

Simulação e Otimização

Capítulo 1: Técnicas de resolução de problemas de otimização combinatória

Raquel Bernardino

rbernardino@iseg.ulisboa.pt
Gabinete 511 Quelhas 6

Motivação

Introdução

Relaxações

Resolução exata de problemas de otimização combinatória

Motivação

Introdução

Relaxações

Resolução exata de problemas de otimização combinatória

- Todos os dias estamos perante problemas de Investigação Operacional, como por exemplo:
 - ▶ Determinar o caminho rápido para vir para o ISEG.
 - ▶ Decidir onde fazer as compras para a semana (distância versus preços).

- Para formular estes problemas muitas vezes precisamos de **variáveis inteiras**.

Exemplos de aplicações de Investigação Operacional



European Journal of Operational Research
Volume 240, Issue 3, 1 February 2015, Pages 718-733

Decision Support

An optimization framework for the development of efficient one-way car-sharing systems

Burak Boyaci.^a  , Konstantinos G. Zografos.^b  , Nikolas Geroliminis.^a  



(a) 2017



European Journal of Operational Research
Volume 257, Issue 3, 16 March 2017, Pages 992-1004

Innovative Applications of O.R.

Inventory rebalancing and vehicle routing in bike sharing systems

J. Schuijbroek.^a  , R.C. Hampshire.¹  , W.-J. van Hoesel.^c  



(b) 2019



European Journal of Operational Research
Volume 271, Issue 3, 16 December 2018, Pages 1085-1099

Innovative Applications of O.R.

Scheduling last-mile deliveries with truck-based autonomous robots

Nils Boysen.¹  , Stefan Schwerdfeger.^b  , Felix Weidinger.¹  



(c) 2020



European Journal of Operational Research
Volume 292, Issue 1, 1 July 2021, Pages 250-275

Innovative Applications of O.R.

Building disaster preparedness and response capacity in humanitarian supply chains using the Social Vulnerability Index

Douglas Alem.^a  , Hector F. Bonilla-Londono.^b  , Ana Paula Barbosa-Povoa.^c  , Susana Relvas.^c  , Deisemara Ferreira.^d  , Alfredo Moreno.^e  



(d) 2023

Figura 1: Prémio aplicações inovadoras da IO da revista científica *European Journal of Operations Research*.

Motivação

Introdução

Relaxações

Resolução exata de problemas de otimização combinatória

Um **problema de programação linear inteira mista (PLIM)** é um problema de programação linear em que algumas variáveis têm obrigatoriamente valores inteiros. \implies Perda da propriedade da divisibilidade da PL.

- ▶ Num **problema de programação linear inteira (PLI)** todas as variáveis têm obrigatoriamente valores inteiros.
- ▶ Num **problema de programação linear binária** todas as variáveis têm obrigatoriamente valor binário, isto é, **valor 0 ou 1**.

Um **problema de otimização combinatória (POC)** é um PLIM cuja região admissível (RA) é um conjunto finito.

- ▶ A solução ótima é um subconjunto de um conjunto finito - a RA.

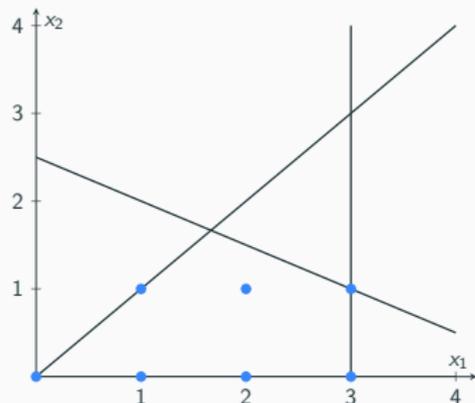
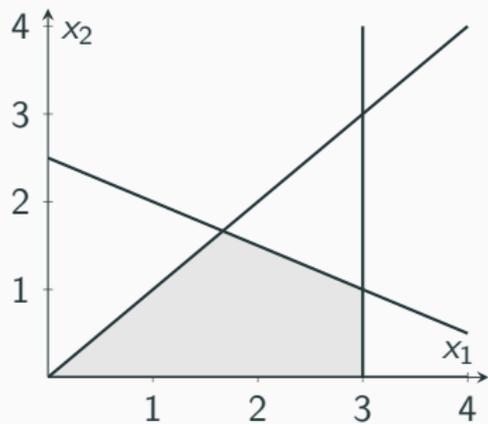


Figura 2: RA de um PL versus RA de um POC.

Exemplos de problemas de otimização combinatória são:

- ▶ o problema da afetação;
- ▶ o problema dos transportes;
- ▶ o problema do saco-mochila;
- ▶ o problema do caixeiro viajante; ou
- ▶ o problema do roteamento de veículos.

■ O problema do caixeiro viajante e o problema do roteamento de veículos serão estudados no Capítulo 2.

Como podemos resolver um problema de otimização combinatória?

- ▶ Como a RA é um conjunto finito, podemos calcular todas as soluções admissíveis (SA) e determinar a melhor. \implies Enumeração!

■ A enumeração da RA de um POC pode ser um processo muito demorado.

