Correção do Exame de Matemática I — 13/05/2025

Versão A

Parte I

1 a) int A $=]1,3[\cup]3,+\infty[$

inf A = 1

A não é fechado

1 b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7^{n+2}}{3^{2n+3}} : \dfrac{7^{n+1}}{3^{2n+1}} = \dfrac{7^{n+2} \cdot 3^{2n+1}}{3^{2n+3} \cdot 7^{n+1}}$

$= \dfrac{7}{3^2} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7^{n+1}}{3^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7^n \cdot 7}{9^n \cdot 3} = 0$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{u_1}{1-r} = \dfrac{7^2}{3^3\,(1-7/9)} = \dfrac{7^2}{3^3 - 3\cdot 7}$

$= \dfrac{49}{27-21} = \boxed{\dfrac{49}{6}}$

1 c) $D_f' = [-2,2]$

$g^{-1}(x) = x+2$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(2x)} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

- $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n} \ln e = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(1) = 2$

- zeros de $g \circ f$: $\{1, 5\}$

d) $\sin(\underbrace{\operatorname{arctg} 3}_{b}) = a$

$\Rightarrow \operatorname{tg} b = 3 \Longrightarrow \operatorname{tg}^2 b = 9 \Longrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 b = \dfrac{1}{\cos^2 b}$

$\Leftrightarrow \cos^2 b = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 b} \Leftrightarrow \cos^2 b = \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \sin^2 b = 1 - \dfrac{1}{10} \Longrightarrow \underbrace{\sin b}_{a} = \pm \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Como $\operatorname{tg} b = 3$, então $b \in 1^{\circ}Q$. $\Longrightarrow \boxed{\sin b = \dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

e) Define-se $f(t) = t^t$, $t \in \mathbb{R}^+$ (contínua)

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 3^3 = 27$

Como $7 \in]4, 27[$, então $t^t = 7$ tem solução em $]2, 3[$.

(Consequência do Th. Valor Intermédio)

f) mínimo

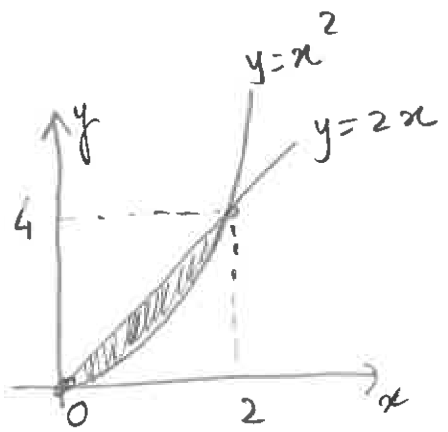
- $[1,2]$ (por exemplo); Teorema de Weierstrass

g) $F(\sqrt{2}) = \int_2^2 \frac{t^2+1}{t^3+2}\,dt = 0$

$$F'(x) = 2x \cdot \frac{(x^2)^2+1}{(x^2)^3+2} = \frac{2x\,(x^4+1)}{x^6+2}$$

$$= \frac{2x^5+2x}{x^6+2}$$

h)



$$\int_0^2 (2x-x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

i)
- $\bar{a} - 2\bar{b} = (-1,2,0) - 2(6,3,-1) = (-13,-4,2)$
- $\bar{a}\cdot\bar{b} = (-1,2,0)\cdot(6,3,-1) = -6+6+0 = 0$
- $\|a\|^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$
- $\det A = 0.$

j) $\cdot \det A^T = \det A = -6$

$\cdot\, r(A) = 3$

k) $r(A|B) = 2$; grau de indeterminação é 1.

