# Estatística II

Licenciatura em Gestão

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

# Aulas Teóricas N.ºs 22 e 23 (Semana 12)

**Docente**: Elisabete Fernandes
**E-mail**: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

# Conteúdos Programáticos

| Aulas Teóricas (Semanas 1 a 5) | Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7) | Aulas Teóricas (Semanas 7 a 9) | Aulas Teóricas (Semanas 10 a 13) |
|---|---|---|---|
| • **Capítulo 1**: Estimação | • **Capítulo 2**: Testes de Hipóteses | • **Capítulo 3**: Modelo de Regressão Linear | • **Capítulo 4**: Complementos ao Modelo de Regressão Linear |

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia**: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

**8ª semana (07/11 e 09/11)**

T14 - Modelo de Regressão Linea (MRL)r

Interpretação dos parâmetros da regressão; exemplos; Resíduos MQ e regressão ajustada; Propriedades dos estimadores MQ dos coeficientes da regressão; Estimador não enviesado da variância da variável residual; Exemplo.

T15 - Modelo de regressão Linear

Coeficiente de determinação e sua interpretação. Hipótese adicional (H6) e inferência estatística sobre o modelo; Inferência sobre um parâmetro beta. Exemplos

**9ª semana (14/11 e 16/11)**

T16 - Modelo de Regressão Linear

Mais exemplos de inferência sobre um parâmetro beta; Inferência sobre uma combinação linear de betas; exemplos.

T17 - Modelo de Regressão Linear

Teste de nulidade conjunta de vários coeficientes; exemplo; Teste F à significância global da regressão; Teste de um conjunto de restrições lineares; exemplo.

**10ª semana (21/11 e 23/11)**

T18 - Complementos ao MRL

Variáveis artificiais: Introdução à modelação de fatores qualitativos, conceito de variável artificial, estimação e interpretação do modelo com variáveis artificiais; exemplos.

T19 - Complementos ao MRL

# Inferência na Regressão Linear Múltipla

## Teste de Hipóteses F para todos os Coeficientes do MRLM

1

# Análise de Variância (Anova): Teste F

**É possível demonstrar que, sob certas condições, as v.a. SSR, SSE e SST apresentam as seguintes características:**

1. $$\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{[n-(k+1)]};$$

2. $$\frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(k)}, \ se \ \ \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$$

3. SSR e SSE são independentes.

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

Formulário

**Inferência estatística do MRL**, com $y_t \mid X \sim N(x_{t\bullet}\beta, \sigma^2)$:

- $$\boxed{q = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{\sigma^2} = \frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)}$$
- $$t_j = \frac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-k) \quad \text{ou} \quad F_j = \frac{(b_j - \beta_j)^2}{s_{b_j}^2} \sim F(1, n-k)$$

$$\mathbf{y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon}$$

**Nota**: Se o MRLM considerado for este, o nº de coeficientes de regressão é p=k+1. No caso do formulário, k é o nº de coeficientes.

# Anova: Teste F - Consequências

$$\text{(a)} \quad E\left(\frac{SSE}{\sigma^2}\right) = n-(k+1) \quad \Rightarrow E\left(\frac{SSE}{n-(k+1)}\right) = E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

Logo, MSE é um estimador não-viesado de $\sigma^2$

$$\text{(b)} \quad \mathrm{E}\left(\frac{SSR}{\sigma^2}\right) = \mathrm{k}, \ se \ \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0 \Rightarrow \mathrm{E}\left(\frac{SSR}{\mathrm{k}}\right) = \mathrm{E}(MSR) = \sigma^2$$

Se $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$, então MSR é um estimador não-viesado de $\sigma^2$.

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Anova: Teste F - Consequências

(c) Se $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$,

$$E(SST) = E(SSE) + E(SSR) =$$
$$= [n-(k+1)]\sigma^2 + (k)\,\sigma^2 = (n\text{-}1)\,\sigma^2$$

**Logo, SST/(n-1) é estimador não-viesado de $\sigma^2$**

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Anova: Teste F - Consequências

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

(d) Se $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$,

**Nota**: Se o MRLM considerado for este, o nº de coeficientes de regressão é p=k+1. No caso do formulário, k é o nº de coeficientes.

$$F = \frac{\dfrac{SSR/\sigma^2}{k}}{\dfrac{SSE/\sigma^2}{[n-(k+1)]}} = \frac{\dfrac{SSR}{k}}{\dfrac{SSE}{[n-(k+1)]}} = \frac{MSR}{MSE} \sim F_{[k,n-(k+1)]}$$

Formulário

- Nulidade conjunta: $F = \dfrac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \dfrac{VE/(k-1)}{VR/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Anova: Teste F - Consequências

| Fonte de variação | SS | gl | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| Regressão | SSR | k | MSR | MSR/ MSE |
| Erro | SSE | n-(k+1) | MSE | |
| **Total** | **SST** | n-1 | | |

$$MSE = \frac{SSE}{n-(k+1)}$$

$$MSR = \frac{SSR}{k}$$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Anova - Consequências