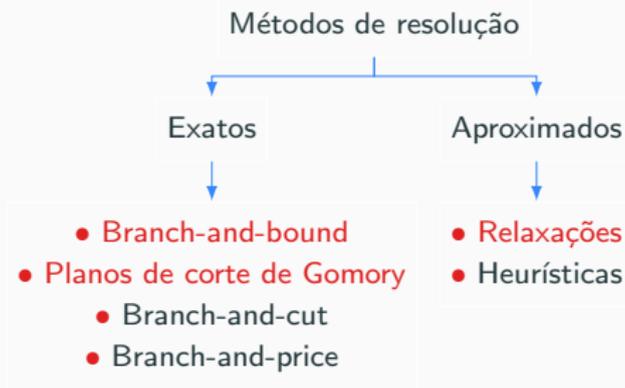
| Problema | #SA |
|--------------------------|------------|
| Caixeiro viajante | $(n - 1)!$ |
| Problema do saco-mochila | 2^n |

■ Uma instância do caixeiro viajante com 10 cidades tem 362880 SAs.

■ Uma instância do saco-mochila com 10 itens tem 1024 SAs.

- ▶ Estas são consideradas instâncias pequenas.

- ▶ Como resolver um POC de forma eficiente?



■ Nos métodos aproximados são calculados limites inferiores (**minorantes**) ou limites superiores (**majorantes**) para o valor ótimo.

- ▶ Num problema de minimização as relaxações dão minorantes e as heurísticas majorantes.
- ▶ Num problema de maximização as relaxações dão majorantes e as heurísticas minorantes.

Motivação

Introdução

Relaxações

Introdução

Relaxação linear

Relaxação Lagrangeana

Resolução exata de problemas de otimização combinatória

Ideia geral: Resolver uma versão “simplificada” do problema, que normalmente é obtida removendo restrições.

Definição: Relaxação

Um problema

$$(RP) \quad z^R = \min\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

é uma *relaxação* de

$$(IP) \quad z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

se:

- (i) $X \subseteq T$; e
- (ii) $f(x) \leq c(x), \forall x \in X$.

Proposição

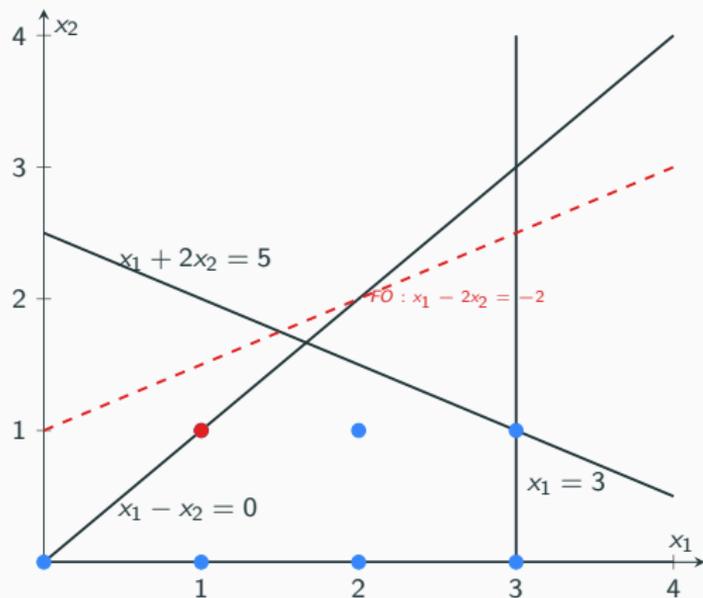
Se RP é uma relaxação de IP, então $z^R \leq z$.

Demonstração.

Se x^* é uma solução ótima de IP, então $x \in X$ e $z = c(x^*)$. Como RP é uma relaxação de IP sabemos que $X \subseteq T$ e $f(x^*) \leq c(x^*)$. Logo, $z^R \leq f(x^*) \leq c(x^*) \leq z$. □

Exemplo

$$\begin{aligned}(IP) \equiv \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a :} &x_1 - x_2 \geq 0 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ &x_1 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$



$$v(IP) = c(1, 1) = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1$$

Exemplo

$$(RL_1) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$

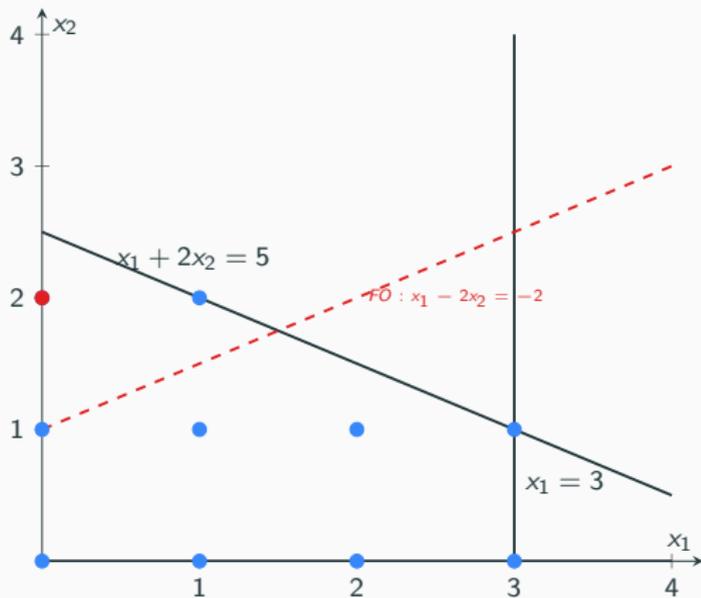
$$\text{s.a : } x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Removida a restrição

