\Delta > 0$ unidades de fluxo através de P de s a t e x não é o fluxo máximo.

$\Longleftarrow$) Suponha-se que não existe um caminho de aumento entre s e t em G'. Seja S' o conjunto dos nodos alcançáveis a partir de s em G' e $S = V \setminus S'$. Temos que $s \in S'$ e $t \in S$, pelo que $[S', S]$ define um corte que separa s de t.

Considere-se $(i, j) \in [S', S] : i \in S'$ e $j \in S$. Em G, o arco (i, j) está saturado pois j não é alcançável a partir de i em G'. Considere-se agora $(i, j) \in [S', S] : j \in S'$ e $i \in S$. Em G, o fluxo no arco (i, j) é nulo pois i não é alcançável a partir de j em G'.

Ora, $v = \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ij} - \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} x_{ji} = \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S} u_{ij} = capacidade[S', S]$.

Temos um fluxo entre s e t cujo valor é igual à capacidade de um corte que separa s de t. Logo, podemos concluir que o fluxo é máximo.

□

Problema do fluxo máximo

Teorema de Ford-Fulkerson

O valor do fluxo máximo entre s e t é igual à capacidade do corte de capacidade mínima que separa s de t.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

Ideia geral:

O algoritmo de Ford-Fulkerson, partindo de um fluxo admissível, vai enviar progressivamente uma maior quantidade de fluxo de s para t, identificando caminhos de aumento.
O algoritmo para quando não existe nenhum caminho de aumento no grafo residual.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

- Seja $G = (V, A)$ um grafo em que capacidade do arco $(i, j) \in A$ é u_{ij}.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

1: Considerar um qualquer fluxo admissível x. Por exemplo, o fluxo nulo, i.e., $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in A$.
2: **while** true **do**
3: Construir o grafo incremental G' associado a G e ao fluxo x.
4: No grafo incremental G' determinar um caminho entre s e t. Seja P esse caminho.
5: **if** P existe **then**
6: Seja $\Delta = \min_{(i,j) \in P} \{u'_{ij}\}$.
7: Atualizar fluxo: $x_{ij} = x_{ij} + \Delta$, se $(i, j) \in P$; $x_{ij} = x_{ij} - \Delta$, se $(j, i) \in P$; e $x_{ij} = x_{ij}$, se $(i, j) \notin P$.
8: **else**
9: x é o fluxo máximo. STOP.
10: **end if**
11: **end while**

Algoritmo de Ford-Fulkerson

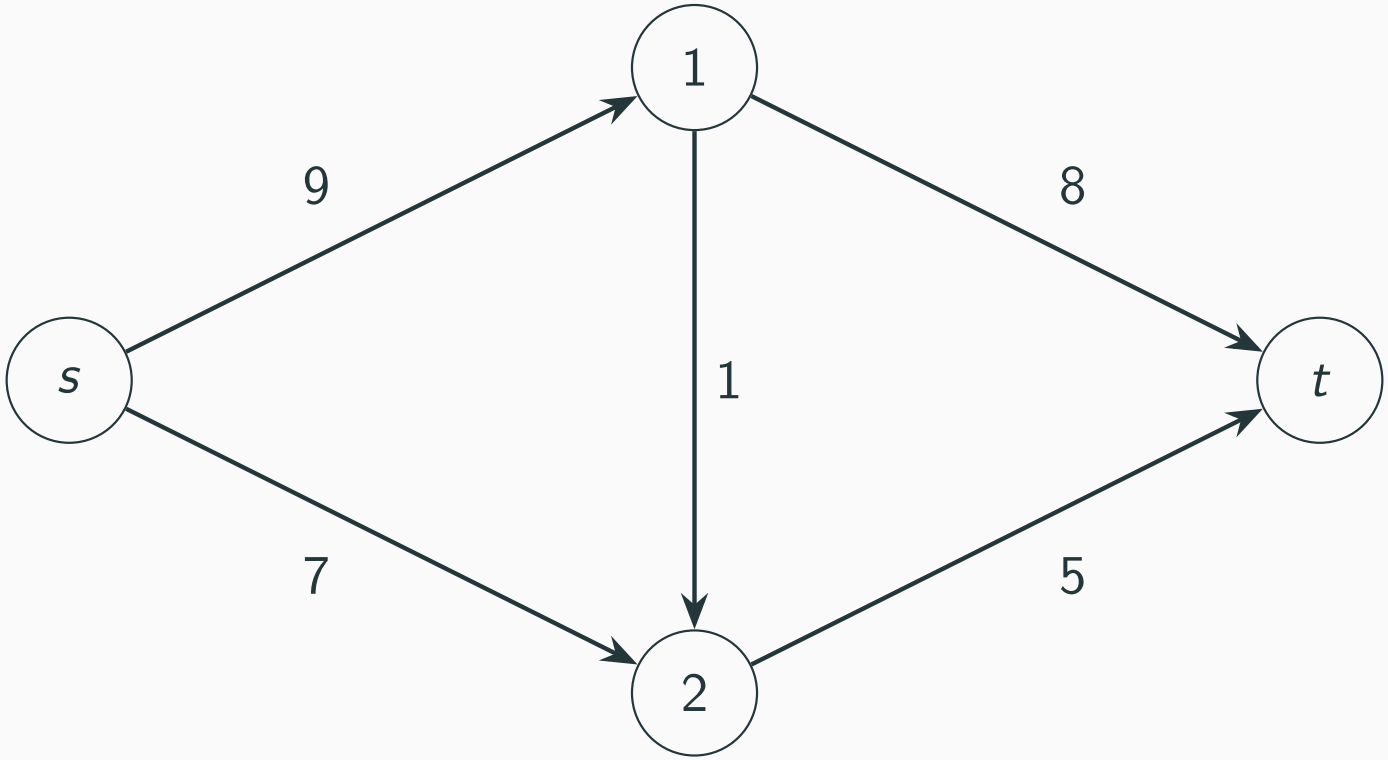
- Seja G' o grafo incremental associado ao fluxo máximo x.
  - O grafo onde não foi possível encontrar um caminho entre s e t.
- Seja S' o conjunto de nodos alcançáveis em G' a partir de s e $S = V \setminus S$.

O corte $[S', S]$ é um corte de capacidade mínima que separa s de t e tem capacidade igual a

$$\sum_{i \in S'} \sum_{j \in S:(i,j) \in A} u_{ij} = \sum_{i \in S'} \sum_{j \in S:(i,j) \in A} x_{ij}.$$

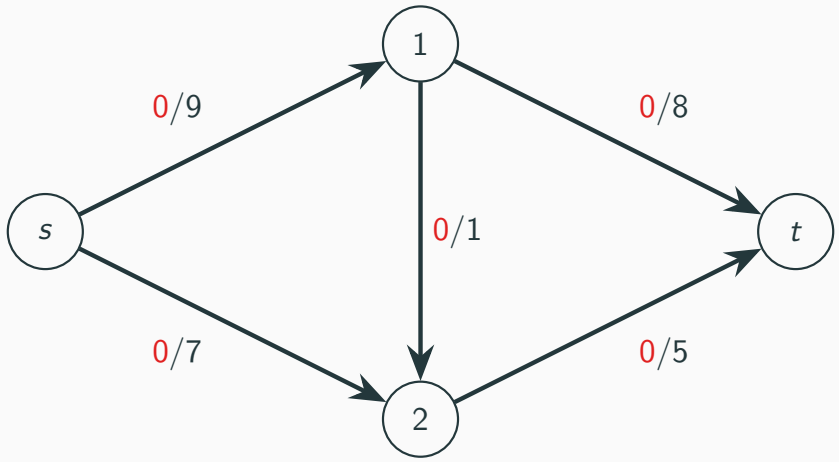
Exemplo

Determine o fluxo máximo de s a t no seguinte grafo:

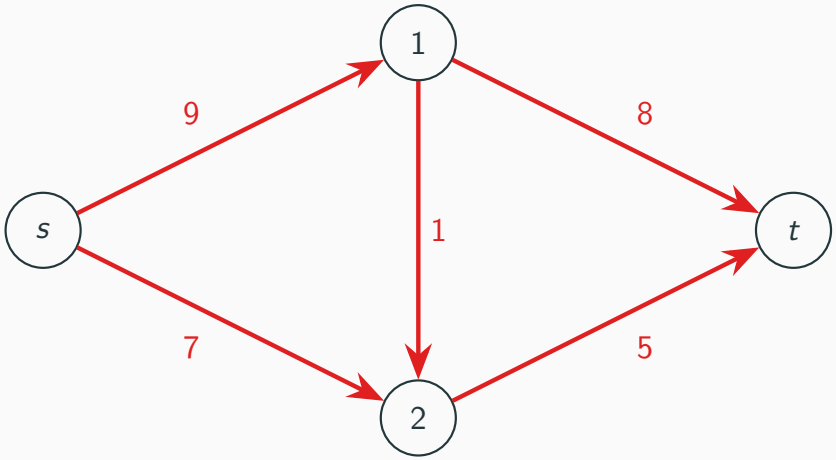


Exemplo

- Inicialização:



- Grafo incremental:

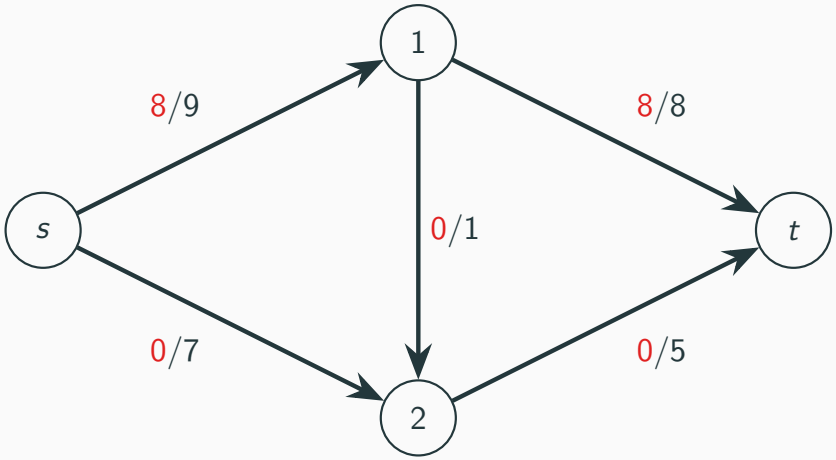


Um caminho de aumento é $P = ((s, 1), (1, t))$.

