Programação Matemática II

Teste 1

19/11/2026 Ano letivo 2026/2027

Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

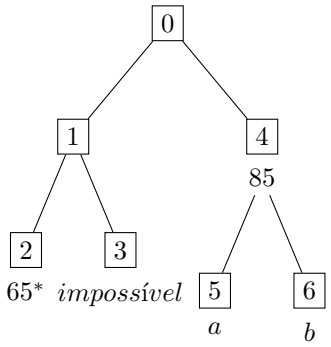
- Responda às questões utilizando metodologias lecionadas em PMII e justifique todas as respostas.
- Sempre que calcular uma solução, deve apresentar a solução obtida e o seu valor.

1. (2,5 valores) Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$\begin{aligned}(P) \qquad & \min\ 7x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + 5x_2 \geq 14 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

Aplique o algoritmo de *branch-and-bound* ramificando a variável com o índice mais alto. Resolva no máximo três subproblemas,incluindo a relaxação linear, utilizando o método gráfico. O que pode concluir sobre o valor ótimo de (P)?

2. No processo de resolução de um problema de maximização pelo algoritmo de *branch-and-bound* obteve-se a seguinte árvore. O número junto de cada nodo é o valor de um majorante do subproblema correspondente, sendo o valor ótimo do subproblema quando assinalado com (*).



Indique:

(a) (0,5 valores) O que pode aferir sobre os valores de a e de b?

(b) Quais os valores de a e de b que tornam as seguintes afirmações verdadeiras:

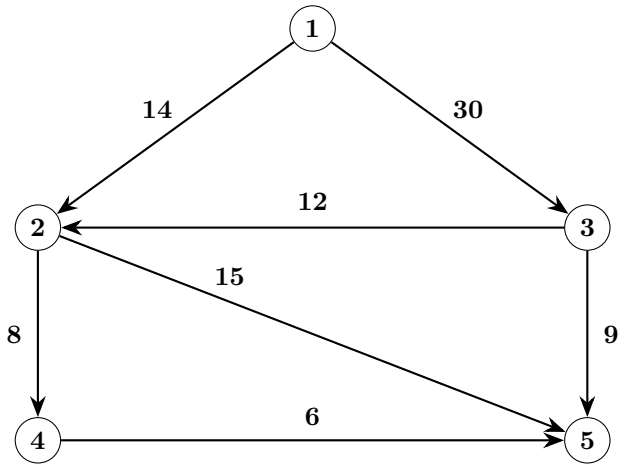
i. (1,0 valores) A solução do subproblema 2 é a solução ótima.

ii. (1,0 valores) Só é necessário ramificar o subproblema 6.

3. (1,0 valores) Considere o seguinte quadro ótimo do Simplex obtido quando se resolveu a relaxação linear de um problema de programação linear inteira. Gere um corte de Gomory utilizando a linha do x_1 e mostre que é um corte para a solução apresentada.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TI
Z	0	0	0	3/2	1/2	29/2
x_1	1	0	0	1/2	−1/4	7/4
x_2	0	1	0	−1/6	5/12	13/4
x_3	0	0	1	2/3	1/6	5/2

4. Considere o seguinte grafo G.



   (a) (1,5 valores) Ignorando a orientação dos arcos, determine uma árvore de geradora de custo mínimo de G usando o algoritmo de Kruskal.

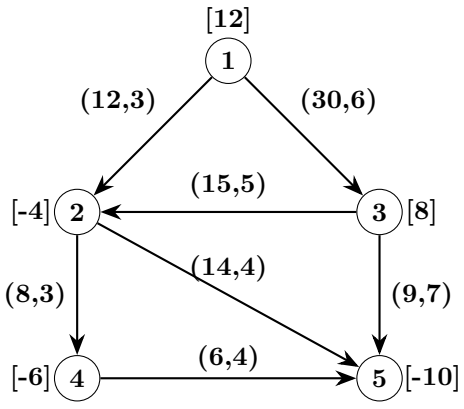
   (b) (1,5 valores) Considere que o valor junto a cada arco indica o custo de utilizar esse arco. Determine o caminho mais curto de 1 para 4 utilizando um algoritmo apropriado.