$$x_1 - x_2 \geq 0.$$

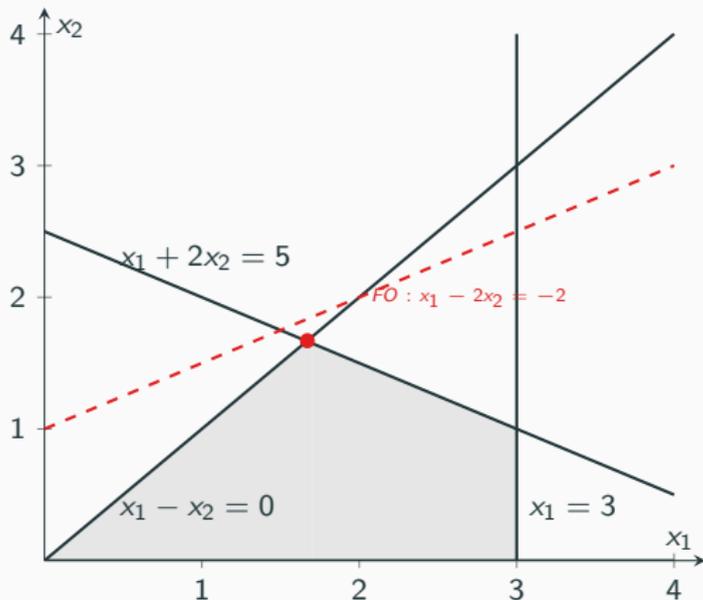


$$v(RL_1) = c(0,2) = 1 \times 0 - 2 \times 2 = -4$$

Exemplo

$$\begin{aligned}(RL_2) \equiv \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a : } x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Removida a restrição de integridade.

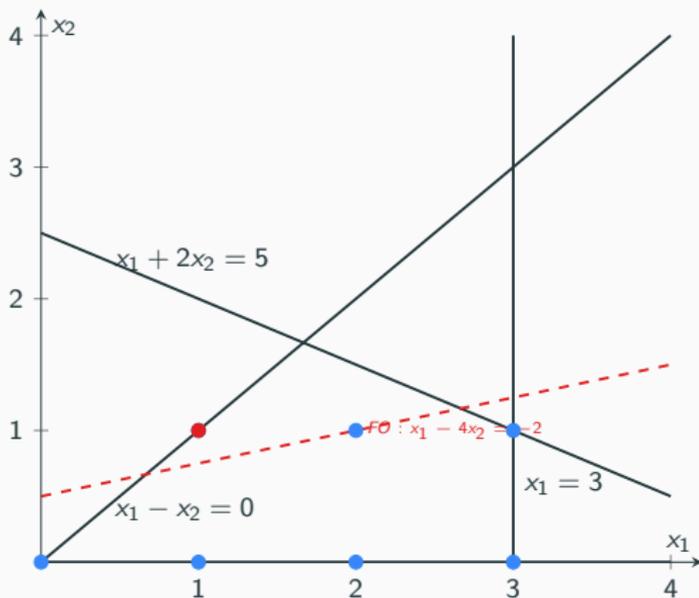


$$v(RL_2) = c\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} - 2 \times \frac{5}{3} = -\frac{5}{3} \approx -1.67$$

Exemplo

$$\begin{aligned}(RL_3) \equiv \min z &= x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a :} &x_1 - x_2 \geq 0 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ &x_1 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

A FO é $x_1 - 4x_2$ em vez
de $x_1 - 2x_2$.



$$v(RL_3) = c(1, 1) = 1 \times 1 - 4 \times 1 = -3$$

Propriedade

- (i) Se a relaxação RP é impossível, então o problema original IP é impossível.
- (ii) Seja x^* a SO da relaxação RP e $f(x) = c(x), \forall x \in X$. Se $x^* \in X$, então x^* é a SO do problema IP.

Demonstração.

- (i) Se RP é impossível, então $T = \emptyset$. Assim, como $X \subset T$ temos $T = \emptyset$ e podemos concluir que o problema original IP também é impossível.
- (ii) Como x^* a SO da relaxação RP e $x^* \in X$, temos $z \leq c(x^*) = f(x^*) = z^R$. Como RP é uma relaxação de IP temos $z^R \leq z$. Assim, $z = z^R$ e x^* é uma SO de IP, pois $z = c(x^*)$.



A **relaxação linear** de um PLIM é obtida removendo as restrições de integralidade.