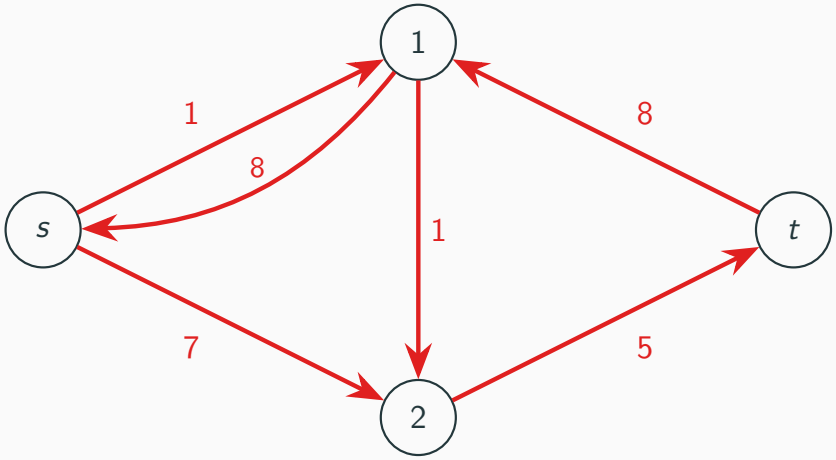
$\Longrightarrow \ \Delta = \min\{9, 8\} = 8.$

Exemplo

- Atualização do fluxo:



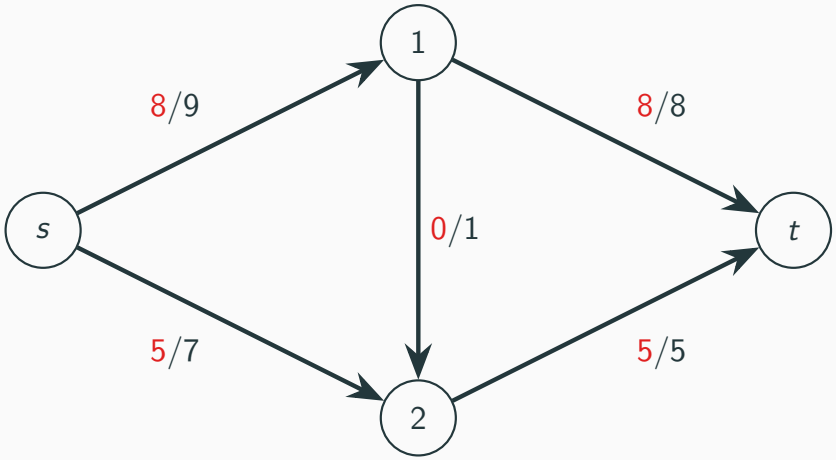
- Grafo incremental:



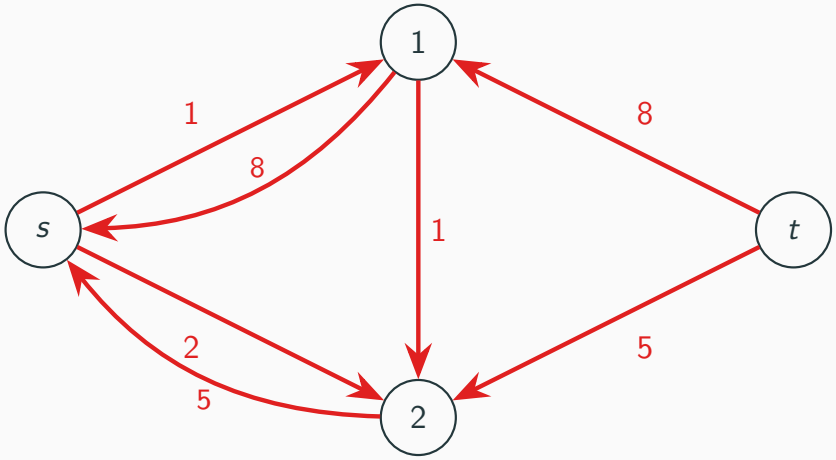
Um caminho de aumento é
$P = ((s, 2), (2, t))$.
$\Longrightarrow \ \Delta = \min\{7, 5\} = 5.$

Exemplo

- Atualização do fluxo:



- Grafo incremental:



Não existe um caminho de aumento entre s e t. $\Longrightarrow$ Fluxo máximo.
Fluxo máximo: $x_{s1} + x_{s2} = 8 + 5 = 13$
Corte capacidade mínima: $S' = \{s, 1, 2\}$, $[S', S] = \{(1, t), (2, t)\}$ e $u_{1t} + u_{2t} = 8 + 5 = 13$.

Problema do fluxo máximo: várias origens e destinos

Considere um grafo $G = (V, A)$ com n_s origens $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n_s}\}$ e n_t destinos $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n_t}\}$. Como se pode determinar o fluxo máximo entre todas as origens e todos os destinos?

- Resolvendo um problema do fluxo máximo no grafo $\hat{G}$.

Considere-se uma origem fictícia s' e um destino fictício t'. O grafo $\hat{G}$ define-se como:

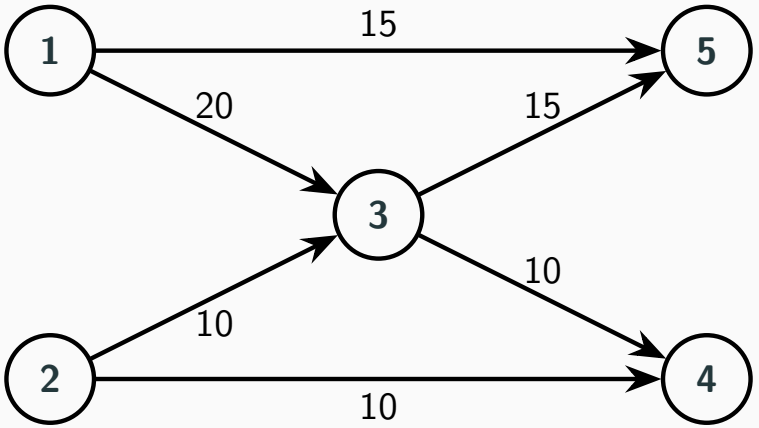
$$\hat{G} = (V \cup \{s', t'\}, A') \quad \text{onde}$$

$$A' = A \cup \{(s', s_j), j = 1, \ldots, n_s\} \cup \{(t_j, t'), j = 1, \ldots, n_t\}$$

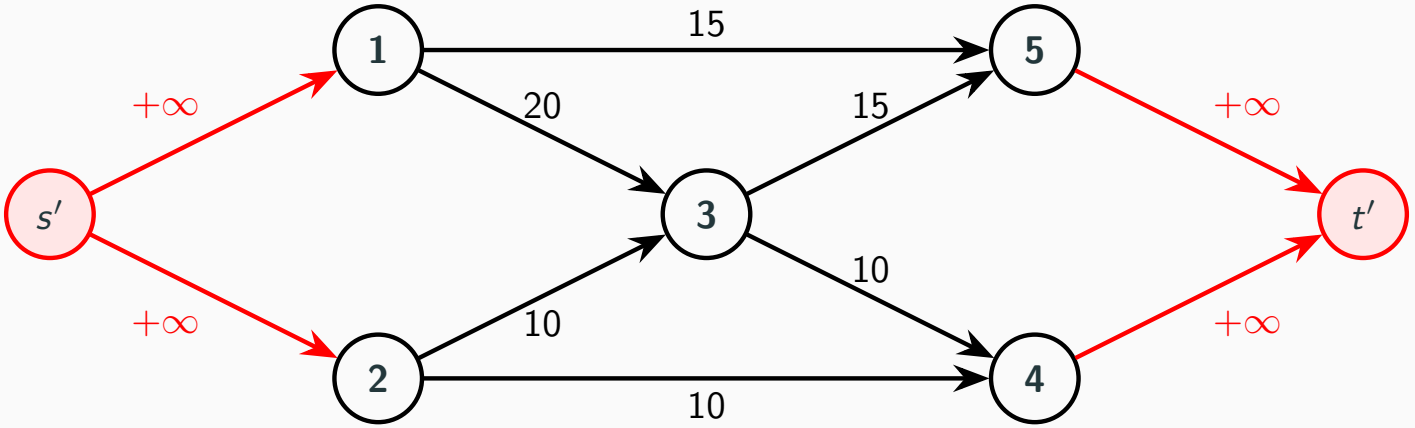
As capacidades dos arcos com nodo inicial igual a s' e nodo final igual a t' são $+\infty$.

Exemplo

Grafo com várias origens (nodos 1 e 2) e destinos (nodos 4 e 5)



Grafo $\hat{G}$



Problema fluxo máximo: capacidades nos nodos

Considere um grafo $G = (V, A)$ onde a capacidade do arco $(i, j) \in A$ é u_{ij} e do nodo $i \in V$ é q_i, i.e., o fluxo que passa por i não pode exceder q_i. Como se pode determinar o fluxo máximo entre s e t neste grafo?

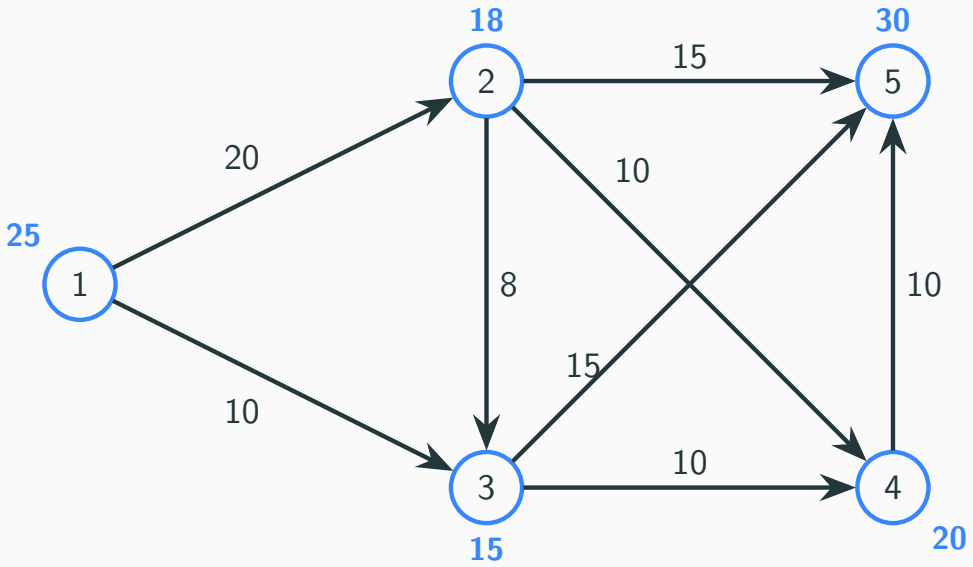
- Resolvendo um problema do fluxo máximo no grafo $\hat{G}$.