   (c) Considere agora que o valor junto a cada arco indica a capacidade máxima para o fluxo que passa nesse arco e que se pretende determinar o fluxo máximo entre 1 e 5.

      i. (0,5 valores) Considere o seguinte fluxo: $x_{12} = 14$, $x_{13} = 9$, $x_{24} = 0$, $x_{25} = 14$, $x_{32} = 0$, $x_{35} = 9$ e $x_{45} = 0$. Indique qual é o valor do fluxo e o que pode concluir sobre o valor do corte de capacidade mínima.

      ii. (2,0 valores) Caso o fluxo apresentado não seja o máximo, indique um fluxo com maior valor. O que pode concluir sobre o valor do fluxo máximo?

5. Considere a seguinte instância de um problema de fluxo de custo mínimo, onde a cada nodo i está associado o valor $[b_i]$ e a cada arco (i, j) o par (u_{ij}, c_{ij}).



   (a) (0,5 valores) Apresente uma solução básica admissível (SBA) a partir da árvore que contém os seguintes arcos básicos: $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$ e $(2, 4)$.

   (b) (2,5 valores) Mostre que a solução encontrada na alínea (a) não é ótima e faça uma iteração do algoritmo simplex em redes para obter uma SBA de custo inferior. O que pode concluir sobre o valor do fluxo de custo mínimo?

6. O Governo Regional da Madeira pretende contratar fisioterapeutas de um conjunto de N fisioterapeutas possíveis para darem apoio ao conjunto M de cidades da Madeira. Sabe-se que o terapeuta $i \in N$ pode prestar serviço nas cidades do conjunto $M_i \subseteq M$, e que a cidade $j \in N$ necessita de b_j terapeutas. Cada fisioterapeuta apenas pode prestar serviço numa cidade. Pretende-se determinar o número mínimo de terapeutas que é necessário contratar para garantir as necessidades de todas as cidades.

   (a) (2,0 valores) Formule o problema apresentado em programação linear inteira.

   (b) Altere a formulação obtida na alínea anterior de forma a contemplar as seguintes situações:

      i. (1,0 valores) Sabendo que o terapeuta $i \in N$ custa c_i unidades monetárias ao Governo Regional da Madeira, acrescente a restrição de que o orçamento de V unidades monetárias não pode ser excedido.

      ii. (1,0 valores) Na situação da alínea (b)(i) pode não ser possível satisfazer as necessidades mínimas de todas as cidades. Reformule a função objetivo e as restrições (introduzindo as variáveis auxiliares necessárias) de modo a minimizar o número de cidades com um número de fisioterapeutas inferior ao mínimo requerido.

7. (1,5 valores) O Joaquim combinou encontrar-se com os seus amigos no centro comercial, cuja planta está representada pelo grafo seguinte: o nodo P corresponde ao parque de estacionamento, o nodo L ao local de encontro e os restantes nodos aos cruzamentos das ruas. O valor associado a cada arco indica o tempo (em unidades de tempo) necessário para atravessar a respetiva rua. Como o Natal se aproxima, o Joaquim pretende parar nas lojas situadas nos cruzamentos 2 e 3 para comprar prendas antes de se juntar aos amigos. Assim, deseja determinar o percurso mais rápido entre P e L que passe obrigatoriamente pelos nodos 2 e 3. Formule este problema como um dos problemas de otimização em redes estudados, apresentando o respetivo grafo com os valores dos parâmetros necessários (b_i, l_{ij}, u_{ij} e c_{ij}, caso se apliquem), e identifique qual o problema que deve ser resolvido nesse grafo para determinar o percurso do Joaquim.