Definição: Relaxação linear

Dado o problema

$$(IP) \quad z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\},$$

a sua *relaxação linear* é

$$(PLR) \quad z^{LR} = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Para avaliar a qualidade do valor da relaxação linear podemos usar o **gap**.

$$gap = \frac{z - z^{LR}}{z}.$$

Exemplo

$$(IP) \equiv z = \min x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a : } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

$$(RL_2) \equiv z = \min x_1 - 2x_2$$

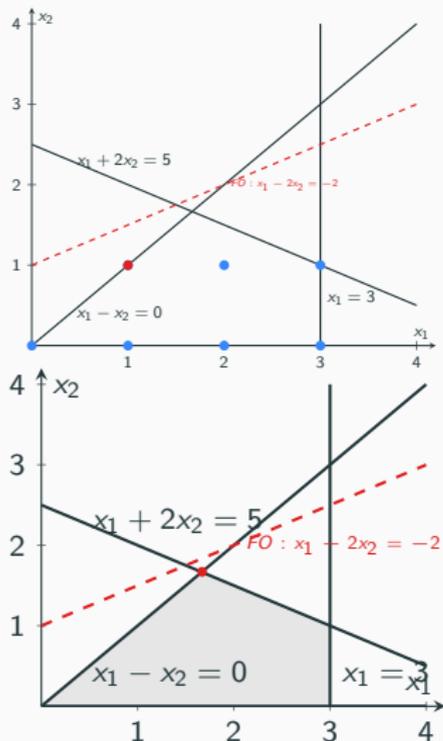
$$\text{s.a : } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

$$\text{gap} = \frac{-1 - (-5/3)1}{|-1|} = \frac{2}{3} \implies 66.67\%.$$



¹Usamos o módulo no denominador quando o valor ótimo é negativo.

Definição

Os dois problemas

$$(IP) \quad z = \max\{c(x) : x \in X\}$$

e

$$(D) \quad w = \min\{w(u) : u \in U\}$$

formam um *par de problemas duais fraco* se $c(x) \leq w(u), \forall x \in X$ e $u \in U$. Quando $z = w$, temos um *par de problemas duais forte*.

- Num par de problemas duais, o valor de qualquer SA do problema de máximo é um **minorante** para o valor ótimo problema de mínimo.
 - ▶ O par de problemas duais apenas está definido para **problemas de programação linear**.

- Considere-se o seguinte problema inteiro

$$(IP) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \geq d \text{ e } x \in X\},$$

onde $Dx \geq d$ é o conjunto de restrições “complicadas”.

Proposição

O problema

$$IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\}$$

é uma relaxação de IP para todo $u \geq 0$.

Demonstração.

Temos que $\{Dx \geq d \text{ e } x \in X\} \subseteq X$ e $c(x) + u(d - Dx) \leq c(x)$, logo pela definição de relaxação $IP(u)$ é uma relaxação de IP. \square

Considere-se

$$(IP) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \geq d \text{ e } x \in X\}$$

e

$$IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\},$$

com $u > 0$.

Definição

$IP(u)$ é a *relaxação Lagrangeana* de (IP) de parâmetro u .

$$(IP) \equiv z = \min x_1 - 2x_2$$

s.a : $x_1 - x_2 \geq 0 \implies$ Restrições "complicadas"

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

■ A relaxação lagrangeana é:

$$IP(u) \equiv z(u) = \min x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2) = (1 - u)x_1 + (-2 + u)x_2$$

$$s.a : x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

Em $IP(u)$ as restrições “complicadas” são adicionadas à função objetivo com uma penalidade u .

- ▶ O valor u é o **multiplicador de Lagrange** associado às restrições $Dx \geq d$.
- ▶ Na FO a penalidade é multiplicada pela “violação” da restrição relaxada.

O problema $IP(u)$ é a **relaxação Lagrangeana** de IP de parâmetro u .

- ▶ O valor ótimo de $IP(u)$ depende do valor de u .

Como o $IP(u)$ é uma relaxação de IP , sabemos que $z(u) \leq z$. Contudo, $z(u)$ depende do valor de u .

- ▶ Para encontrar o melhor minorante possível para o valor ótimo de IP temos que otimizar o valor de u . \implies Resolver o *problema dual lagrangeano*.

Definição

O *problema dual Lagrangeano* define-se como

$$(LD) \equiv w_{DL} = \max\{z(u) : u \geq 0\}.$$

- O problema dual Lagrangeano que queremos resolver é:

$$w_{DL} = \max_{u \geq 0} z(u) = \min_{(x_1, x_2) \in X} (1 - u)x_1 + (-2 + u)x_2$$

com $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 5, x_1 \leq 3 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$.

- Queremos determinar a expressão de $z(u)$ para conseguirmos determinar o seu máximo. Contudo, $z(u)$ depende da solução do PLI $\min\{(1 - u)x_1 + (-2 + u)x_2 : (x_1, x_2) \in X\}$.

- ▶ Que pontos em X é que podem ser SOs do PLI referido?

Exemplo

■ Vamos analisar todos os sinais possíveis para os coeficientes de x_1 e x_2 .

$$\text{Caso 1: } z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\geq 0} x_2$$

Como queremos minimizar, a SO seria $(0, 0)$. → Quais os valores de u ?

$$\begin{cases} 1-u \geq 0 \\ -2+u \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \leq 1 \\ u \geq 2 \end{cases}$$

⇒ Impossível, $(0, 0)$ nunca será SO.