O grafo $\hat{G}$ é construído a partir de G da seguinte forma:

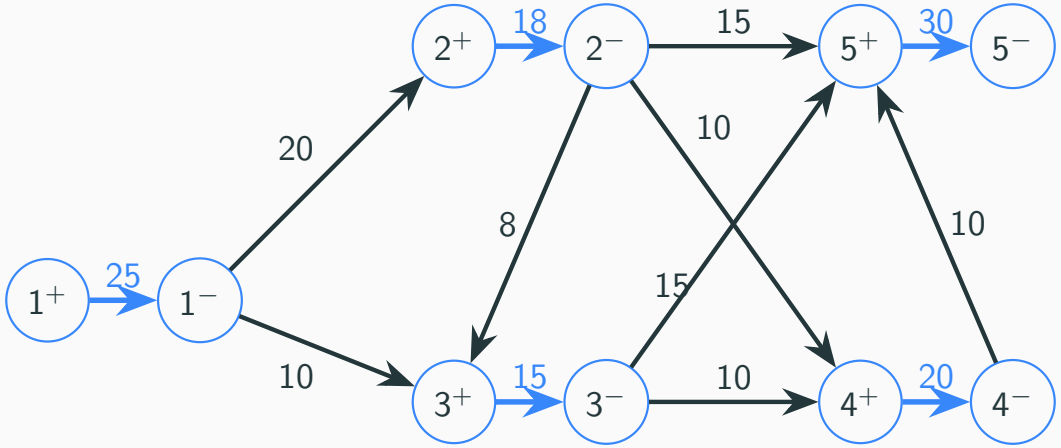
- A cada nodo $i \in V$ com capacidade finita fazemos corresponder:
  - dois nodos, i^+ e i^-; e
  - um arco (i^+, i^-) com capacidade q_i, i.e., $u_{i^+i^-} = q_i$.
- A cada arco $(i, j) \in A$ fazemos corresponder um arco (i^+, j^-) em $\hat{G}$ com capacidade u_{ij}.

Exemplo

Grafo com capacidades nos nodos



Grafo $\hat{G}$



Problema do fluxo máximo: capacidade mínima nos arcos

Considere um grafo $G = (V, A)$ onde a capacidade máxima do arco $(i, j) \in A$ é u_{ij} e a mínima é l_{ij}, i.e., o fluxo que atravessa (i, j) tem de estar no intervalo $[l_{ij}, u_{ij}]$. Como se pode determinar o fluxo máximo entre s e t neste grafo?

- Adaptando o algoritmo de Ford-Fulkerson para o grafo residual ter em conta as capacidades mínimas.

Seja $x_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$ o fluxo admissível que atravessa o arco $(i, j) \in A$:

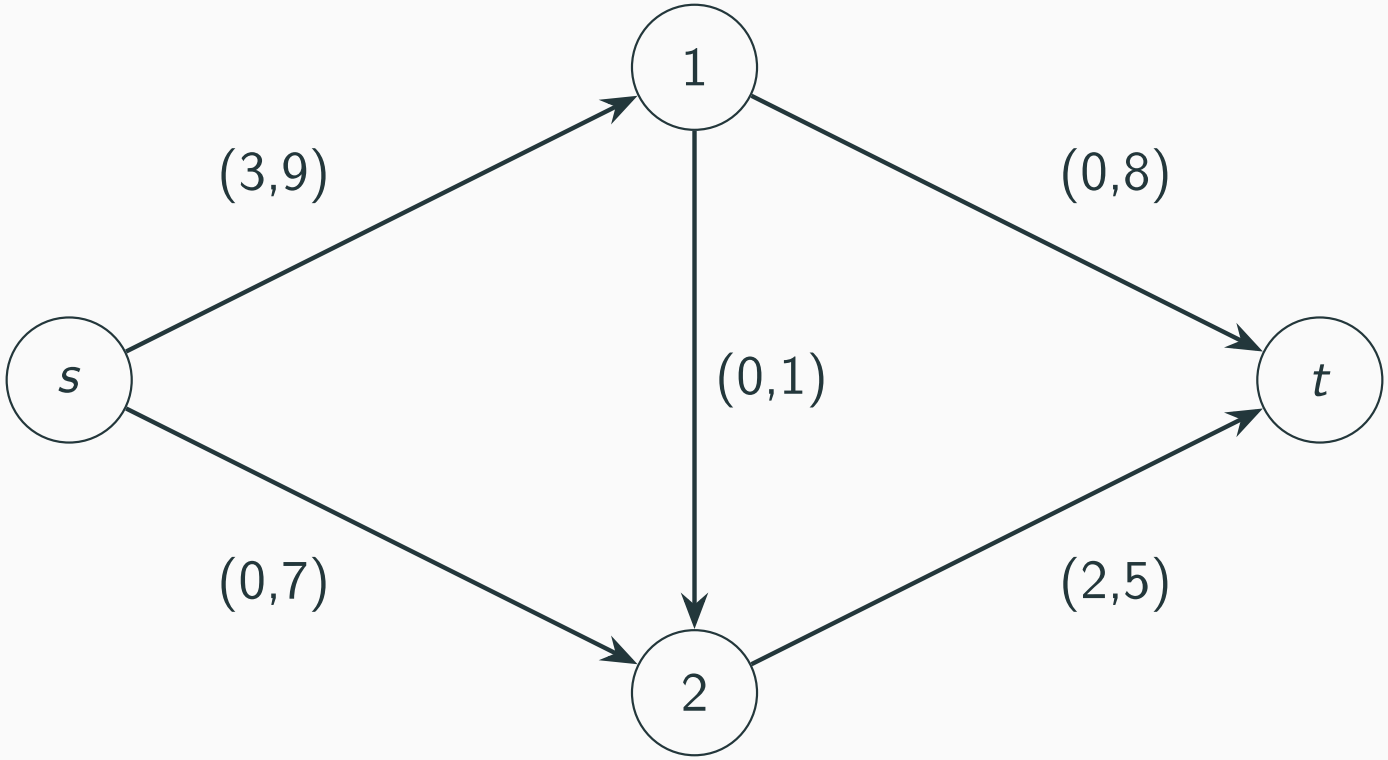
- Se $x_{ij} < u_{ij}$: O fluxo no arco (i, j) pode ser aumentado até atingir u_{ij}.
- Se $x_{ij} > l_{ij}$: O fluxo no arco (i, j) pode ser diminuído até atingir l_{ij}.

As capacidades máximas do grafo incremental passam a ser:

- Se $x_{ij} < u_{ij}$, temos $u'_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$
- Se $x_{ij} > l_{ij}$, temos $u'_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$

Exemplo

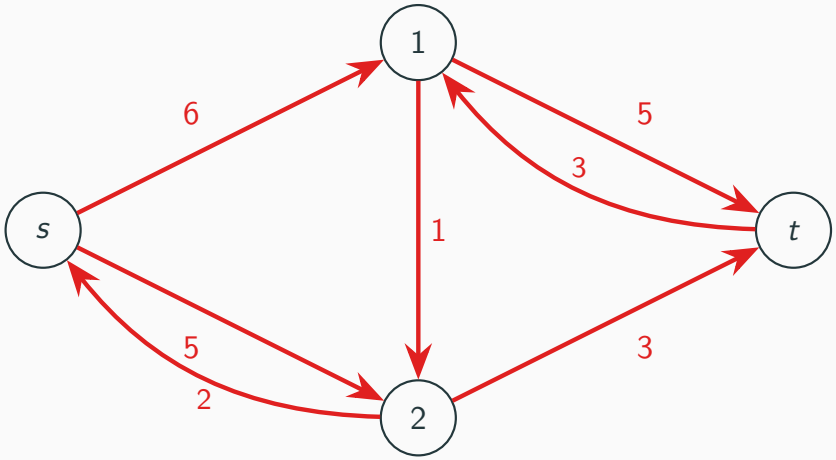
Determine o fluxo máximo de s a t no seguinte grafo, onde em cada arco se encontra o seu limite mínimo e máximo (l_{ij}, u_{ij}):



Considere o seguinte fluxo inicial: $x_{s1} = 3, x_{s2} = 2, x_{12} = 0, x_{1t} = 3$ e $x_{2t} = 2$.

Exemplo

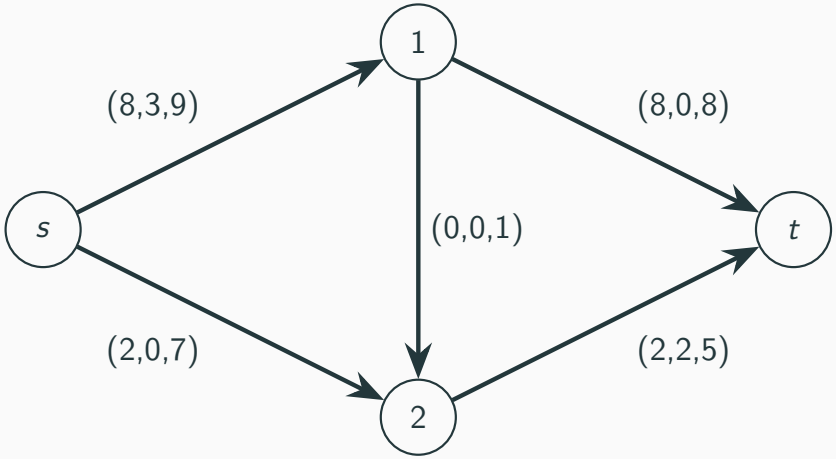
- Grafo incremental:



Um caminho de aumento é $P = ((s, 1), (1, t))$.

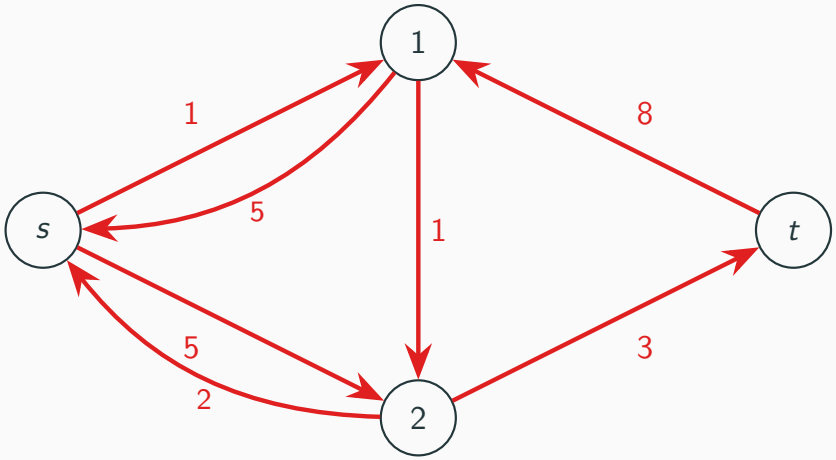
$\Longrightarrow \ \Delta = \min\{6, 5\} = 5.$

- Atualização do fluxo: (x_{ij}, l_{ij}, u_{ij})

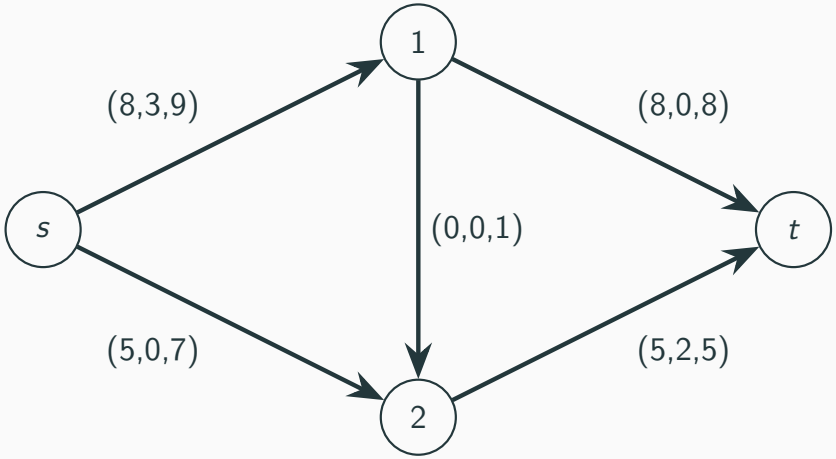


Exemplo

- Grafo incremental:



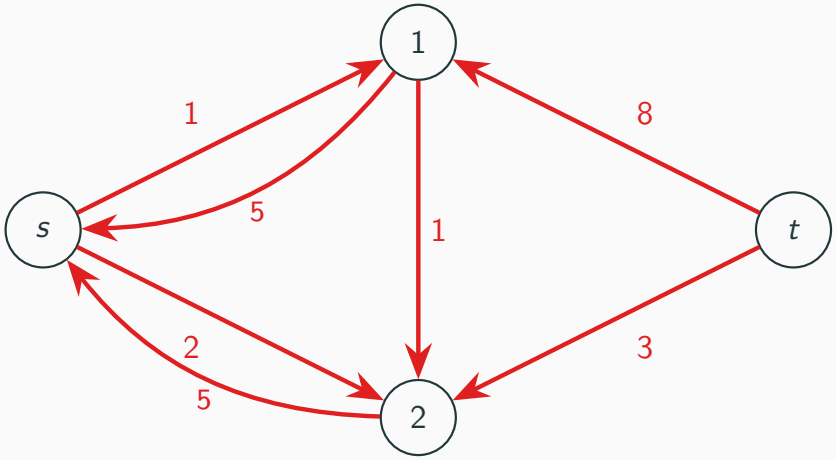
- Atualização do fluxo: (x_{ij}, l_{ij}, u_{ij})



Um caminho de aumento é
$P = ((s, 2), (2, t))$.
$\Longrightarrow \ \Delta = \min\{5, 3\} = 3.$

Exemplo

- Grafo incremental:



Não existe caminho de aumento, estamos perante o fluxo máximo.

- Com capacidades mínimas, a determinação de um fluxo admissível deixa de ser trivial.
  - Podemos calcular uma solução admissível, calculando o fluxo máximo no grafo G_0 sem capacidades mínimas.

Seja $G_0 = (V \cup \{s_0\} \cup \{t_0\}, A_0)$ onde s_0 e t_0 são, respetivamente, uma origem e um destino fictícios.

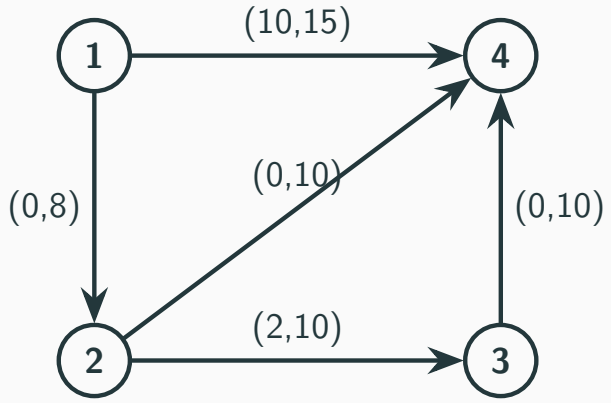
- A capacidade máxima de $(i, j) \in A$ em G_0 é $u_{ij} - l_{ij}$.
- Para cada arco $(i, j) \in A$ com $l_{ij} > 0$ criam-se dois arcos:
  - (s_0, j) com capacidade máxima igual a l_{ij}; e
  - (i, t_0) com capacidade máxima igual a l_{ij}.
- Cria-se o arco (t, s) com capacidade máxima $+\infty$.

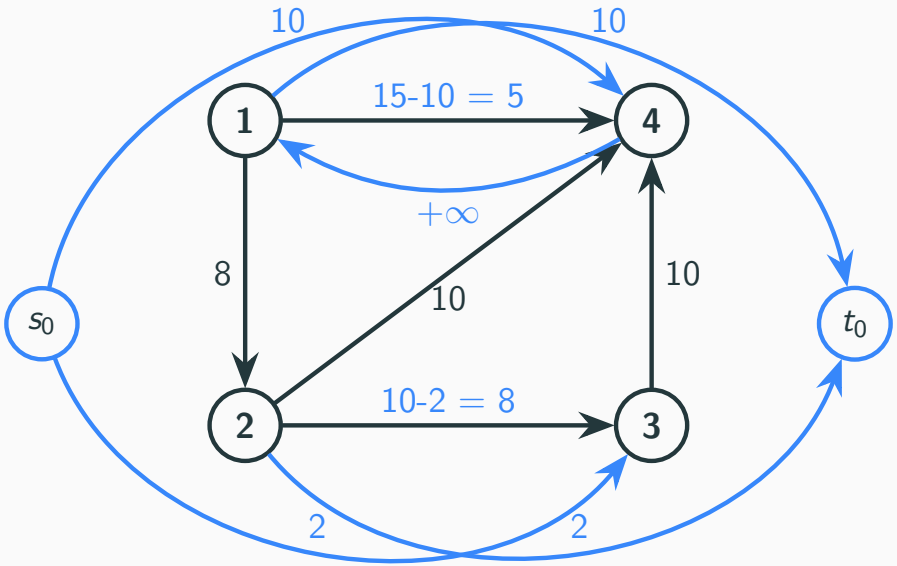
Condição de Admissibilidade: Se o valor do fluxo máximo de s_0 a t_0 for igual a $\sum_{(i,j)\in A} l_{ij}$, então existe um fluxo admissível em G. A solução admissível para o problema original é obtida somando l_{ij} ao fluxo que passa nos arcos de G_0.

Exemplo

- Determine um fluxo admissível de 1 a 4 no seguinte grafo:

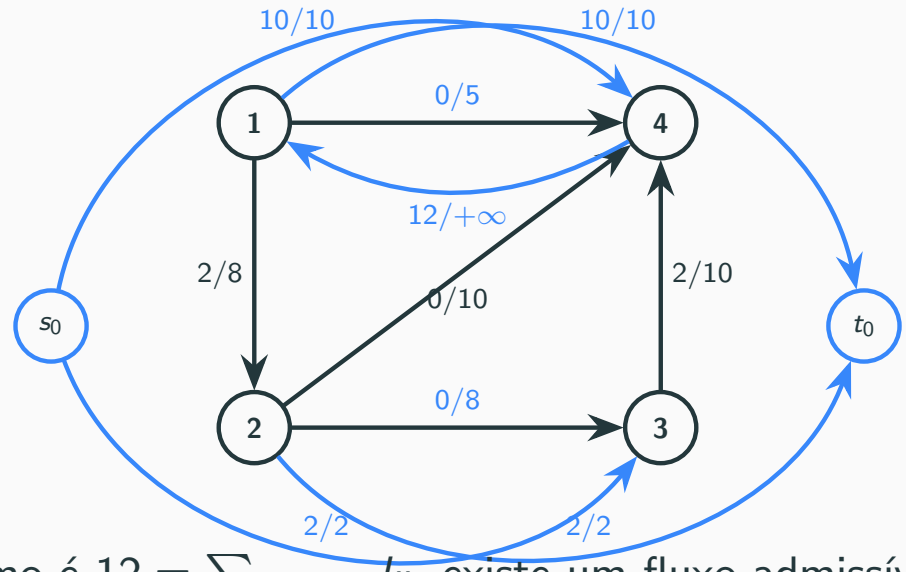
- Grafo G_0:



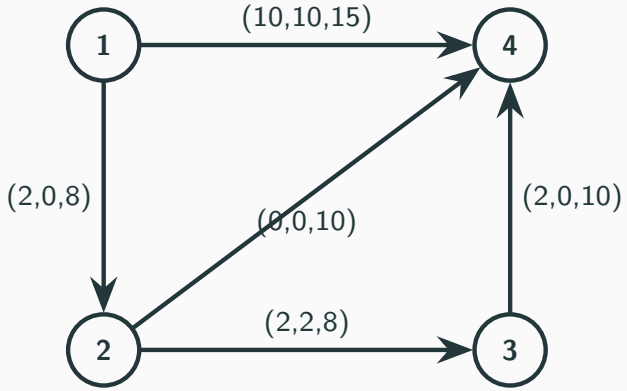


Exemplo

- Aplicando o Algoritmo de Ford-Fulkerson obtemos:



Como o fluxo máximo é $12 = \sum_{(i,j)\in A} l_{ij}$, existe um fluxo admissível em G.



Notas sobre o problema do fluxo máximo

- Aprendemos um algoritmo para determinar o fluxo máximo
  - Algoritmo de Ford-Fulkerson
    - Baseado na pesquisa de caminhos de aumento no grafo residual.
      - Caso não haja um caminho de aumento no grafo residual, estamos perante o fluxo máximo.

- Relação do fluxo máximo com o corte de capacidade mínima
  - O valor do fluxo máximo entre s e t é igual à capacidade do corte de capacidade mínima que separa s e t.

- O problema do fluxo máximo pertence à classe $\mathcal{P}$.

Sumário

Problema do fluxo máximo

Problema do fluxo de custo mínimo

Problema do fluxo de custo mínimo

Definição

Considere-se um grafo orientado $G = (V, A)$ com pelo menos uma origem e um destino. Cada arco $(i, j) \in A$ tem associado o custo unitário de passagem de fluxo c_{ij}. Cada nodo $i \in V$ tem associado o valor b_i que é o fluxo no nodo.

- Se $b_i > 0$, o nodo i é uma origem com oferta b_i.
- Se $b_i < 0$, o nodo i é um destino com procura b_i.
- Se $b_i = 0$, o nodo i é um nodo intermédio.

O problema do fluxo de custo mínimo consiste em determinar o fluxo admissível que respeita os fluxos nos nodos que minimiza o custo total.

Problema do fluxo de custo mínimo

Hipóteses

- A oferta total é igual à procura total, i.e., $\sum_{i \in V} b_i = 0$.
  - Caso $\sum_{i \in V} b_i > 0$: Cria-se um destino fictício com procura $-\sum_{i \in V} b_i$ e com arcos de custo nulo a ligar a todas as origens.
  - Caso $\sum_{i \in V} b_i < 0$: Cria-se uma origem fictícia com oferta $-\sum_{i \in V} b_i$ e com arcos de custo nulo a ligar a todos os destinos.
- Não existem circuitos de custo total negativo.

Problema do fluxo de custo mínimo

- Formulação em programação linear:

x_{ij} : quantidade de fluxo que atravessa o arco $(i,j) \in A$

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \qquad \text{sai - entra} = b_i$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

Resultado

Se os parâmetros b_i forem inteiros, então a solução ótima do problema do fluxo de custo mínimo é inteira.

Problema do fluxo de custo mínimo

- Existem vários algoritmos para determinar o fluxo de custo mínimo num grafo.
  - Exemplo: Algoritmo Out-of-Kilter.