X

Parte II

1a) Assíntota oblíqua: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+b+e^x}{x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{x}}_{=a} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{b}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}}_{=0} = a$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \left[b + e^x\right] = b$$

$$\therefore \boxed{y = ax + b}$$

1b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = b + e^0 = b+1$

$f(0) = b+1$

Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin 2x}{x} = \frac{1 - 2\cos(2.0)}{1}$$

$$= -1$$

Para que f seja contínua em $x=0$, então:

$$b+1=-1 \iff \boxed{b=-2}$$

2a)

$$p=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=e^{-1}(1-1+1)$$
$$=e^{-1}$$

$$q=-\frac{1}{p}=-e$$

↳ declive da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=-1$.

b) $$f''(x)=(e^x)'(x^2+x+1)+e^x(x^2+x+1)'$$
$$=e^x(x^2+x+1)+e^x(2x+1)$$
$$=e^x(x^2+3x+2)$$

$$f''(x)=0 \iff \underbrace{e^x=0}_{\text{impossível}} \vee \quad x^2+3x+2=0$$
$$x=-1 \vee x=-2$$

Tabela de Variação de f'' ⑥

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I	$\cap$	P.I	$\cup$

Conclusão:

- gráfico de f é côncavo em $]-2,-1[$
- gráfico de f é convexo em $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$
- gráfico de f tem dois pontos de inflexão ($x=-2$ e em $x=-1$).

3 a) $f(t) = \sin(2t)$

Polinómio de Taylor de grau 3 em $t_0 = 0$.

$$P(t) = f(0) + f'(0)\,t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3$$

$$= 0 + 2t + \frac{0}{2}t^2 - \frac{8}{6}t^3 = 2t - \frac{4}{3}t^3$$

$f'(t) = 2\cos(2t)$ $\qquad f'(0) = 2$

$f''(t) = -4\sin(2t)$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(t) = -8\cos(2t)$ $\qquad f'''(0) = -8$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(2t)}{t}\,dt \overset{(a)}{\simeq} \int_0^{1/2} \frac{2t - \frac{4}{3}t^3}{t}\,dt$

$\displaystyle = \int_0^{1/2} 2 - \frac{4}{3}t^2\,dt = \left[2t - \frac{4}{9}t^3\right]_0^{1/2}$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$

4a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$AA^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 9\, Id_3$

b) $AA^T = 9\, Id_3 \Rightarrow \det(AA^T) = \det(9\, Id_3)$

$\Leftrightarrow \det A \, \det A^T = \underbrace{9^3 \cdot \det(Id_3)}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow$ A é invertível

$$A\,A^T = 9\,Id_3 \iff A^T = 9\,A^{-1}$$

$$\iff A^{-1} = \frac{A^T}{9}$$

$$\iff A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

5a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 1+a^2 & (4-a) & 8 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & \underbrace{-4a^2-a} & -b-ba^2+8 \end{array}\right]$$

$$-4a^2-a = -a(4a+1)$$

$a = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & 8-b \end{array}\right]$$

$b = 8$

$\boxed{r(A) = r(B) = 2}$

$b \neq 8$

$\boxed{r(A) = 2 \neq r(B) = 3}$

$a = -1/4$

$\longrightarrow b = \dfrac{128}{17}$ $\boxed{r(A) = r(B) = 2}$

$\longrightarrow b \neq \dfrac{128}{17}$ $\boxed{r(A) \neq r(B)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & -b - \frac{b}{16} + 8 \end{array}\right]$$

$$-\frac{17}{16} b + 8 = 0 \Leftrightarrow -\frac{17}{16} b = -8 \Leftrightarrow b = \frac{8 \cdot 16}{17} = \frac{128}{17}$$

Conclusão:

$a = 0$, $b = 8$ $\Rightarrow$ sistema possível indeterminado $(g=1)$

$a = 8$, $b \neq 8$ $\Rightarrow$ sistema impossível

$a = -1/4$, $b = \dfrac{128}{17}$ $\Rightarrow$ sistema possível indeterminado $(g=1)$

$a = -1/4$, $b \neq \dfrac{128}{17}$ $\Rightarrow$ sistema impossível

$a \neq 0, a \neq -\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ sistema possível e determinado

$r(A) = r(A|B) = 3$

$g \to$ grau de indeterminação

b) $a=0, b=8$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$y = 8 - 4z$

$x = 5 - 4z$

C.S.: $\{(5-4z, 8-4z, z), z \in \mathbb{R}\}$