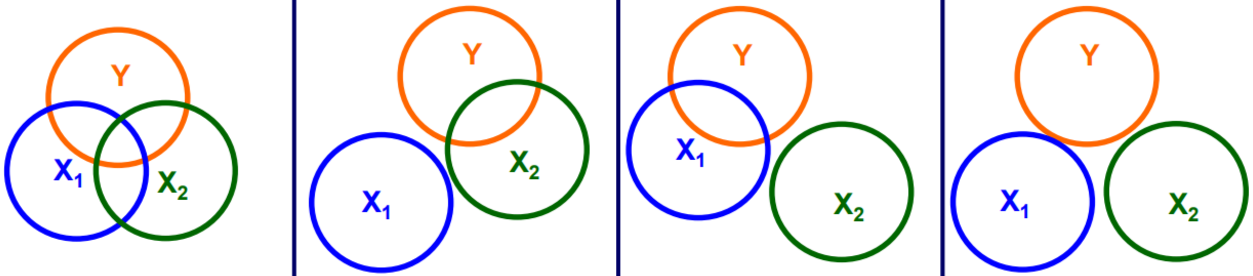
| Fonte | GL | Soma dos Quadrados | Quadrados Médios | F |
|---|---|---|---|---|
| Regressão | $k$ | $\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - n\bar{Y}^2$ | $\dfrac{SQReg}{k}$ | $F = \dfrac{SQReg/k}{SQRes/(n-k-1)}$ |
| Resíduos | $n-(k+1)$ | $\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ | $\dfrac{SQRes}{n-(k+1)}$ | |
| Total | $n-1$ | $\mathbf{y}^T\mathbf{y} - n\bar{Y}^2$ | | |

# Teste F: Modelo com duas Regressoras

**Seja o modelo de RLM com duas variáveis:** $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e$

**E as hipóteses:** $\begin{cases} H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = 0 \\ H_1: \ Pelo\ menos\ um\ \beta_j \neq 0 \end{cases}$

**Possíveis resultados do modelo:**




| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta_1 \neq 0$   $\beta_2 \neq 0$ | $\beta_1 = 0$   $\beta_2 \neq 0$ | $\beta_1 \neq 0$   $\beta_2 = 0$ | $\beta_1 = 0$   $\beta_2 = 0$ |
| $X_1$ e $X_2$ contribuem para explicar $Y$. $H_0$ deveria ser rejeitado | Apenas $X_2$ contribui para explicar $Y$. $H_0$ deveria ser rejeitado | Apenas $X_1$ contribui para explicar $Y$. $H_0$ deveria ser rejeitado | Nenhuma variável contribui para explicar $Y$. $H_0$ não deveria ser rejeitado |

# Teste F: Modelo Geral

**Seja o modelo de RLM:**

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e$$

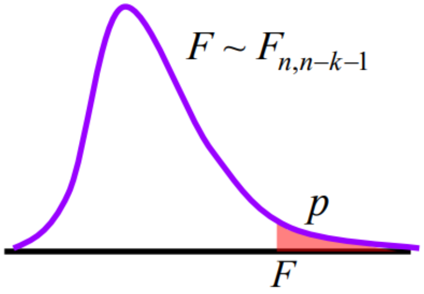
Para testarmos a contribuição do conjunto de *k* variáveis independentes do modelo, teremos as hipóteses:

$$\begin{cases} \mathbf{H_0}: \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0 \text{ (não contribui)} \\ \mathbf{H_1}: \text{Pelo menos um } \beta_j \neq 0 \text{ (contribui)} \end{cases}$$

A estatística de teste será

$$F = \frac{SQReg/k}{SQRes/(n-k-1)}$$

Considerando $H_0$ verdadeiro, a fdp de *F* será...



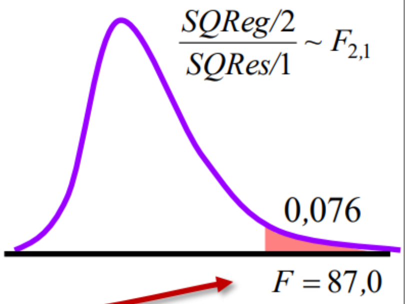

Rejeitar $H_0$ significa afirmar que o modelo contribui para explicar *Y*, ou seja, há relação significativa entre pelo menos uma variável explicativa e a variável dependente.

Slide 1 (unicamp.br)

# Teste F: Exemplo

**Seja a relação entre renda familiar em salários mínimos (*Y*), anos de estudo ($X_1$) e idade ($X_2$) do responsável pela família:** $Y_i = 1{,}9 + 1X_{1_i} + 0{,}06X_{2_i} + \hat{e}_i$

| Fonte | gl | Soma dos Quadrados | Quadrados Médios | F |
|---|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 34,8 | 17,4 | 87,0 |
| Resíduos | 1 | 0,2 | 0,2 | |
| Total | 3 | 35,0 | | |




**<u>Pela Tabela da Distribuição F</u>:**
P-value = P(F > 87,0) ~ P(F > 49,50) = 0,1 > 0,05
Não se rejeita H0 para alfa = 5%
Não existe evidência estatística para afirmar que o modelo contribui para explicar a renda (Y) para alfa = 5%

**valor $p = 0{,}076$**

O p-value exato é 0,076

Há evidências moderadas para afirmar que o modelo contribui para explicar a variabilidade da renda familiar. A probabilidade de erro ao fazermos tal afirmação é de aproximadamente 7,6%.