- Podemos resolver o problema aplicando o Simplex.
  - Não é competitivo se for usado na forma tradicional.
  - Se for adaptado para explorar a estrutura em rede do problema do fluxo de custo mínimo, torna-se num algoritmo eficiente para este problema.

Vamos adaptar o algoritmo do Simplex para resolver o problema do fluxo de custo mínimo - Simplex em redes.

Simplex em redes

- Os passos gerais do Simplex são:
  - Passo 1: Determinar uma SBA inicial.
  - Passo 2: Calcular os custos reduzidos de todas as VNB.
  - Passo 3: Se o critério de otimalidade é verificado $\Longrightarrow$ FIM.
    Caso contrário, escolher a variável candidata a entrar na base.
  - Passo 4: Se a solução é ilimitada $\Longrightarrow$ FIM.
    Caso contrário, escolher a variável que vai sair da base e atualizar a solução. Voltar ao Passo 2.

Vamos ver como adaptar cada um destes passos para o problema do fluxo de custo mínimo.

Passo 1: Determinar uma SBA inicial.

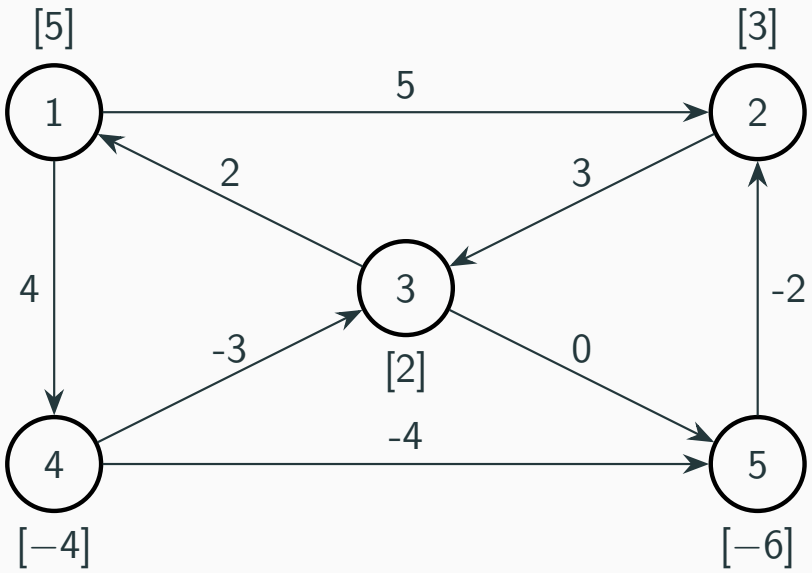
Considere-se o problema de fluxo de custo mínimo definido no grafo $G = (V, A)$.

- Qualquer solução básica deste problema tem $|V| - 1$ variáveis básicas, que representam o fluxo que atravessa um arco.
- Os arcos associados a variáveis básicas, ignorando a sua orientação, nunca formam um ciclo.

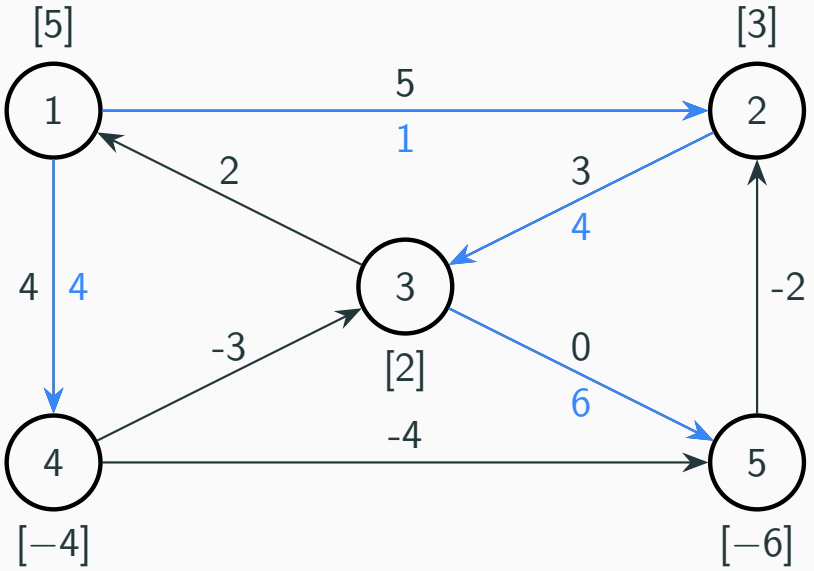
Uma solução básica do problema do fluxo de custo mínimo é uma "árvore geradora" em G que satisfaz o fluxo em cada nodo.

Exemplo

- Legenda: $[b_i]$ nos nodos e c_{ij} nos arcos



- Exemplo SBA:



Passo 2: Calcular os custos reduzidos de todas as VNB.

Primal

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \qquad \forall i \in V \qquad (w_i)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

Dual

$$\max \quad \sum_{i\in V} b_i w_i$$

$$\text{sujeito a:} \quad w_i - w_j \leq c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (x_{ij})$$

Relações de complementaridade

As relações de complementaridade podem ser escritas como:

$$x_{ij}(w_i - w_j - c_{ij}) = 0, \qquad \forall (i,j) \in A$$

Proposição (Condição de otimalidade)

Seja x uma solução admissível para o problema primal e w uma solução que satisfaz

$$w_i - w_j - c_{ij} = 0, \qquad \text{sempre que } x_{ij} > 0.$$

A solução x é ótima para o problema de fluxo de custo mínimo se e só se

$$w_i - w_j \leq c_{ij}. \qquad (w \text{ é admissível para o dual})$$

Simplex em redes

Custo reduzido (simétrico)

O custo reduzido da variável x_{ij} é dado por

$$\overline{c_{ij}} = w_i - w_j - c_{ij}.$$

- Sabendo que custos reduzidos das variáveis básicas são nulos, vem:

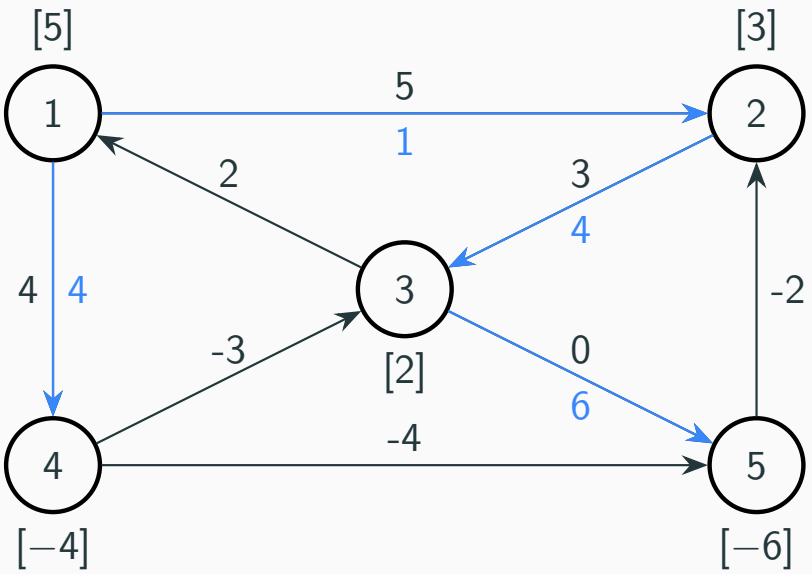
$$\overline{c_{ij}} = 0 \iff c_{ij} = w_i - w_j, \qquad \forall (i,j) : x_{ij} \text{ é variável básica.}$$

Deste sistema de equações podemos tirar o valor das variáveis duais. Temos n variáveis e $n-1$ equações $\implies$ Fixamos $w_n = 0$ e obtemos o valor das restantes variáveis duais.

Procedimento

1. Calcular o valor da solução dual w.
2. Calcular os custos reduzidos das variáveis não básicas.

Exemplo



Cálculo da solução dual

VB: x_{12}, x_{14}, x_{23} e x_{35}

$$c_{12} = w_1 - w_2 \iff 5 = w_1 - w_2 \implies w_1 = 8$$
$$c_{14} = w_1 - w_4 \iff 4 = w_1 - w_4 \implies w_4 = 1$$
$$c_{23} = w_2 - w_3 \iff 3 = w_2 - w_3 \implies w_2 = 3$$
$$c_{35} = w_3 - w_5 \iff 0 = w_3 - w_5 \implies w_3 = 0$$

Resultados obtidos fixando $w_5 = 0$.

Cálculo dos simétricos dos custos reduzidos para as variáveis não básicas

VNB: x_{31}, x_{43}, x_{45} e x_{52}

$$\overline{c_{31}} = w_3 - w_1 - c_{31} = 0 - 8 - 2 = -10$$
$$\overline{c_{43}} = w_4 - w_3 - c_{43} = 1 - 0 - (-3) = 4$$
$$\overline{c_{45}} = w_4 - w_5 - c_{45} = 1 - 0 - (-4) = 5$$
$$\overline{c_{52}} = w_5 - w_2 - c_{52} = 0 - 3 - (-2) = -1$$

Passo 3: Se o critério de otimalidade é verificado $\Longrightarrow$ FIM

Caso contrário, escolher a variável candidata a entrar na base.

Tendo em conta as restrições do problema dual, o critério de otimalidade é verificado se e só se:

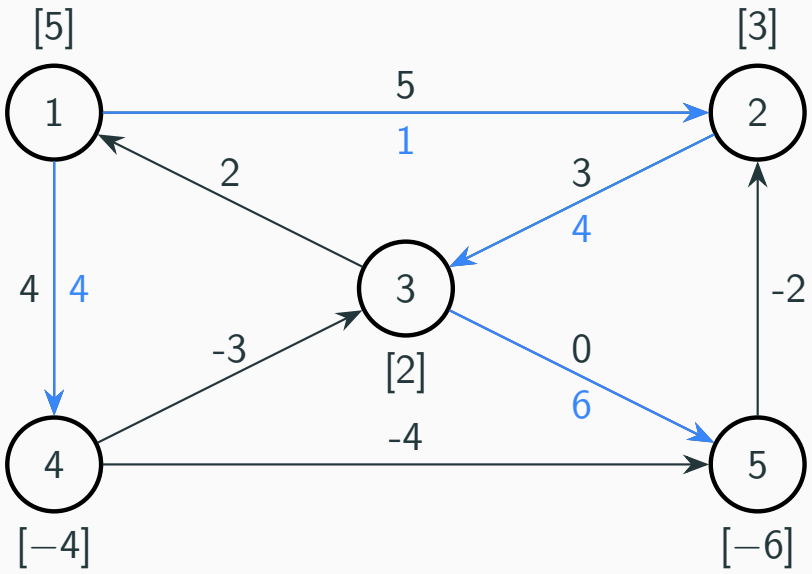
$$\overline{c_{ij}} = w_i - w_j - c_{ij} \leq 0, \qquad \forall (i,j) \in A.$$

Caso o critério de otimalidade não seja verificado, a variável candidata a entrar na base é a que mais o viola:

$$\overline{c_{kl}} = \max_{(i,j):x_{ij}\, VNB} \{\overline{c_{ij}}\} \Longrightarrow x_{kl} \text{ entra na base}$$

Nota: $\overline{c_{ij}}$ é o simétrico dos custos reduzidos $\Longrightarrow$ Abuso de linguagem quando nos referimos aos custos reduzidos.