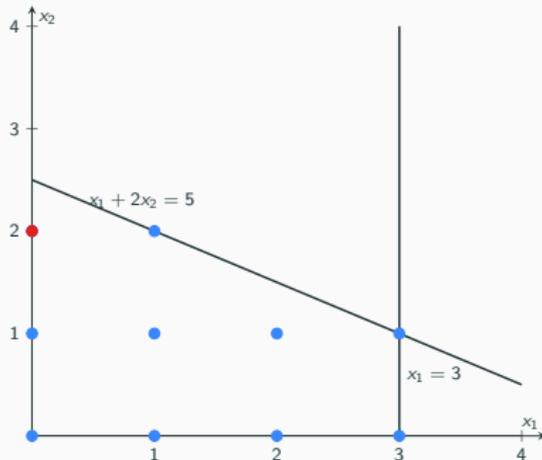
$$\text{Caso 2: } z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\leq 0} x_2$$

Como queremos minimizar, a SO seria $(0, 2)$. → Quais os valores de u ?

$$\begin{cases} 1-u \geq 0 \\ -2+u \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \leq 1 \\ u \leq 2 \end{cases} \implies u \leq 1$$

⇒ Para $0 \leq u \leq 1$ a SO é $(0, 2)$ e

$$z(u) = (1-u) \times 0 + (-2+u) \times 2 = -4 + 2u.$$



Exemplo

Caso 3: $z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\leq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\geq 0} x_2$

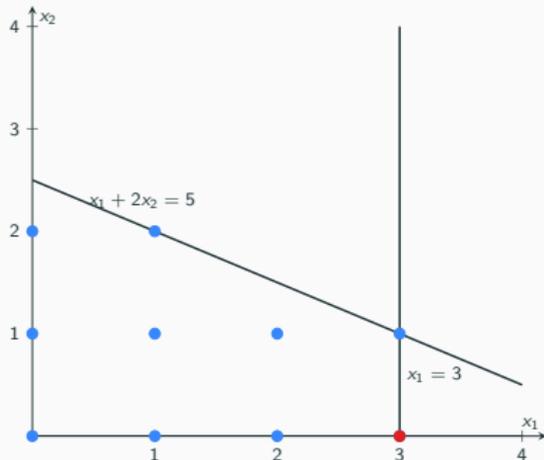
Como queremos minimizar, a SO seria $(3, 0)$. \rightarrow

Quais os valores de u ?

$$\begin{cases} 1-u \leq 0 \\ -2+u \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \geq 1 \\ u \geq 2 \end{cases} \implies u \geq 2$$

\implies Para $u \geq 2$ a SO é $(3, 0)$ e

$$z(u) = (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 0 = 3 - 3u.$$



Exemplo

$$\text{Caso 4: } z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\leq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\leq 0} x_2$$

Como queremos minimizar, existem duas SOs possíveis: (1, 2) e (3, 1). → Quais os valores de u ?

$$\begin{cases} 1-u \leq 0 \\ -2+u \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \geq 1 \\ u \leq 2 \end{cases} \implies 1 \leq u \leq 2$$

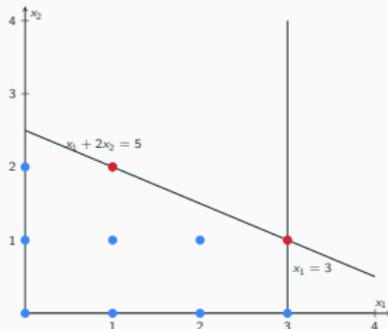
Para $1 \leq u \leq 2$, as SOs são (1, 2) e (3, 1). → Para que valores de u é que cada ponto é SO?

- ▶ (1, 2) é SO se o valor da FO em (1, 2) for menor ou igual ao valor da FO em (3, 1)

$$\begin{aligned} (1-u) \times 1 + (-2+u) \times 2 &\leq (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 1 \\ \iff 1-u-4+2u &\leq 3-3u-2+u \iff u &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

⇒ Para $1 \leq u \leq \frac{4}{3}$ a SO é (1, 2) e $z(u) = (1-u) \times 1 + (-2+u) \times 2 = -3+u$.

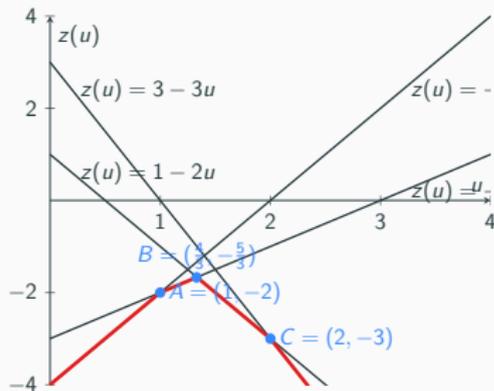
Analogamente, se mostra que para $\frac{4}{3} \leq u \leq 2$ a SO é (3, 1) e $z(u) = (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 1 = 1-2u$.



Exemplo

Assim, a expressão da função que queremos maximizar é:

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4, & 0 \leq u \leq 1 \\ u - 3, & 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ -2u + 1, & \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ -3u + 3, & u \geq 2 \end{cases}$$



Qual o valor de u que maximiza $z(u)$? $\implies u = \frac{4}{3}$ (ponto B).

Para obtermos o melhor minorante possível agora temos que calcular $z(\frac{4}{3})$.