# Resolução do Exercício: Quantil da Distribuição F-Snedcor

| n – graus de liberdade do denominador | | m - graus de liberdade do numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | .100 | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| | .050 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 243.90 | 245.95 | 248.02 | 249.05 | 250.10 | 251.14 | 252.20 | 253.25 | 254.32 |
| | .025 | 647.79 | 799.48 | 864.15 | 899.60 | 921.83 | 937.11 | 948.20 | 956.64 | 963.28 | 968.63 | 976.72 | 984.87 | 993.08 | 997.27 | 1001.40 | 1005.60 | 1009.79 | 1014.04 | 1018.26 |
| | .010 | 4052.18 | 4999.34 | 5403.53 | 5624.26 | 5763.96 | 5858.95 | 5928.33 | 5980.95 | 6022.40 | 6055.93 | 6106.68 | 6156.97 | 6208.66 | 6234.27 | 6260.35 | 6286.43 | 6312.97 | 6339.51 | 6365.59 |
| 2 | .100 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| | .050 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| | .025 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.49 | 39.50 |
| | .010 | 98.50 | 99.00 | 99.16 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.38 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | .100 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| | .050 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| | .025 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14.08 | 14.04 | 13.99 | 13.95 | 13.90 |
| | .010 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | .100 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| | .050 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| | .025 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| | .010 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | .100 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.11 |
| | .050 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.37 |
| | .025 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.28 | 6.23 | 6.18 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| | .010 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | .100 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| | .050 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| | .025 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.12 | 5.07 | 5.01 | 4.96 | 4.90 | 4.85 |
| | .010 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | .100 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| | .050 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| | .025 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.41 | 4.36 | 4.31 | 4.25 | 4.20 | 4.14 |
| | .010 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | .100 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| | .050 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| | .025 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.95 | 3.89 | 3.84 | 3.78 | 3.73 | 3.67 |
| | .010 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | .100 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| | .050 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| | .025 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.61 | 3.56 | 3.51 | 3.45 | 3.39 | 3.33 |
| | .010 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |

**Tomando por base o modelo**

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

**a senhorita Jolie, gerente do departamento de RH da empresa TEMCO, desconfia que ao menos um dos regressores é relevante para explicar a variável resposta. Utilizando um nível de significância de 1%, conduza um teste de hipóteses adequado.**

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

## Modelo

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

## Hipóteses de Interesse

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_A: \textit{pelo menos um parâmetro difere de zero}$$

**SST = SSR + SSE**

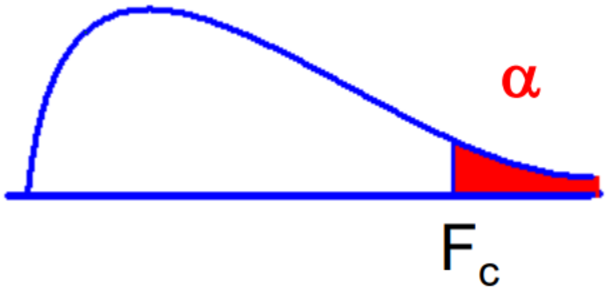
**Se $H_0$ for verdadeira, espera-se que SSR seja pequena e SSE grande.**

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Anova: Teste F - Consequências

$$F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{R^2 / (k)}{(1-R^2) / [n-(k+1)]} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{[k,\ n-(k+1)]}$$

**Região crítica:**




[Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)](#)

# Resolução do Exercício

Dependent Variable: LOG(SALARIO)
Method: Least Squares
Date: 08/26/13 Time: 14:06
Sample: 1 46
Included observations: 46
LOG(SALARIO)=C(1)+C(2)*EDUC+C(3)*ANOSEMP+C(4)*EXPPREV

| | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C(1) | 10.15234 | 0.046720 | 217.3026 | 0.0000 |
| C(2) | 0.045025 | 0.008858 | 5.083099 | 0.0000 |
| C(3) | 0.016009 | 0.003300 | 4.851557 | 0.0000 |
| C(4) | 0.002736 | 0.005364 | 0.510041 | 0.6127 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.751687 | Mean dependent var | 10.55832 |
| Adjusted R-squared | 0.733950 | S.D. dependent var | 0.259053 |
| S.E. of regression | 0.133620 | Akaike info criterion | -1.104695 |
| Sum squared resid | 0.749879 | Schwarz criterion | -0.945683 |
| Log likelihood | 29.40798 | Hannan-Quinn criter. | -1.045128 |
| F-statistic | 42.38040 | Durbin-Watson stat | 1.167563 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

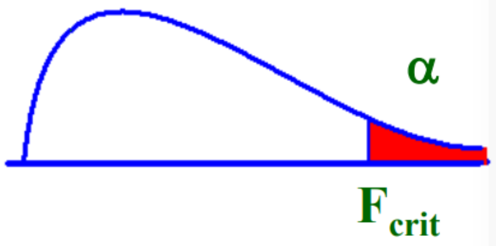
Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício: Região de Rejeição

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_A: \textit{pelo menos um parâmetro difere de zero}$$

O valor crítico ou quantil exato é 4,285




$$F_{crit} = F^{(0,01)}_{[3;42]} \overset{\textit{No Eviews}}{=} @qfdist\ (0.99,3,42) = 4,285$$

$$F_{obs} = 42,38$$

Rejeito $H_0$ se $F_{obs} > F_{crit}$

**Dados**:
Os graus de liberdade da Distribuição F-snedcor
k = 3
n-(k+1) = 46-4 = 42
alfa = 1%
F0,99; 3,42 ~ 4,31 (Tabela, ver slide a seguir)

