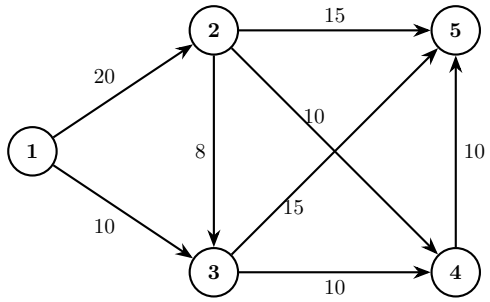
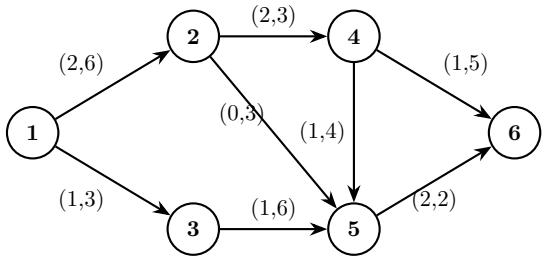
14. Determine o fluxo máximo entre 1 e 5 no grafo seguinte, usando o algoritmo de Ford-Fulkerson. O valor junto de cada arco representa a capacidade máxima do fluxo nesse arco.



15. Considere o grafo seguinte, onde junto a cada arco (x_{ij}, u_{ij}) está indicado o fluxo que já o atravessa (x) e a sua capacidade máxima (u).



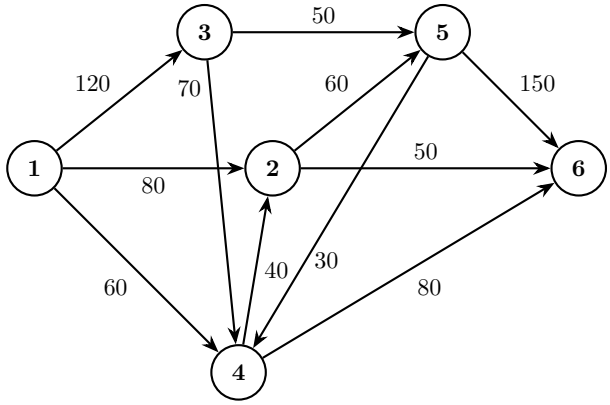
(a) Determine, partindo do fluxo dado, o fluxo máximo do nodo 1 ao nodo 6 pelo algoritmo de Ford-Fulkerson e identifique um corte de capacidade mínima que separa 1 de 6.

(b) Formule este problema em programação linear, bem como o seu problema dual.

16. Num grafo, dois caminhos dizem-se disjuntos nos arcos se não existirem arcos comuns nesses caminhos. Prove que o número máximo de caminhos disjuntos, entre dois nodos num grafo, é igual ao menor número de arcos que é necessário retirar ao grafo para "separar" esses dois nodos.

17. Considere um grafo com m nodos e n arcos na qual poderá circular um fluxo. Seja u_{ij} a capacidade máxima do arco (i, j) da rede. Mostre que o valor de qualquer fluxo admissível entre 1 e m não excede o valor da capacidade de qualquer corte que separe 1 de m.

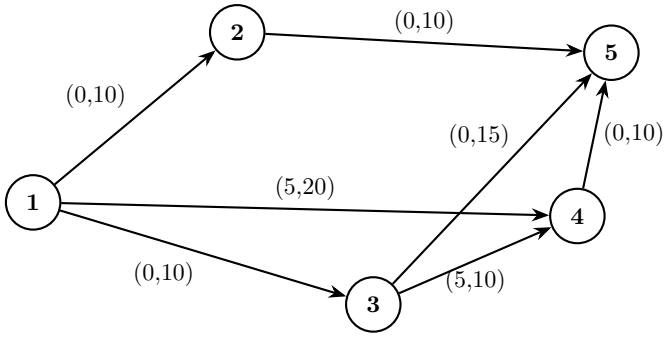
18. Considere o seguinte grafo, onde junto a cada arco está indicado o valor da sua capacidade máxima.