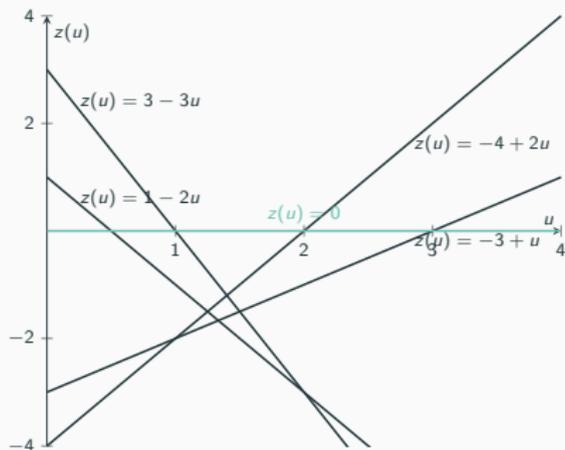
$$z\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$$

Exemplo: Forma alternativa

■ Poderíamos calcular a expressão de $z(u)$ para todas as possíveis SO e determinar quais são as retas que correspondem ao mínimo. \implies “Força bruta”

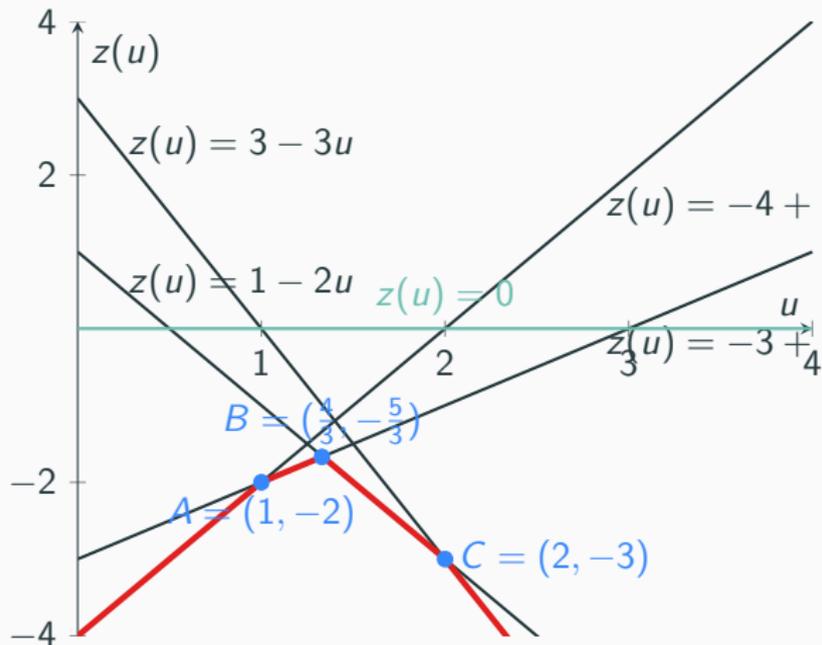
■ Temos então as seguintes expressões possíveis para $z(u)$:

- ▶ Ponto $(0, 0) \implies z(u) = (1 - u) \times 0 + (-2 + u) \times 0 = 0$
- ▶ Ponto $(0, 2) \implies z(u) = (1 - u) \times 0 + (-2 + u) \times 2 = 2u - 4$
- ▶ Ponto $(3, 0) \implies z(u) = (1 - u) \times 3 + (-2 + u) \times 0 = -3u + 3$
- ▶ Ponto $(1, 2) \implies z(u) = (1 - u) \times 1 + (-2 + u) \times 2 = u - 3$
- ▶ Ponto $(3, 1) \implies z(u) = (1 - u) \times 3 + (-2 + u) \times 1 = -2u + 1$



Exemplo: Forma alternativa

■ Queremos determinar a reta que está a baixo (é o mínimo) de todas as outras.



Exemplo: Forma alternativa

Assim, a expressão da função que queremos maximizar é:

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4, & 0 \leq u \leq 1 \\ u - 3, & 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ -2u + 1, & \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ -3u + 3, & u \geq 2 \end{cases}$$

Relaxação Lagrangeana

Relembremos que $IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\}$.

Proposição

Se $u \geq 0$, e

- (i) $x(u)$ é uma SO de $IP(u)$, e
- (ii) $Dx(u) \geq d$, e
- (iii) $(Dx(u))_i = d_i$ sempre que $u_i > 0$ (relações de complementaridade),

então $x(u)$ é SO de IP .

Demonstração.

Por (i), como $x(u)$ é uma SO de $IP(u)$ temos $w_{DL} \geq z(u)$.

Além disso, $x(u)$ é admissível para o problema original IP pois $x \in X$ e satisfaz as restrições complicadas por (ii). Logo, $z(u) \geq z$.

Finalmente, por (iii), $z(u) = cx(u) + u(d - Dx(u)) = cx(u)$, pois quando $u > 0$ as restrições são satisfeitas na igualdade.

Como o problema dual lagrangeano é uma relaxação de IP temos $w_{DL} \leq z$. Logo, $w_{DL} = z$ e podemos concluir que $x(u)$ é uma SO de IP . \square

Relaxação Lagrangeana

- Caso as restrições a relaxar não estejam na forma \geq as restrições de sinal da variável u alteram-se no problema dual lagrangeano.

