Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia e Gestão

Matemática I – Semestre 2 - 2024/2025

Época Normal – 13 de Maio 2025

Duração: $(120 + \varepsilon)$ minutos, $|\varepsilon| \leq 30$

Versão A

Nome: ....

ID Estudante #: ....

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são independentes.
- Não necessita de justificar as suas respostas.

(a) *(6)* Relativamente ao conjunto $A = [1, +\infty[\setminus\{3\}$, pode-se concluir que:

- int(A)= ....
- $\inf(A)$ =........
- Uma vez que $ad(A) \neq A$, pode-se concluir que A não é ...., e portanto não é compacto.

(b) *(10)* Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{3^{2n+1}}$. Se $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$= .... e portanto $(u_n)_n$ é uma progressão ....
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$= ....
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ =....................

(c) *(10)* Na Figura 1, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-1, 6]$ e, na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ Tal como as figuras sugerem, em ambas as funções, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras e o lado de cada quadrícula no referencial representa uma unidade.

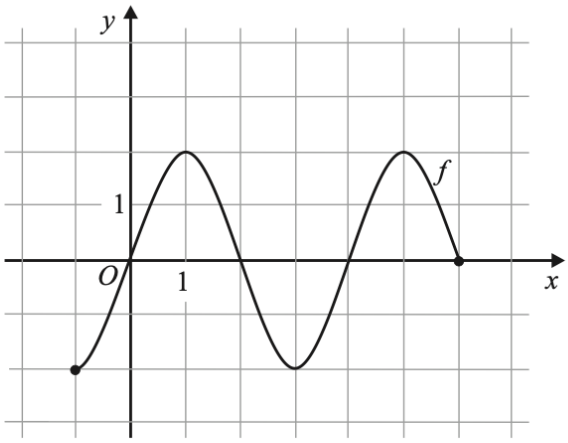


Figura 1

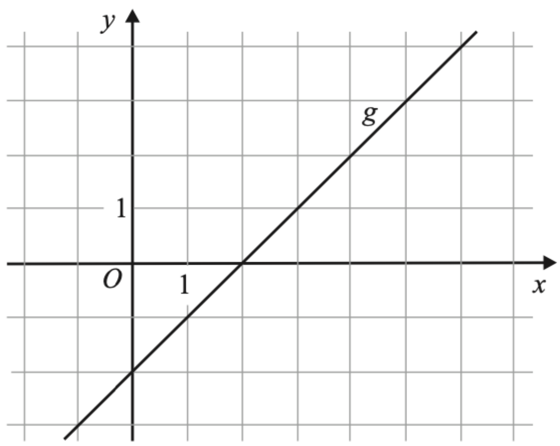


Figura 2

Pode-se concluir que:

- o contradomínio de f, D'_f, é ....
- a expressão analítica da inversa de g é dada por $g^{-1}(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(2x)} =$........
- se $u_n = \ln\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) =$........
- o conjunto dos zeros de $g \circ f$ é {.......................}

(d) *(8)* O valor exato de $\sin(\arctan(3))$ é ....

(e) *(5)* A equação $t^t = 7$ tem pelo menos uma solução no intervalo]....., ...[, como consequência do Teorema do Valor Intermédio.

Nota: indique um intervalo de **amplitude** 1.

(f) *(6)* Relativamente a uma função diferenciável (pelo menos duas vezes) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabe-se que:

$$f'(2) = 0 \quad \text{e} \quad f''(2) > 0.$$

Logo, conclui-se que:

- f atinge um .... local em $x = 2$;
- f tem máximo e mínimo **absolutos** no intervalo .... , como consequência do Teorema de ....