(a) Determine o fluxo máximo do nodo 1 ao nodo 6 pelo algoritmo de Ford-Fulkerson.

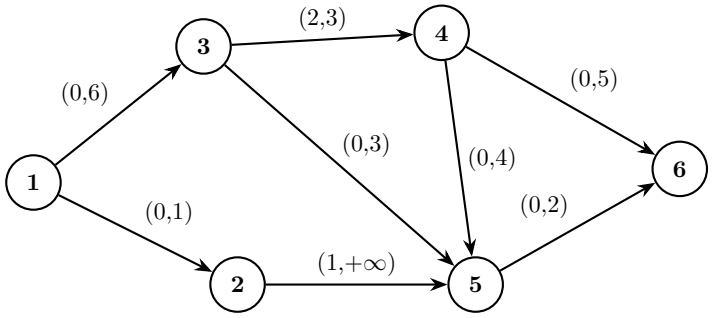
(b) Identifique um corte de capacidade mínima que separa 1 de 6.

19. Considere o grafo seguinte, onde, junto a cada arco, são indicados os limites inferior e superior do fluxo respetivo (l_{ij}, u_{ij}):



Considerando como fluxo inicial $x_{12} = 0$, $x_{25} = 0$, $x_{14} = 5$, $x_{13} = 5$, $x_{34} = 5$, $x_{35} = 0$ e $x_{45} = 10$, utilize o algoritmo de Ford-Fulkerson para determinar o fluxo máximo do nodo 1 ao nodo 5. Qual é o valor do fluxo máximo? Qual é o corte de capacidade mínima que separa 1 de 5? Mostre que a capacidade do corte de capacidade mínima é o valor do fluxo máximo.

20. Considere o seguinte grafo onde os valores junto a cada arco indicam, pela ordem apresentada, a capacidade mínima e a capacidade máxima para o fluxo que nele passa.



(a) Determine, pelo método dado nas aulas, um fluxo admissível entre os nodos 1 e 6.

(b) Considere o seguinte fluxo admissível entre os nodos 1 e 6:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 3, \quad x_{25} = 1, \quad x_{34} = 3, \quad x_{35} = 0, \quad x_{45} = 1, \quad x_{46} = 2, \quad x_{56} = 2$$

utilize o algoritmo de Ford-Fulkerson para determinar o fluxo máximo entre 1 e 6. Identifique a solução ótima.

(c) Identifique o corte de capacidade mínima que separa 1 de 6.

(d) Comente a seguinte afirmação: *"Para aumentar em duas unidades o valor do fluxo máximo entre 1 e 6 basta aumentar em duas unidades a capacidade máxima do arco (1,2)."*

21. Pretende-se saber quantas ligações aéreas podem existir diariamente, no máximo, entre Juneau (Alasca) e Dallas (Texas).

Não existem voos diretos entre as duas cidades mas a ligação pode ser feita via Seattle e Denver, ou com escala em Los Angeles. O número de voos diários que podem ser efetuados são os seguintes:

De	Para	N.º de voos diários
Juneau	Seattle	3
Seattle	Los Angeles	2
Seattle	Denver	3
Denver	Dallas	2
Los Angeles	Dallas	1

Formule em problema em otimização em redes e indique como poderia determinar a sua solução ótima.

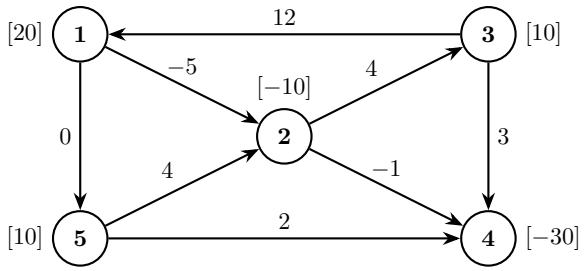
22. Os serviços de transplante de um hospital receberam a informação sobre cinco dadores de rim (**1**, **2**, **3**, **4**, **5**) e têm cinco pacientes (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**) à espera de um transplante. A tabela seguinte indica a compatibilidade entre dadores e pacientes.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1		X			
2	X				
3	X	X			
4	X	X			X
5			X	X	X

Formule um problema de otimização em redes que lhe permita saber qual o número máximo de transplantes que podem ser efetuados nos pacientes **A** a **E** com os dadores **1** a **5**.