Exemplo



- Custos reduzidos das variáveis não básicas

$$\overline{c_{31}} = w_3 - w_1 - c_{31} = 0 - 8 - 2 = -10$$

$$\overline{c_{43}} = w_4 - w_3 - c_{43} = 1 - 0 - (-3) = 4$$

$$\overline{c_{45}} = w_4 - w_5 - c_{45} = 1 - 0 - (-4) = 5$$

$$\overline{c_{52}} = w_5 - w_2 - c_{52} = 0 - 3 - (-2) = -1$$

Como existem custos reduzidos positivos, não estamos perante a solução ótima do problema.

C.E. $= \max\{4, 5\} = 5 \Longrightarrow$ x_{45} passa a VB

Passo 4: Se a solução é ilimitada $\Longrightarrow$ FIM

Caso contrário, escolher a variável que vai sair da base e atualizar a solução. Voltar ao Passo 2.

Ao adicionarmos a variável selecionada para passar a variável básica à SBA atual, obtemos um ciclo C no grafo (ignorando orientação). Orientamos o ciclo C com a orientação do arco (k, l) e obtemos o circuito C'.

- Consideremos um arco $(i, j) \in C'$.
  - Se o arco (i, j) está com a sua orientação original - $(i, j) \in A$ - o fluxo aumenta nesse arco.
  - Se o arco (i, j) está com a sua orientação oposta - $(j, i) \in A$ - o fluxo diminui nesse arco.
  - Para que a nova solução se mantenha admissível, todas as variáveis devem ter valor não negativo $(x_{ij} \geq 0)$.

Cálculo da valor da nova variável básica

Para a solução se manter admissível, a nova variável básica tem valor

$$\Delta = \min\{x_{ij} : (j,i) \in \text{ ciclo}\}.$$

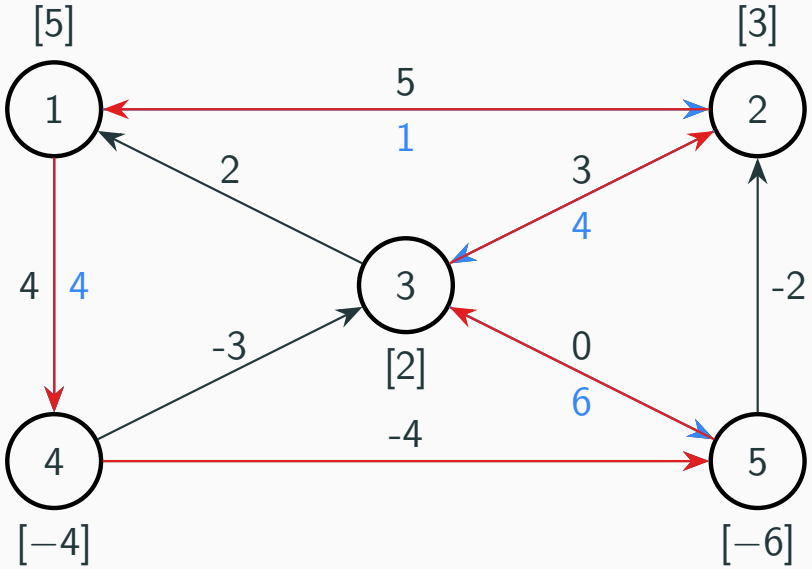
- Caso o ciclo não tenha arcos no sentido oposto, temos $\Delta = +\infty$ e estamos perante uma solução ilimitada.

Considere-se $(i,j) \in C$:

- Caso $(i,j) \in A$: O fluxo aumenta nesse arco em Δ unidades - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \Delta$.
- Caso $(j,i) \in A$: O fluxo diminui nesse arco em Δ unidades - $x_{ji} \leftarrow x_{ji} - \Delta$.

- A variável que passa a variável não básica é a que ficou com valor 0.

Exemplo

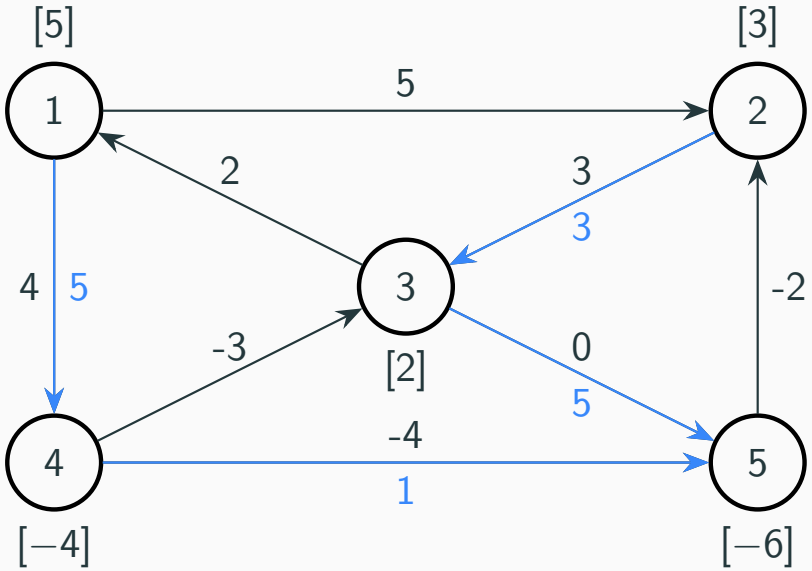


- Cálculo do Δ:

$$\Delta = \min\{6, 4, 1\} = 1$$

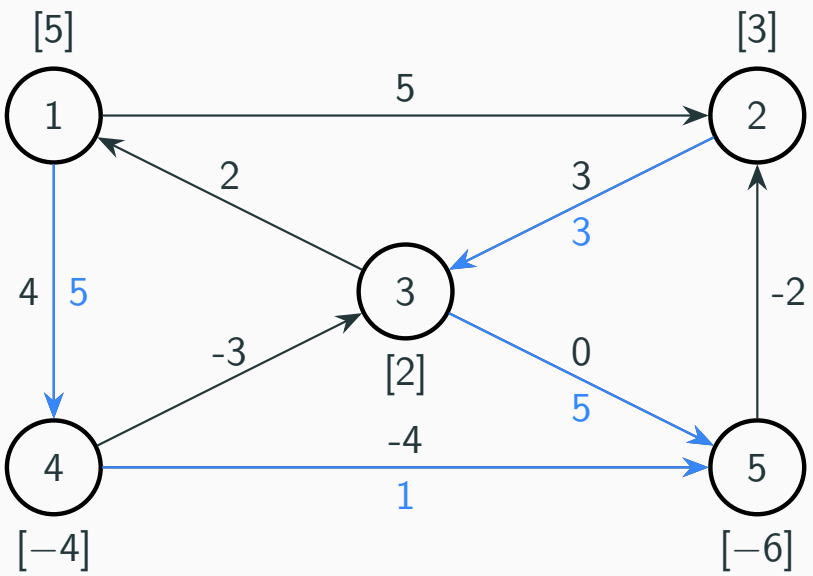
$$\Longrightarrow x_{12} \text{ passa a VNB}$$

- Atualização da solução:



- Repetimos o processo até o critério de otimalidade estar satisfeito.

Exemplo



■ Cálculo dos custos reduzidos para as variáveis não básicas

VNB: x_{12} x_{31}, x_{43} e x_{52}

$\overline{c_{12}} = w_1 - w_2 - c_{12} = 0 - 3 - 5 = -8$

$\overline{c_{31}} = w_3 - w_1 - c_{31} = 0 - 0 - 2 = -2$

$\overline{c_{43}} = w_4 - w_3 - c_{43} = -4 - 0 - (-3) = -1$

$\overline{c_{52}} = w_5 - w_2 - c_{52} = 0 - 3 - (-2) = -1$

■ Cálculo da solução dual

VB: x_{14}, x_{23}, x_{35} e x_{45}

$c_{14} = w_1 - w_4 \iff 4 = w_1 - w_4 \implies w_1 = 0$

$c_{23} = w_2 - w_3 \iff 3 = w_2 - w_3 \implies w_2 = 3$

$c_{35} = w_3 - w_5 \iff 0 = w_3 - w_5 \implies w_3 = 0$

$c_{45} = w_4 - w_5 \iff -4 = w_4 - w_5 \implies w_4 = -4$

Resultados obtidos fixando $w_5 = 0$.

Como todos os custos reduzidos são ≥ 0, estamos perante a SO.
A SO é: $x_{12} = 0$, $x_{14} = 5$, $x_{23} = 3$, $x_{31} = 0$, $x_{35} = 5$, $x_{43} = 0$, $x_{45} = 1$ e $x_{52} = 0$.
E o seu valor:
$4 \times 5 + 3 \times 3 + 0 \times 5 + (-4) \times 1 = 25$.

Algoritmo do Simplex em redes

1: Determinar uma SBA inicial. Calcular a solução dual w e os simétricos dos custos reduzidos das VNB $\overline{c_{ij}}$.
2: **while** Existem VNB $x_{ij} : \overline{c_{ij}} > 0$ **do**
3: Seja $x_{rs} = argmax_{x_{ij}\ \text{VNB}}\{\overline{c_{ij}}\}$.
4: Identificar o circuito que contém o arco (r, s) e calcular o Δ:

$$\Delta = \min\{x_{ij} : (j, i) \in \text{ circuito }\}.$$

5: Atualizar a solução: para arcos $(i, j) \in$ circuito aumentar o fluxo em Δ unidades; e para arcos $(j, i) \in$ circuito decrementar o fluxo em Δ unidades.
6: Calcular a solução dual w e os simétricos dos custos reduzidos das VNB associados à nova solução.
7: **end while**

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

Considere o problema do fluxo de custo mínimo definido no grafo $G = (V, A)$ onde para além dos seus parâmetros habituais, o fluxo que atravessa o arco $(i, j) \in A$ tem de estar no intervalo $[l_{ij}, u_{ij}]$. Como se pode determinar o fluxo de custo mínimo?

- Adaptando o Simplex em redes.
  - Condição de otimalidade.
  - Seleção da nova variável básica.
  - Cálculo do valor da nova variável básica.

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

Primal

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \qquad \forall i \in V \qquad (w_i)$$

$$x_{ij} \geq l_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (a_{ij})$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (b_{ij})$$

Dual

$$\max \quad \sum_{i\in V} b_i w_i + \sum_{(i,j)\in A} (l_{ij} a_{ij} - u_{ij} \beta_{ij})$$

$$\text{sujeito a:} \quad w_i - w_j + a_{ij} - \beta_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \qquad (x_{ij})$$

$$a_{ij}, \beta_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

- Mudança de variável: $\beta_{ij} = -b_{ij}$.