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

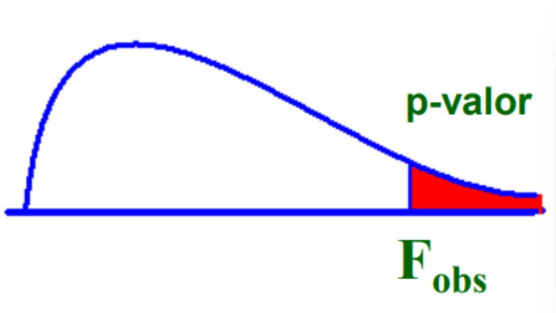
# Resolução do Exercício: Quantil da Distribuição F-Snedcor

| n – graus de liberdade do denominador | | m – graus de liberdade do numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 20 | .100 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| | .050 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| | .025 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.09 |
| | .010 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 22 | .100 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| | .050 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| | .025 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 | 2.70 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.00 |
| | .010 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 24 | .100 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.53 |
| | .050 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| | .025 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 | 2.64 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| | .010 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 26 | .100 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| | .050 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| | .025 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 | 2.59 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | 2.03 | 1.95 | 1.88 |
| | .010 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 28 | .100 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| | .050 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| | .025 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.17 | 2.11 | 2.05 | 1.98 | 1.91 | 1.83 |
| | .010 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 30 | .100 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| | .050 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| | .025 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 | 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.87 | 1.79 |
| | .010 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | .100 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| | .050 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| | .025 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.39 | 2.29 | 2.18 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.80 | 1.72 | 1.64 |
| | .010 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | .100 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| | .050 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| | .025 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 | 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.88 | 1.82 | 1.74 | 1.67 | 1.58 | 1.48 |
| | .010 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | .100 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| | .050 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| | .025 | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.16 | 2.05 | 1.94 | 1.82 | 1.76 | 1.69 | 1.61 | 1.53 | 1.43 | 1.31 |
| | .010 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | .100 | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |
| | .050 | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |
| | .025 | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 | 1.94 | 1.83 | 1.71 | 1.64 | 1.57 | 1.48 | 1.39 | 1.27 | 1.00 |
| | .010 | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

# Resolução do Exercício: P-value

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_A: \textit{pelo menos um parâmetro difere de zero}$$




$$p-valor = P\left(F_{[3;42]} > F_{obs}\right) \overset{No\ Eviews}{=} 1-@cfdist\ (42.38,3,42) = 9{,}07 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{Rejeito } \ H_0 \ \text{ se } \ \text{p-valor} < \alpha$$

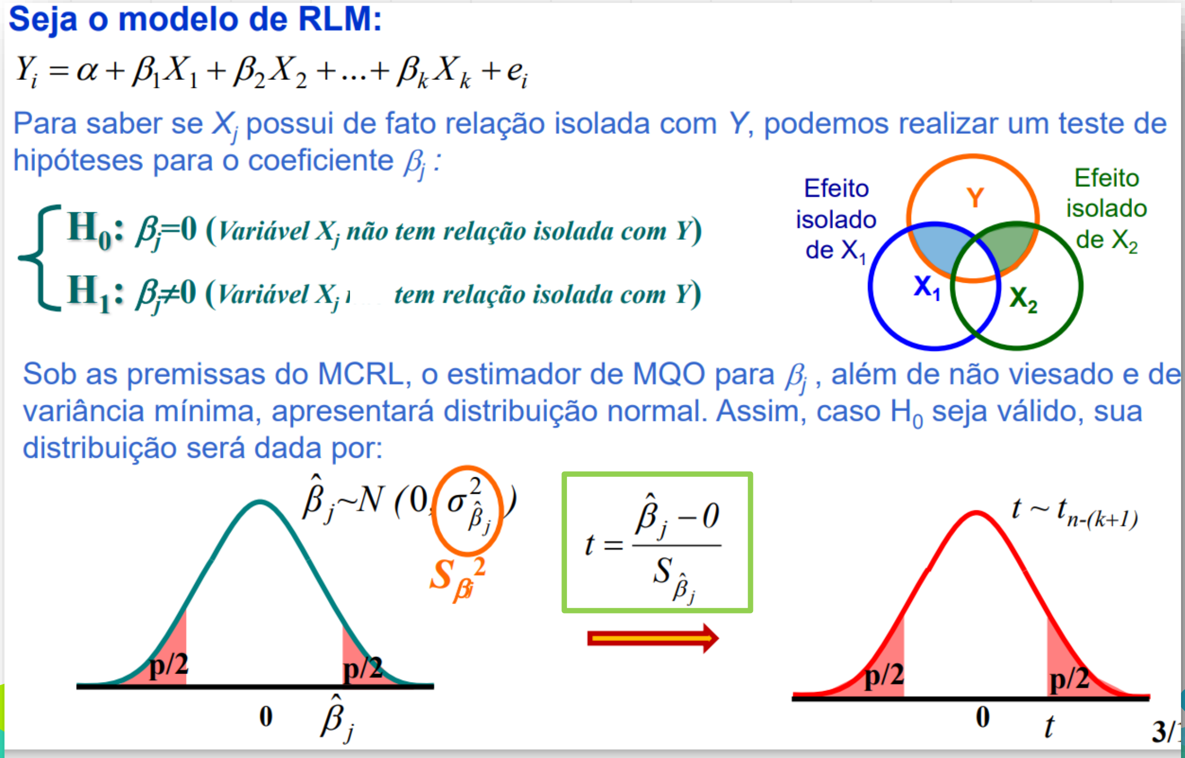
Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Inferência na Regressão Linear Múltipla