23. Formule o problema apresentado no exercício 14 como um problema de fluxo de custo mínimo.

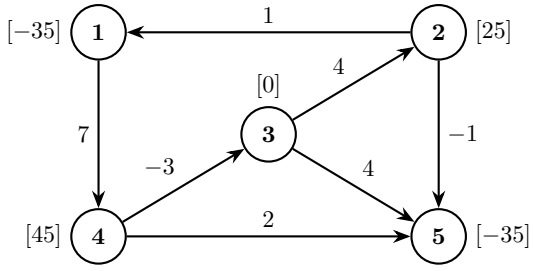
24. Considere a seguinte instância de um problema de fluxo de custo mínimo, onde junto a cada arco encontra-se o respetivo custo unitário.



(a) Considere como arcos básicos os seguintes arcos: $(1,2)$, $(2,4)$, $(5,4)$ e $(3,1)$.
   i. Construa a SBA associada a estes arcos.
   ii. Verifique que esta SBA não é ótima.

(b) A partir da SBA dada, determine uma solução com custo inferior, utilizando o método do Simplex em redes.

25. Considere a seguinte instância de um problema de fluxo de custo mínimo, onde junto a cada arco se indica o respetivo custo unitário:



(a) Considere como arcos básicos os seguintes arcos: $(2,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$ e $(4,3)$.

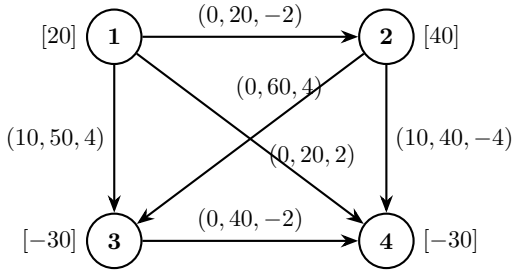
i. Construa a SBA associada a estes arcos.

ii. Verifique que esta SBA é ótima. Indique se existem soluções alternativas.

(b) A partir da solução dada, faça entrar na base o arco $(4,5)$ e determine a nova SBA, indicando em quanto aumentou o custo da solução.

26. Diga como poderia adaptar o algoritmo do Simplex em Redes para resolver problemas de maximização.

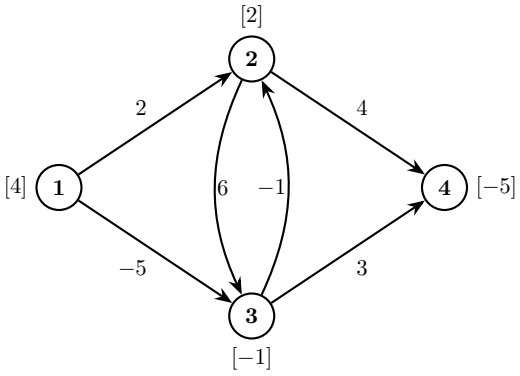
27. Considere o seguinte problema com capacidades e custos (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}):

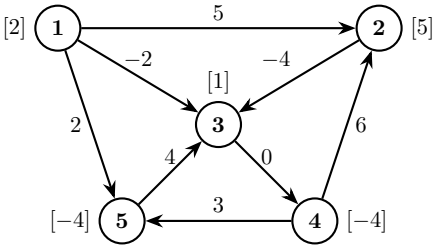


(a) Construa uma SBA considerando como variáveis básicas as associadas aos arcos $(1,4)$, $(2,3)$ e $(3,4)$.