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

Tendo em conta as restrições do problema dual o critério de otimalidade é verificado se e só se:

$$w_i - w_j + a_{ij} - \beta_{ij} - c_{ij} \leq 0, \qquad \forall (i,j) \in A$$

- Como as variáveis são limitadas, as variáveis básicas são aquelas que têm valor x_{ij} tal que

$$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}.$$

Pelas relações de complementaridade, as variáveis duais associadas às restrições de limite tomam valor 0, i.e.,

$$a_{ij} = 0 \text{ e } \beta_{ij} = 0.$$

Seja x_{ij} uma variável básica. Assim, $\overline{c_{ij}} = w_i - w_j - c_{ij} = 0$. Logo, cálculo da solução dual w e dos custos reduzidos das variáveis não básicas mantém-se.

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

- Seja x_{ij} uma variável não básica. Assim,

$$w_i - w_j + a_{ij} - \beta_{ij} - c_{ij} = 0 \iff w_i - w_j - c_{ij} = -a_{ij} + \beta_{ij} \iff \overline{c_{ij}} = -a_{ij} + \beta_{ij}.$$

- A variável não básica pode estar no seu limite inferior ou no superior. Logo, temos dois casos:
  - Caso $x_{ij} = l_{ij}$: Como $\beta_{ij} = 0$, vem $\overline{c_{ij}} = -a_{ij}$.
    - Pelas restrições de sinal, a solução é admissível se $a_{ij} \geq 0$.
    - A solução é ótima para o primal se $-\overline{c_{ij}} \geq 0 \iff \overline{c_{ij}} \leq 0$.
  - Caso $x_{ij} = u_{ij}$ Como $a_{ij} = 0$, vem $\overline{c_{ij}} = \beta_{ij}$.
    - Pelas restrições de sinal, a solução é admissível se $\beta_{ij} \geq 0$.
    - A solução é ótima para o primal se $\overline{c_{ij}} \geq 0$.

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

Critério de otimalidade

O critério de otimalidade é verificado se e só se

- $\overline{c_{ij}} \leq 0, \qquad \forall (i,j) : x_{ij} = l_{ij}.$
- $\overline{c_{ij}} \geq 0, \qquad \forall (i,j) : x_{ij} = u_{ij}.$

■ Intuitivamente: Se uma VNB está no seu limite inferior apenas podemos incrementar o seu valor, o que só é vantajoso se o seu custo reduzido for negativo (simétrico positivo). Se uma VNB está no seu limite superior apenas podemos decrementar o seu valor, o que só é vantajoso se o seu custo reduzido for positivo (simétrico negativo).

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

Caso o critério de otimalidade não seja verificado, a variável candidata a entrar na base é a que mais o viola:

$$\overline{c_{kl}} = \max\{\max_{(i,j):x_{ij}=l_{ij}} \{\overline{c_{ij}}\}, \max_{(i,j):x_{ij}=u_{ij}} \{-\overline{c_{ij}}\}\} \implies x_{kl} \text{ passa a VB.}$$

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

- Determinamos o ciclo induzido pela introdução da variável x_{kl} na base.
  - Se o fluxo do arco (k, l) vai aumentar, orientamos o circuito com a orientação do arco (k, l).
  - Se o fluxo do arco (k, l) vai diminuir, orientamos o circuito com a orientação oposta à do arco (k, l), isto é, incluímos o arco (l, k) no circuito.

- Para que a nova solução se mantenha admissível:
  - O fluxo nos arcos do circuito cujo fluxo vai aumentar não pode exceder a sua capacidade máxima u.
  - O fluxo nos arcos do circuito cujo fluxo vai diminuir não pode ultrapassar a sua capacidade mínima l.

Problema do fluxo de custo mínimo: capacidades nos arcos

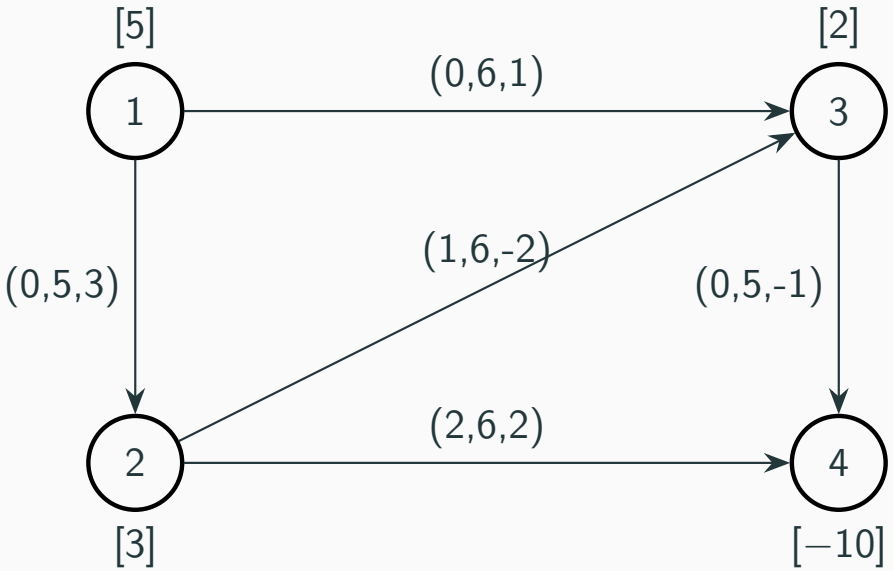
Seja C' o circuito induzido pela introdução do arco (k, l) e x o valor do fluxo atual.

$$\Delta = \min\{\min_{(i,j)\in A:(i,j)\in C'}\{u_{ij} - x_{ij}\}, \min_{(i,j)\in A:(j,i)\in C'}\{x_{ij} - l_{ij}\}\}$$

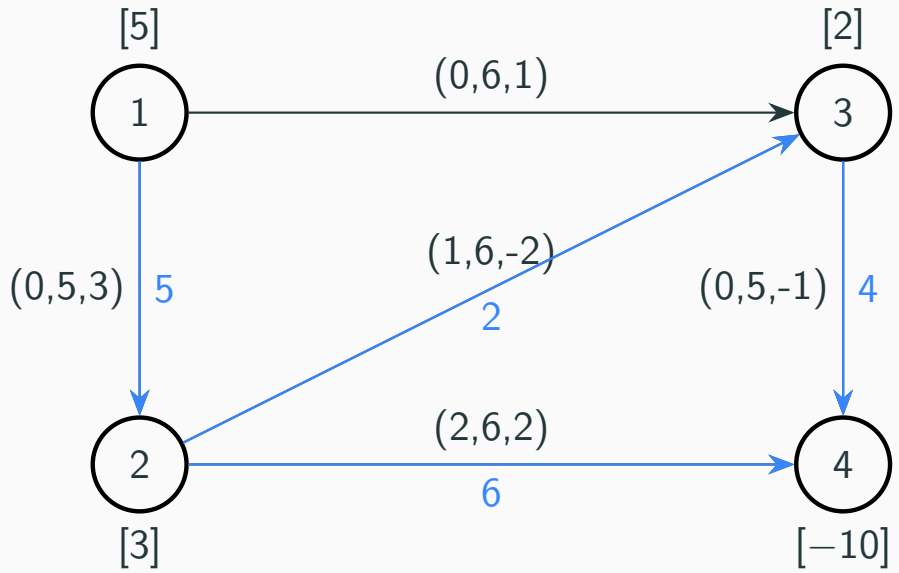
- A variável que passa a variável não básica é a que ficar com valor igual ao seu limite inferior ou superior.

Exemplo

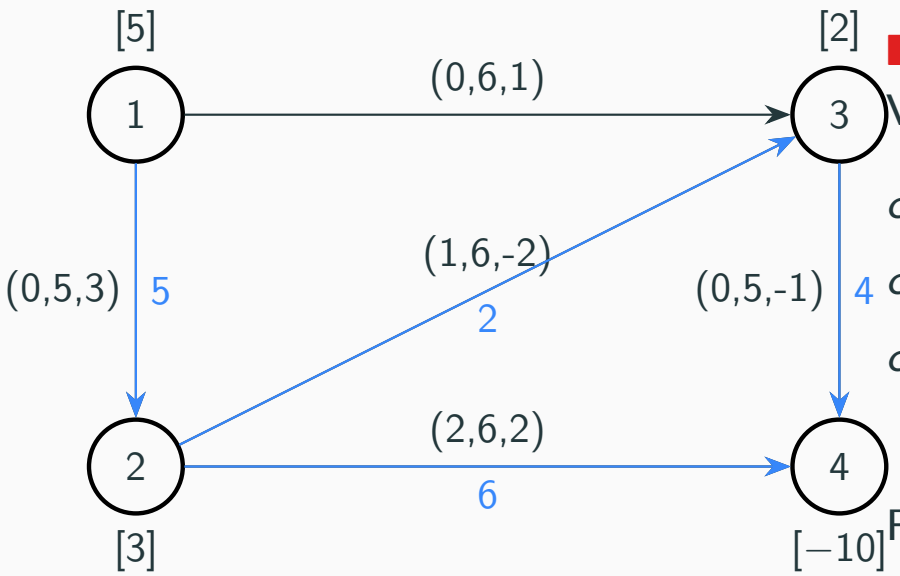
- Legenda: $[b_i]$ nos nodos e (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) nos arcos



- Exemplo SBA:



Exemplo



■ Cálculo da solução dual

VB: x_{12}, x_{23} e x_{34} (AG)

$$c_{12} = w_1 - w_2 \iff 3 = w_1 - w_2 \implies w_1 = 0$$

$$c_{23} = w_2 - w_3 \iff -2 = w_2 - w_3 \implies w_2 = -3$$

$$c_{34} = w_3 - w_4 \iff -1 = w_3 - w_4 \implies w_3 = -1$$

Resultados obtidos fixando $w_4 = 0$.