2

Teste t para cada Coeficiente do MRLM e Intervalos de Confiança

# Teste t para os Coeficientes



**Seja o modelo de RLM:**

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e_i$$

Para saber se $X_j$ possui de fato relação isolada com $Y$, podemos realizar um teste de hipóteses para o coeficiente $\beta_j$ :

$$\begin{cases} H_0: \beta_j = 0 \ (\textit{Variável } X_j \textit{ não tem relação isolada com } Y) \\ H_1: \beta_j \neq 0 \ (\textit{Variável } X_j \textit{ tem relação isolada com } Y) \end{cases}$$



Sob as premissas do MCRL, o estimador de MQO para $\beta_j$ , além de não viesado e de variância mínima, apresentará distribuição normal. Assim, caso $H_0$ seja válido, sua distribuição será dada por:

$$\hat{\beta}_j \sim N\left(0, \sigma^2_{\hat{\beta}_j}\right)$$

$S_{\beta j}^2$

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{S_{\hat{\beta}_j}}$$

$$t \sim t_{n-(k+1)}$$





Slide 1 (unicamp.br)

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Teste t para os Coeficientes

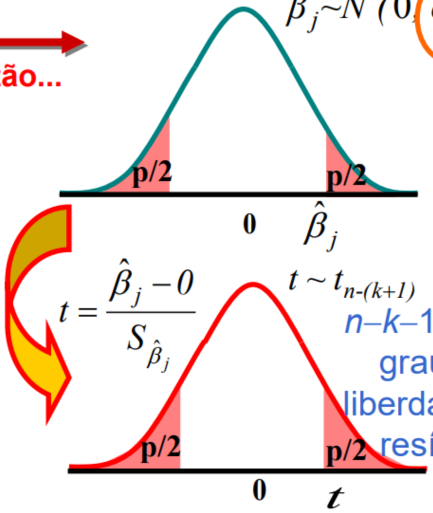
**O parâmetro será nulo até que se prove o contrário:**

$$\begin{cases} H_0: \beta_j = 0 \\ H_1: \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

**Se $H_0$ é verdadeiro, então...**

$S^2_{\hat{\beta}}$

$\hat{\beta}_j \sim N(0, \sigma^2_{\hat{\beta}_j})$




$n-k-1$ são os graus de liberdade dos resíduos

## Dados:

$\hat{\beta}_j$ = estimador de MQ

$S_{\hat{\beta}}$ = erro padrão do estimador

**valor p = nível de significância observado**

**Conclusão:**

Rejeito $H_0$ se valor *p* (prob de erro ao rejeitar $H_0$) for baixa. Nestas circunstâncias, posso afirmar que o estimador é significativo.



Slide 1 (unicamp.br)

# Teste t

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

**Nota**: Se o MRLM considerado for este, o nº de coeficientes de regressão é p=k+1. No caso do formulário, k é o nº de coeficientes. Nesse caso, o grau de liberdade seria n-k.

Logo, para testarmos as hipóteses

$H_0$: $\beta_j = b$ (em particular b = 0)
$H_A$: $\beta_j \neq b$ ($H_A$: $\beta_j < b$ ou $H_A$: $\beta_j > b$),

utilizaremos o fato que, sob $H_0$,

$$\frac{\hat{\beta}_j - b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(k+1)}$$

Formulário

**Inferência estatística do MRL**, com $y_t \mid X \sim N(x_{t\bullet}\beta, \sigma^2)$:

- $q = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{\sigma^2} = \frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$
- $\boxed{t_j = \frac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-k) \quad \text{ou} \quad F_j = \frac{(b_j - \beta_j)^2}{s_{b_j}^2} \sim F(1, n-k)}$

e construiremos a região crítica de acordo com a hipótese alternativa adotada.

# Inferência para um Coeficiente de Regressão Isolado: Resumo

Formulário

Estatística de Teste

- $t_j = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-k)$ ou $F_j = \dfrac{(b_j - \beta_j)^2}{s_{b_j}^2} \sim F(1, n-k)$

Comentários finais:

- Quando a variável residual não tem distribuição normal mas a amostra é grande pode-se utilizar $t_j = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ (pensar no TLC). Também se pode utilizar $t_j = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \overset{a}{\sim} t(n-k)$

# Inferência para um Coeficiente de Regressão Isolado - Casos Mais Frequentes: Resumo

- **Teste à significância estatística de um regressor**: $H_0 : \beta_j = 0$ contra $H_1 : \beta_j \neq 0$

  Neste caso $t_j = \dfrac{b_j - 0}{s_{b_j}} = \dfrac{b_j}{s_{b_j}}$. Região de rejeição **bilateral** com base numa $t$ com $n-k$ graus de liberdade. Este teste é feito pela generalidade dos programas.