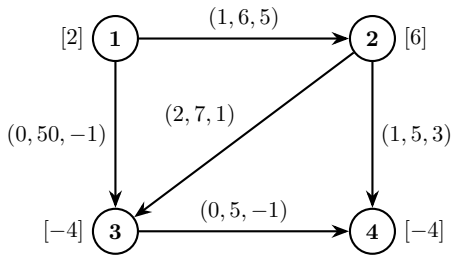
(b) Partindo da solução obtida na alínea anterior, construa a solução ótima aplicando o Método do Simplex em Redes para variáveis limitadas.

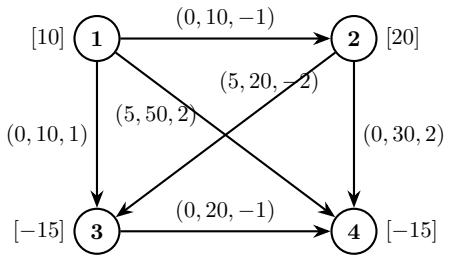
28. Resolva os seguintes problemas através do método do Simplex em Redes.





29. Resolva os seguintes problemas através do método do Simplex em Redes.





30. Numa dada fábrica o sistema de produção tem 3 estações de produção que conseguem produzir, num período de produção, até 600, 650 e 750 peças de um dado artigo, respetivamente. Por imposições de manutenção das estações, cada uma deve produzir um mínimo de 30% da sua capacidade máxima. Dadas as diferentes características de cada estação o tempo unitário de produção não é o mesmo nas 3 estações. Assim, o tempo unitário de produção é de 10, 13 e 20 minutos, respetivamente para as estações 1, 2 e 3. Depois de produzidas, as peças saem da estação através de um de dois tapetes rolantes em direção a uma de duas máquinas de etiquetagem. As capacidades máximas, em número de peças, dos tapetes bem como o respetivo tempo de transporte, em minutos por peça, da estação para as máquinas de etiquetagem estão descritas na tabela seguinte.

Estação	Máquina 1 (cap. máx. / tempo)	Máquina 2 (cap. máx. / tempo)
1	350 / 1.00	300 / 0.75
2	- / -	350 / 1.00
3	300 / 0.50	300 / 1.00

As 2 máquinas de etiquetagem são idênticas e têm uma capacidade máxima de 900 peças por período de produção. O tempo de etiquetagem é de 0,10 minutos por peça. De seguida, as peças saem da fábrica e são enviadas para 3 pontos de distribuição com encomendas de 400 peças cada, por período de produção. Formule em redes o problema que consiste em determinar o plano de produção que minimize o tempo total dentro da fábrica.

31. Uma estação televisiva está a planear a cobertura televisiva para o festival *Portugal-Best* no Parque da Paz em Almada. O problema põe-se principalmente no último dia no qual vão decorrer vários eventos considerados relevantes. O horário dos vários eventos é conhecido bem como a sua duração prevista e o local onde se realizarão.

Eventos	Hora início	Duração	Local
Grupo Sons da Terra	15:00	1:30	(L1)
Folclore Algarvio	17:00	1:00	(L2)
Cantares do Alentejo	16:30	1:00	(L3)
Grupo Celtas do Minho	21:00	3:00	(L4)
Grupo Danças do Norte	18:15	1:00	(L5)

Conhece-se ainda o tempo (em minutos) que uma equipa de reportagem leva para se deslocar entre os vários locais onde decorrem os eventos:

	L1	L2	L3	L4	L5
L1	0	5	10	2	-
L2	5	0	3	12	20
L3	10	3	0	-	-
L4	2	12	-	0	-
L5	-	20	-	-	0

(- significa não é possível uma equipa de reportagem fazer a deslocação correspondente)

O gestor da televisão pretende determinar o menor número de equipas de reportagem que é necessário enviar para o recinto do *Portugal-Best*, de forma a garantir a cobertura de todos os eventos. Formule o problema acima descrito como um problema da determinação do fluxo de custo mínimo numa rede.

32. Formule os seguintes problemas como um problema de fluxo de custo mínimo. Apresente a formulação em redes e a formulação em programação linear.
    (a) Problema de transportes.
    (b) Problema do caminho mais curto.
    (c) Problema do fluxo de custo mínimo.