■ Cálculo dos custos reduzidos para as variáveis não básicas

VNB: x_{13} e x_{24}

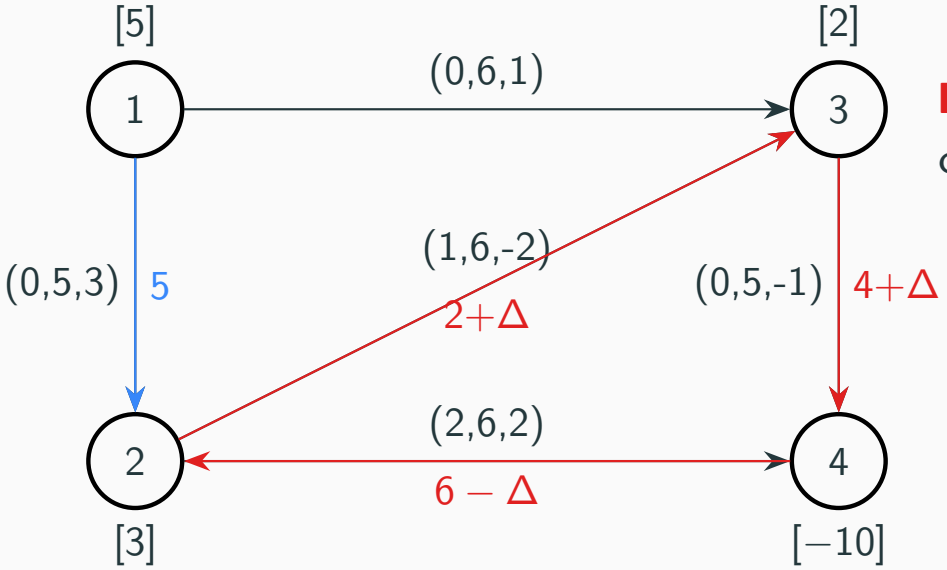
$$\overline{c_{13}} = w_1 - w_3 - c_{13} = 0 - (-1) - 1 = 0$$

$$\overline{c_{24}} = w_2 - w_4 - c_{24} = -3 - 0 - 2 = -5$$

$$CE = \max\{0, -(-5)\} = 5$$

$\implies$ x_{24} passa a VB

Exemplo

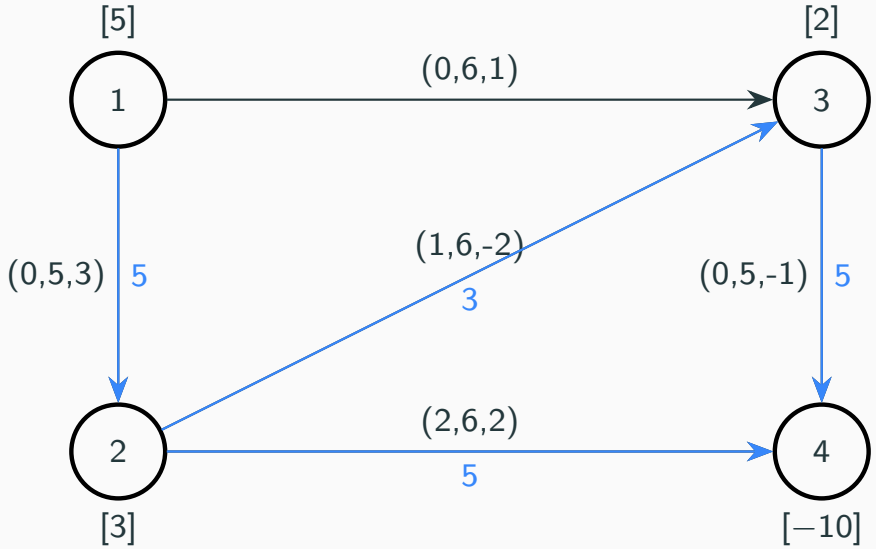


- x_{24} está no seu limite máximo, orienta-se o circuito no sentido oposto.

$$\Delta = \min\{6-2, 6-2, 5-4\} = 1$$

$$\Longrightarrow \; x_{34} \text{ passa a VNB}$$

- Atualização da solução



- Solução dual e custos reduzidos

VB: x_{12}, x_{23} e x_{24} (fixando $w_4 = 0$)

$$c_{12} = w_1 - w_2 \iff 3 = w_1 - w_2 \implies w_1 = 5$$

$$c_{23} = w_2 - w_3 \iff -2 = w_2 - w_3 \implies w_3 = -4$$

$$c_{24} = w_2 - w_4 \iff 2 = w_2 - w_4 \implies w_2 = 2$$

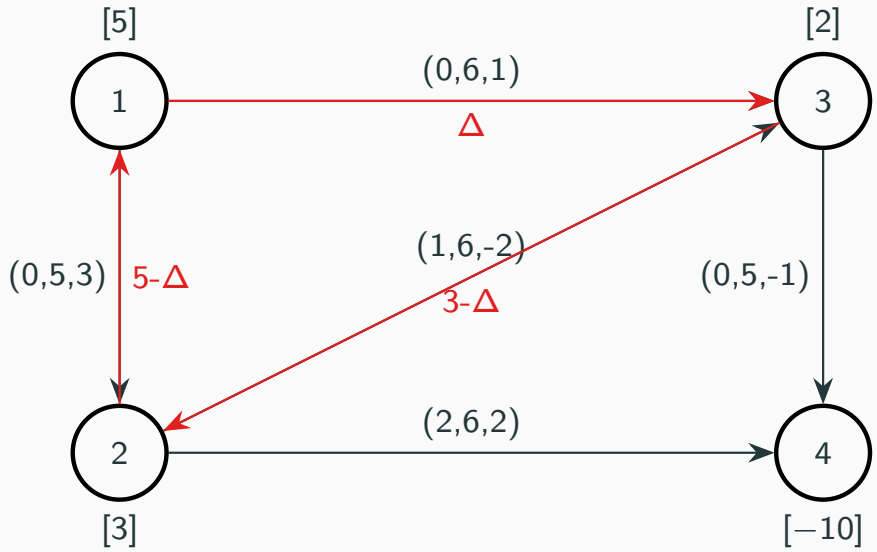
VNB: x_{13} e x_{34}

$$\overline{c_{13}} = w_1 - w_3 - c_{13} = 5 - (-4) - 1 = 8$$

$$\overline{c_{34}} = w_3 - w_4 - c_{34} = -4 - 0 - (-1) = -3$$

Exemplo

$$CE = \max\{8, -(-3)\} = 8 \implies x_{13} \text{ passa a VB}$$

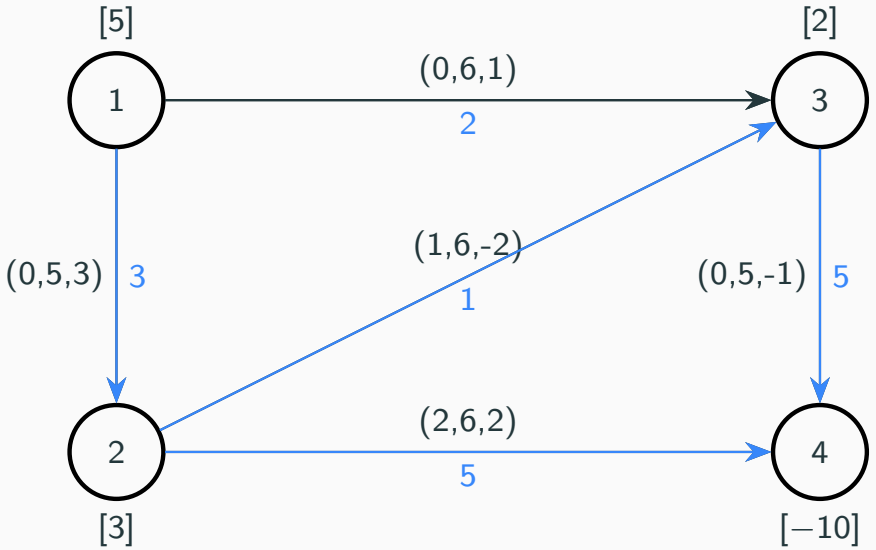


- x_{13} está no seu limite inferior, orienta-se o circuito no mesmo sentido.

$$\Delta = \min\{3 - 1, 5, 6\} = 2$$

$$\implies x_{23} \text{ passa a VNB}$$

- Atualização da solução

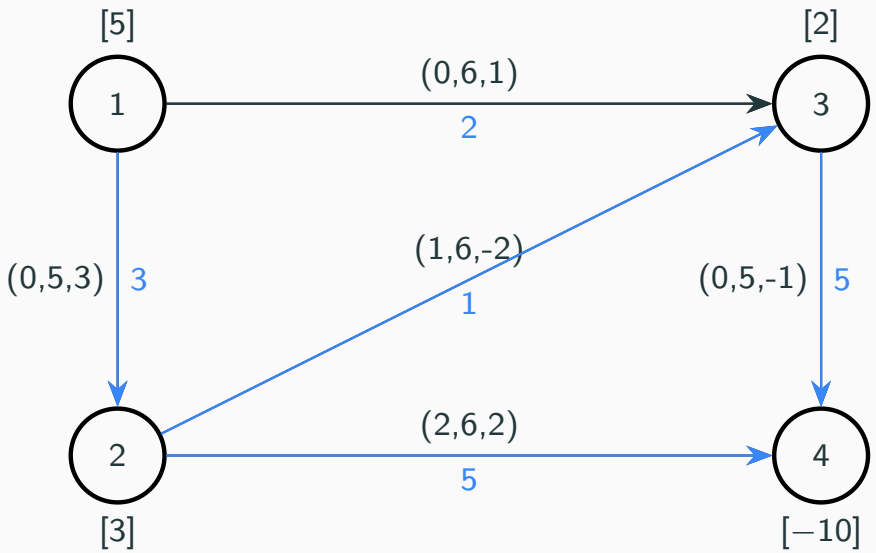


- Solução dual e custos reduzidos

VB: x_{12}, x_{13} e x_{24} (fixar $w_4 = 0$)

$$c_{12} = w_1 - w_2 \iff 3 = w_1 - w_2 \implies w_1 = 5$$
$$c_{13} = w_1 - w_3 \iff 1 = w_2 - w_3 \implies w_3 = 4$$
$$c_{24} = w_2 - w_4 \iff 2 = w_2 - w_4 \implies w_2 = 2$$

Exemplo



■ Custos reduzidos

VNB:x_{23} e x_{34}

$$\overline{c_{23}} = w_2 - w_3 - c_{23} = 2 - 4 - (-2) = 0$$

$$\overline{c_{34}} = w_3 - w_4 - c_{34} = 4 - 0 - (-1) = 5$$

O critério de otimalidade é satisfeito.

A solução ótima é: $x_{12} = 3$, $x_{13} = 2$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 5$ e $x_{34} = 5$.

As variáveis básicas são x_{12}, x_{13} e x_{24} e as variáveis não básicas são x_{23} e x_{34}.

O custo da solução é $3 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 5 \times 2 + 5 \times (-1) = 14$

Casos particulares do problema do fluxo de custo mínimo

Os seguintes problemas podem ser vistos como casos particulares do problema do fluxo de custo mínimo:

- Problema de afetação
- Problema de transportes
- Problema do caminho mais curto
- Problema do fluxo máximo

Como obtemos estes problemas a partir do problema de fluxo de custo mínimo?

Notas sobre o problema do fluxo de custo mínimo

- Aprendemos um algoritmo para determinar o fluxo de custo mínimo
  - Simplex em redes
    - Adapta o algoritmo do Simplex tendo em conta a estrutura do problema.
- O problema de fluxo de custo mínimo é o problema mais geral
  - Exemplos de casos particulares:
    - Caminho mais curto
    - Fluxo máximo
- O problema de fluxo de custo mínimo pertence à classe $\mathcal{P}$.

Referências bibliográficas


Ahuja, R.K., T.L. Magnanti, J.B. Orlin (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall.


Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research*. Mc Graw-Hill, New York, USA, 11th edition.


Taha, H. A. (2017). *Operations Research – An Introduction*. Pearson Prentice-Hall, New Jersey, 10th edition.