- Teste ao sinal de um coeficiente $H_0 : \beta_j = 0$ contra $H_1 : \beta_j > 0$ (ou $H_1 : \beta_j < 0$)

  $t_j = \dfrac{b_j - 0}{s_{b_j}} = \dfrac{b_j}{s_{b_j}}$. Região de rejeição **unilateral** direita (esquerda) com base numa $t$ com $n-k$ graus de liberdade.

- Teste para um valor particular de um coeficiente; Por exemplo: $H_0 : \beta_j = c$ contra $H_1 : \beta_j \neq c$

  $t_j = \dfrac{b_j - c}{s_{b_j}}$. Região de rejeição **bilateral** com base numa $t$ com $n-k$ graus de liberdade.

# Teste t para os Coeficientes: Exemplo

**Sejam os dados da relação entre renda familiar ($Y$), anos de estudo ($X_1$) e idade ($X_2$) do responsável pela família:**

$$Y_i = 1{,}9 + 1X_{1_i} + 0{,}06X_{2_i} + \hat{e}_i$$

A matriz de estimativas das variâncias e covariâncias dos coeficientes será:

$$\mathbf{S}^2_{\hat{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 140 \\ 18 & 102 & 730 \\ 140 & 730 & 5400 \end{pmatrix}^{-1} \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 8{,}95 & 2{,}5 & -0{,}57 \\ 2{,}5 & 1 & -0{,}2 \\ -0{,}57 & -0{,}2 & 0{,}042 \end{pmatrix} 0{,}2 = \begin{pmatrix} 1{,}79 & 0{,}5 & -0{,}114 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}04 \\ -0{,}114 & -0{,}04 & 0{,}0084 \end{pmatrix}$$

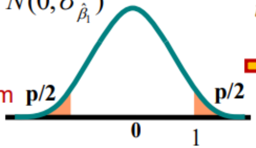
$S^2_{\hat{\beta}j}$

P-value = P(T > 2,24) + P(T< -2,24) = 0,134+0,134 = 0,268 ~ 27% > 0,05

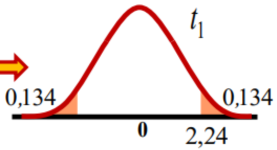
Realizando testes de hipóteses para os coeficientes angulares:

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

$\hat{\beta}_1 \sim N(0, \sigma^2_{\hat{\beta}_1})$



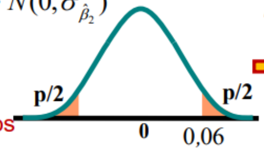

$$t = \frac{1-0}{\sqrt{0{,}2}} = 2{,}24$$



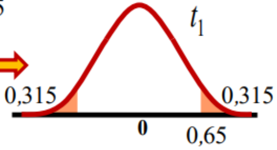

Se afirmarmos que anos de estudo tenham efeito isolado sobre a renda, estaremos sujeitos a um erro de 27%

$$\begin{cases} H_0: \beta_2 = 0 \\ H_1: \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$\hat{\beta}_2 \sim N(0, \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$




$$t = \frac{0{,}06-0}{\sqrt{0{,}0084}} = 0{,}65$$




Se afirmarmos que a idade tenha efeito isolado sobre a renda, estaremos sujeitos a um erro de 63%

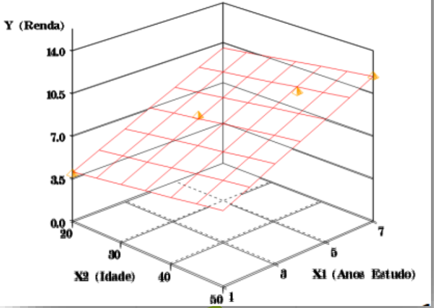


Slide 1 (unicamp.br)

# Exemplo: Estimação dos Coeficientes e Interpretação

**Seja a relação entre renda familiar em SM (*Y*), anos de estudo ($X_1$) e idade ($X_2$) do responsável pela família:**

| Y (Renda) | $X_1$ (Anos Estudo) | $X_2$ (Idade) |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 20 |
| 8 | 4 | 30 |
| 10 | 6 | 40 |
| 12 | 7 | 50 |




$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1_i} + \beta_2 X_{2_i} + e_i \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{e}$$

A função de regressão amostral será dada por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\hat{\beta}} + \mathbf{\hat{e}} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_{4\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 4 & 30 \\ 1 & 6 & 40 \\ 1 & 7 & 50 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{4\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3\times 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{e}}_{4\times 1}}$$

E as estimativas de MQO:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 140 \\ 18 & 102 & 730 \\ 140 & 730 & 5400 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 34 \\ 180 \\ 1320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 1 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}$$

Slide já indicado na aula anterior

Espera-se, para cada ano adicional de estudo do responsável pela família, um aumento de 1 SM e, para cada ano de idade adicional, um aumento de 0,06 SM na renda familiar.

Maia, Alexandre Gori (2017). Econometria: conceitos e aplicações. Cap. 6.