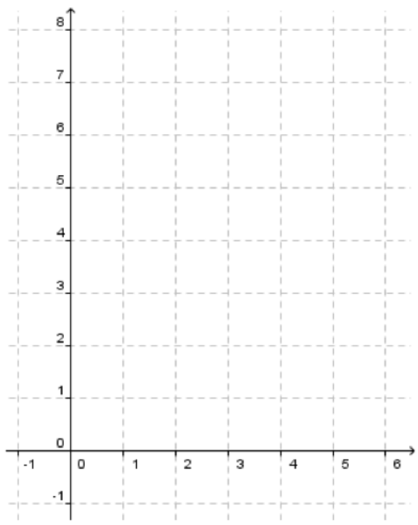
(g) *(6)* Considere a função F, de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$$F(x) = \int_2^{x^2} \frac{t^2+1}{t^3+2}\, \mathrm{dt}.$$

Logo, tem-se:

- $F(.....) = 0$
- $F'(x) =$ ....

(h) *(10)* O esboço da região do primeiro quadrante definido por $y = 2x$ e $y = x^2$ é:



Usando a Regra de Barrow, a área dessa região pode ser calculada do seguinte modo:

$$\int_{.....}^{.....} (...... - ....)\, \mathrm{dx} = ...$$

(i) *(12)* No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ definidos por:

$$\overline{a} = (-1, 2, 0), \quad \overline{b} = (6, 3, -1) \quad \overline{c} = 4\overline{a}.$$

Pode-se concluir que:

- $\overline{a} - 2\overline{b} = (......, ..., ...)$,

- $\overline{a}.\overline{b} =$ ....

- $\|\overline{a}\|^2 =$ ....

- se $\mathbf{A} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz cujos vetores coluna são $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$, então:

$$\det(\mathbf{A}) = ...$$

(j) *(6)* Considere, em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, a matriz triangular superior:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \ln 4 & \sqrt{5} \\ 0 & 3 & \cos(\pi/6) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então pode-se afirmar que:

- $\det(\mathbf{A^T}) = ... \neq \mathbf{0}$

- $\mathbf{r}(\mathbf{A}) =$ ......

(k) *(6)* Relativamente ao sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{3\times 3}}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M_{3\times 1}}(\mathbb{R})$, sabe-se que

- $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$ e
- o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é possível.

Logo $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) =$ .... e o seu grau de indeterminação é igual a ....

Parte II

Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.

---

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x - \sin(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}.$$

   (a) Escreva a equação da reta que é **assíntota oblíqua** do gráfico de f.

   (b) Determine o valor de b de modo que f seja **contínua** em $x = 0$.

2. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', também de domínio $\mathbb{R}$, é dada por:

$$f'(x) = e^x(x^2 + x + 1).$$

   Sejam $p, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}.$$

   (a) Determine o valor de q e interprete **geometricamente** esse valor.

   (b) Estude a função f quanto ao sentido das **concavidades** do seu gráfico e quanto à existência de **pontos de inflexão**.

3. Seja f a função definida por $f(t) = \sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que o **polinómio de Taylor** de f de grau 3 em $t_0 = 0$ é dado por $2t - \frac{4}{3}t^3$.

   (b) Usando a alínea anterior, mostre que:

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin(2t)}{t}\, \mathrm{dt} \approx 17/18.$$

4. Considere a matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{3\times 3}}(\mathbb{R})$ definida por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = aI_3$, onde $I_3 \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz identidade e $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Na sua resposta deve explicitar o valor de a.

(b) **Usando a alínea anterior**, mostre $\mathbf{A}$ é invertível e explicite $\mathbf{A^{-1}}$.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ e parametrizado por $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + a^2 y + 4z & = 5 \\ y + 4z & = b \\ (1+a^2)y + (4-a)z & = 8 \end{cases}.$$

(a) **Classifique** o sistema em função dos parâmetros a e b.

(b) Determine o conjunto solução do sistema quando $a = 0$ e $b = 8$.

Cotações:

I	II.1(a)	II.1(b)	II.2(a)	II.2(b)	II.3(a)	II.3(b)	II.4(a)	II.4(b)	II.5(a)	II.5(b)
85	10	10	10	15	10	10	10	15	15	10