# Coeficiente de Determinação: Exemplo

**Seja a relação entre renda familiar em salários mínimos (*Y*), anos de estudo (*$X_1$*) e idade (*$X_2$*) do responsável pela família:** $Y_i = 1{,}9 + 1X_{1_i} + 0{,}06X_{2_i} + \hat{e}_i$

| Y (Renda) | $X_1$ (Anos Estudo) | $X_2$ (Idade) |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 20 |
| 8 | 4 | 30 |
| 10 | 6 | 40 |
| 12 | 7 | 50 |

| Fonte | gl | Soma dos Quadrados | Quadrados Médios |
|---|---|---|---|
| Regressão | 2 | 34,8 | 17,4 |
| Resíduos | 1 | 0,2 | 0,2 |
| Total | 3 | 35,0 | |

$$R^2 = \frac{SQReg}{STQ} = \frac{34{,}8}{35} = 0{,}994$$

As variáveis anos de estudo e idade explicam, conjuntamente, quase a totatilidade (99,4%) da variabilidade observada para a renda familiar na amostra.

$$STQ = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} - 4(8{,}5)^2 = 324 - 289 = 35$$

$$SQReg = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = \begin{pmatrix} 1{,}9 & 1 & 0{,}06 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 34 \\ 180 \\ 1320 \end{pmatrix} - 4(8{,}5)^2 = 323{,}8 - 289 = 34{,}8$$

$$SQRes = STQ - SQReg = 35 - 34{,}8 = 0{,}2$$

Slide já indicado na aula anterior

Slide 1 (unicamp.br)

# Resolução do Exercício: Quantil da Distribuição t-student

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

| n \ ε | .400 | .250 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 | .001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | .325 | 1,000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.656 | 318.289 |
| **2** | .289 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.328 |
| **3** | .277 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.214 |
| **4** | .271 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 |
| **5** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **6** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **7** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **8** | .262 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 |
| **9** | .261 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 |
| **10** | .260 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 |
| **11** | .260 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 |
| **12** | .259 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 |
| **13** | .259 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 |
| **14** | .258 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 |
| **15** | .258 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 |

**Pela Tabela**:
P-value = P(T > 2,24) + P(T< -2,24) = 0,1+0,1 = 0,2  > 0,05

A senhorita Jolie sabe que, a 1% de significância, ao menos um dos regressores é relevante para explicar a variável resposta. Todavia, a senhorita Jolie desconfia que *expprev* seja irrelevante, dado que os funcionários da TEMCO passam por um processo de treinamento assim que são admitidos na empresa. Dessa forma, adotando um nível de significância de 1%, existem evidências favoráveis à desconfiança da gerente de RH?

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

## Modelo

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

## Hipóteses de Interesse

$$H_0: \beta_3 = 0$$

$$H_A: \beta_3 \neq 0$$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

## Modelo

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

## Hipóteses de Interesse

$$H_0\colon \beta_3 = 0$$

$$H_A\colon \beta_3 \neq 0$$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

Dependent Variable: LOG(SALARIO)
Method: Least Squares
Date: 08/26/13 Time: 14:06
Sample: 1 46
Included observations: 46
LOG(SALARIO)=C(1)+C(2)*EDUC+C(3)*ANOSEMP+C(4)*EXPPREV

| | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C(1) | 10.15234 | 0.046720 | 217.3026 | 0.0000 |
| C(2) | 0.045025 | 0.008858 | 5.083099 | 0.0000 |
| C(3) | 0.016009 | 0.003300 | 4.851557 | 0.0000 |
| C(4) | 0.002736 | 0.005364 | 0.510041 | 0.6127 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.751687 | Mean dependent var | 10.55832 |
| Adjusted R-squared | 0.733950 | S.D. dependent var | 0.259053 |
| S.E. of regression | 0.133620 | Akaike info criterion | -1.104695 |
| Sum squared resid | 0.749879 | Schwarz criterion | -0.945683 |
| Log likelihood | 29.40798 | Hannan-Quinn criter. | -1.045128 |
| F-statistic | 42.38040 | Durbin-Watson stat | 1.167563 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

Estatística de Teste

$$\frac{\hat{\beta}_j - b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(k+1)}$$

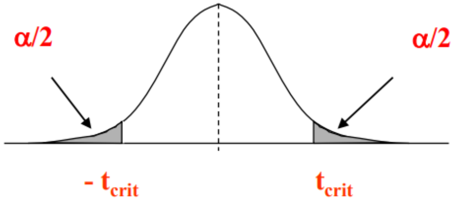
P-value

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício: Região de Rejeição

$$H_0: \beta_3 = 0$$

$$H_A: \beta_3 \neq 0$$




**Dados**:
Os graus de liberdade da Distribuição t-student n-(k+1) = 46-4 = 42
alfa = 1%, alfa/2 = 0,005
t0,995; 42 ~ 2,704 (Tabela, ver slide a seguir)

$$t_{crit} = t_{[46-4]}^{(0{,}005)} = t_{[42]}^{(0{,}005)} \overset{No\ \ Eviews}{=} @\,qtdist(0.995{,}42) = 2{,}698$$

O valor crítico ou quantil exato é 2,698

**Estatística de Teste**

$$\frac{\hat{\beta}_j - b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim \mathrm{t}_{n\text{-}(k+1)}$$

$$t_{obs} = \frac{0{,}002736 - 0}{0{,}005364} = 0{,}510041$$

Como o valor da estatística de teste 0,51 é inferior a 2,698, não se rejeita H0.

$$\text{Rejeito} \quad \mathrm{H}_0 \quad \text{se} \ \left|\mathrm{t}_{obs}\right| > \mathrm{t}_{crit}$$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício: Quantil da Distribuição t-student

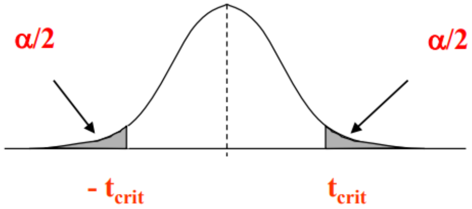
$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

| ε / n | .400 | .250 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 | .001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | .325 | 1,000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.656 | 318.289 |
| **2** | .289 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.328 |
| **3** | .277 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.214 |
| **4** | .271 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 |
| **5** | .267 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.894 |
| **6** | .265 | .718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 |
| **7** | .263 | .711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 |
| **8** | .262 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 |
| **9** | .261 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 |
| **10** | .260 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 |
| **11** | .260 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 |
| **12** | .259 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 |
| **13** | .259 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 |
| **14** | .258 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 |
| **15** | .258 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 |
| **16** | .258 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 |
| **17** | .257 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 |
| **18** | .257 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 |
| **19** | .257 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 |
| **20** | .257 | .687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 |
| **21** | .257 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 |
| **22** | .256 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 |
| **23** | .256 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 |
| **24** | .256 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 |
| **25** | .256 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 |
| **26** | .256 | .684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 |
| **27** | .256 | .684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 |
| **28** | .256 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 |
| **29** | .256 | .683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 |
| **30** | .256 | .683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 |
| **40** | .255 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 |
| **50** | .255 | .679 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.261 |
| **60** | .254 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 |
| **70** | .254 | .678 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.381 | 2.648 | 3.211 |
| **80** | .254 | .678 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.195 |
| **90** | .254 | .677 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 | 3.183 |
| **100** | .254 | .677 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.174 |
| **120** | .254 | .677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.160 |

# Resolução do Exercício: P-value

$$H_0: \beta_3 = 0$$

$$H_A: \beta_3 \neq 0$$




$$t_{obs} = \frac{0{,}002736 - 0}{0{,}005364} = 0{,}510041$$

[Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)]

$$p - valor = 2 \cdot P\left(t_{[42]} \geq 0{,}510041\right) \overset{No\ Eviews}{=} 2 \cdot \left[1 - @ctdist(0{,}510041)\right] = 0{,}6127$$

$$\text{Rejeito } H_0 \text{ se p - valor} < \alpha$$

Tomando por base o modelo

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

existem evidências sobre a relevância da variável *educ*, com 99% de confiança? Toda a sua análise deve ser baseada na construção de um intervalo de confiança.

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Intervalo de Confiança para os Parâmetros

**Prova-se que**

$$\boxed{IC(\beta_j;\gamma) = \left(\hat{\beta}_j \pm t_{n\text{-}(k+1)}^{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}\right)}$$

**em que**

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} - erro\ padrão\ \ assoaciado\ a\ \hat{\beta}_j$$

**é um intervalo de confiança para o parâmetro $\beta_j$, com coeficiente de confiança de 1-$\alpha$.**

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

## Modelo

$$\log(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \beta_2 anosemp_i + \beta_3 \exp prev_i + \varepsilon_i$$

## Hipóteses de Interesse

$$H_0 \colon \beta_1 = 0$$

$$H_A \colon \beta_1 \neq 0$$

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício

Dependent Variable: LOG(SALARIO)
Method: Least Squares
Date: 08/26/13 Time: 14:06
Sample: 1 46
Included observations: 46
LOG(SALARIO)=C(1)+C(2)*EDUC+C(3)*ANOSEMP+C(4)*EXPPREV

| | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C(1) | 10.15234 | 0.046720 | 217.3026 | 0.0000 |
| C(2) | 0.045025 | 0.008858 | 5.083099 | 0.0000 |
| C(3) | 0.016009 | 0.003300 | 4.851557 | 0.0000 |
| C(4) | 0.002736 | 0.005364 | 0.510041 | 0.6127 |

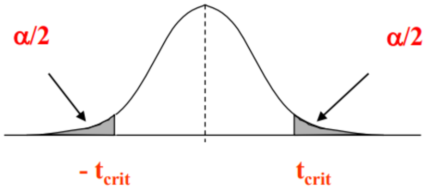
| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.751687 | Mean dependent var | 10.55832 |
| Adjusted R-squared | 0.733950 | S.D. dependent var | 0.259053 |
| S.E. of regression | 0.133620 | Akaike info criterion | -1.104695 |
| Sum squared resid | 0.749879 | Schwarz criterion | -0.945683 |
| Log likelihood | 29.40798 | Hannan-Quinn criter. | -1.045128 |
| F-statistic | 42.38040 | Durbin-Watson stat | 1.167563 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)

# Resolução do Exercício: IC para um Coeficiente

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_A: \beta_1 \neq 0$$




$$t_{crit} = t_{[46-4]}^{(0,005)} = t_{[42]}^{(0,005)} \overset{No\ \ Eviews}{=} @\,qtdist(0.995{,}42) = 2{,}698$$

$$IC(\beta_j;\gamma) = \left(0{,}045025 \pm \overbrace{2{,}698 \cdot 0{,}008858}^{0{,}023899}\right) = (0{,}021126;\ 0{,}068924)$$

Como o IC não engloba o zero, então, com 99% de confiança, existem evidências contrárias à hipótese nula. [Index of /wp-content/uploads/2014/02 (hedibert.org)]

# Obrigada!

## Questões?