Caso \geq

$$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Ax \geq b \text{ e } x \in X\}.$$

$$IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(b - Ax) : x \in X\}.$$

$$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(u) : u \geq 0\}.$$

Caso \leq

$$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \leq d \text{ e } x \in X\}.$$

$$IP(v) \equiv z(v) = \min\{c(x) + v(d - Dx) : x \in X\}.$$

$$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(v) : v \leq 0\}.$$

Caso $=$

$$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Tx = t \text{ e } x \in X\}.$$

$$IP(y) \equiv z(y) = \min\{c(x) + y(t - Tx) : x \in X\}.$$

$$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(y) : y \text{ livre } \}.$$

■ Quão bom é o limite da relaxação Lagrangeana?

Considere-se

$$(P) \equiv z = \min c(x)$$
$$\text{s.a: } Ax \geq b \implies \text{A relaxar}$$
$$x \in X$$

e

$$(DL) \equiv w^{DL} = \max_{u \geq 0} IP(u)$$

com

$$IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(b - Ax) : x \in X\}.$$

Proposição

$$w^{DL} \geq z^{LR}$$

■ O valor da relaxação lagrangeana é melhor ou igual ao valor da relaxação linear. \implies
A igualdade obtém-se quando os pontos extremos de X são inteiros.

- ▶ Para obter o melhor valor possível para os multiplicadores de Lagrange é necessário resolver o problema dual Lagrangeano, que é não-linear.
 - Resolvido com métodos específicos. \implies Método do subgradiente.
- ▶ É possível relaxar simultaneamente vários conjuntos de restrições.
 - Temos tantos multiplicadores de Lagrange quantas restrições a relaxar.

Exemplo:

$$(P) \equiv \min\{c(x) : Ax \geq b, Dx \geq d, x \in X\}$$

$$z(u_1, u_2) = \min\{c(x) + u_1(b - Ax) + u_2(d - Dx) : x \in X\}$$

$$w^{DL} = \max\{z(u_1, u_2) : u_1, u_2 \geq 0\}$$

Motivação

Introdução

Relaxações

Resolução exata de problemas de otimização combinatória

Algoritmo de *branch-and-bound*

Algoritmo de planos de corte de Gomory

Técnicas de melhoria

Seja

$$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : x \in S\}.$$

Ideia geral: decompor S em conjuntos “mais pequenos” e resolver o PLI nesses conjuntos.

Proposição

Seja $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{|K|}$ uma decomposição de S e seja $z^k = \min\{c(x) : x \in S_k\}$, $k \in K$. Então,

$$z = \min_{k \in K} \{z^k\}.$$

Algoritmos de enumeração

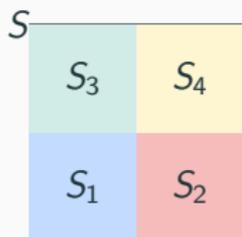
- Caso S_k não seja de resolução mais fácil pode ser decomposto, isto é,

$$S_k = S_{k_1} \cup S_{k_2} \cup \dots$$

- Este processo pode ser repetido até todos os subproblemas serem resolvidos. \implies Pesquisa em árvore.

- Como decompor S em subconjuntos S_1, \dots, S_k ?

- ▶ Os conjuntos S_1, \dots, S_k devem ser uma partição de S .



- ▶ A forma mais simples é particionar S em dois subconjuntos S_1 e S_2 .

■ Variáveis binárias

Seja x_i uma variável binária, isto é, $x_i \in \{0, 1\}$.

O conjunto S pode ser particionado em:

▶ $S_1 = \{x \in S : x_i = 0\}$

▶ $S_2 = \{x \in S : x_i = 1\}$

■ Variáveis inteiras

Seja x_i uma variável com valor fracionário, isto é, $x_i = \alpha \notin \mathbb{Z}$.

O conjunto S pode ser particionado em:

▶ $S_1 = \{x \in S : x_i \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$

▶ $S_2 = \{x \in S : x_i \geq \lceil \alpha \rceil\}$

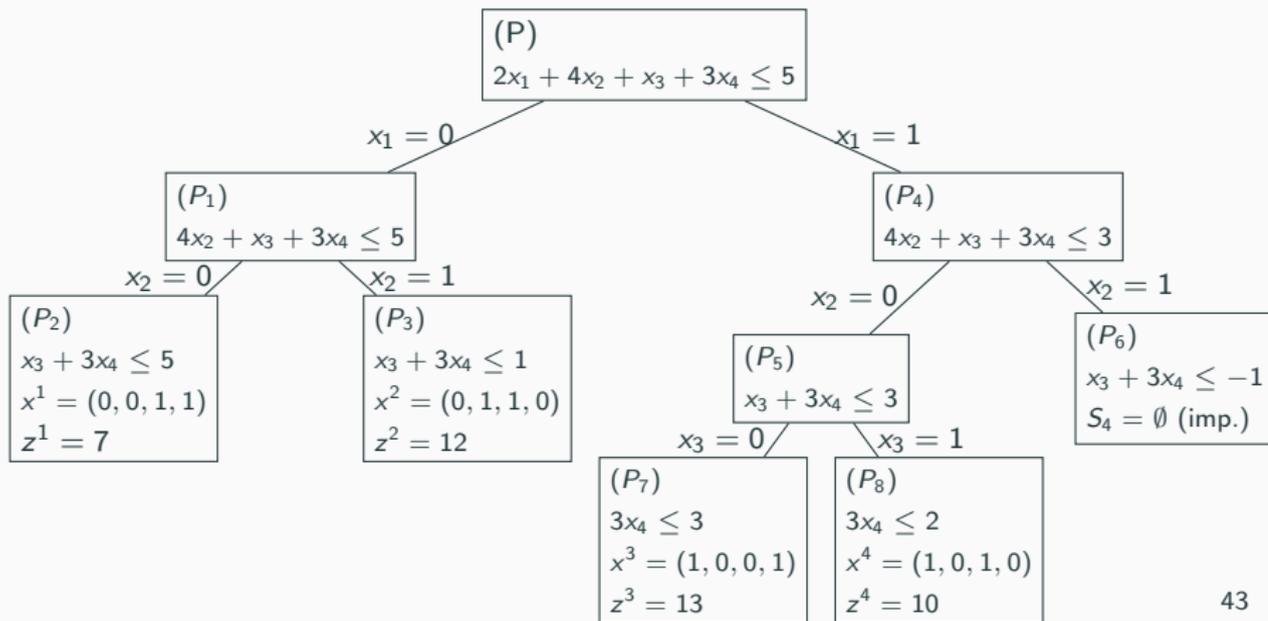
Podemos ir decompondo os conjuntos sucessivamente. \implies **Árvore de enumeração.**

Exemplo

$(P) \equiv \max 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4$ Problema saco-mochila

s.a: $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$



Algoritmos de enumeração

■ A cada nodo k está associado um problema P_k e um conjunto S_k , que é a RA de P_k .

- ▶ Se P_k é obtido de P_j através de uma ramificação diz-se que k é filho de j .
- ▶ Se P_k é obtido de P_j através de uma sequência de ramificações diz-se que k é descendente de j .
- ▶ Temos $v(P_j) \leq v(P_k)$, para todo o descendente k de j .
 - Relação válida para problemas de minimização.
- ▶ Temos $v(P_j) \geq v(P_k)$, para todo o descendente k de j .
 - Relação válida para problemas de maximização.

Nota: Cada vez que ramificamos estamos a adicionar restrições e, consequentemente, a piorar o valor da solução ótima dos subproblemas.

- Como se relaciona z com os limites nos valores de z^k ?

Proposição

Seja:

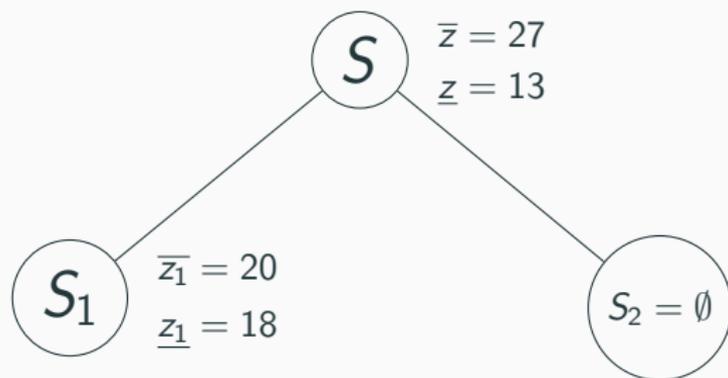
- $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_K$ uma decomposição de S ;
- $z^k = \min\{c(x) : x \in S_k\}$, $k = 1, \dots, K$;
- \bar{z}^k um limite superior para z^k ; e
- \underline{z}^k um limite inferior para z^k .

Então, $\bar{z} = \min_{k=1, \dots, K} \{\bar{z}^k\}$ é um limite superior para z e $\underline{z} = \min_{k=1, \dots, K} \{\underline{z}^k\}$ é um limite inferior para z .

- Podemos usar a proposição anterior para reduzir o tamanho da árvore de enumeração.

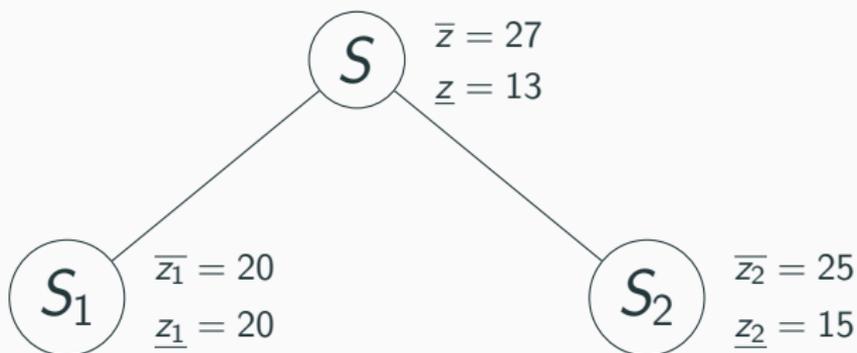
- Um nodo k pode ser cancelado (**não ramificado**) em três situações:
 1. o problema é impossível, $S_k = \emptyset$;
 2. a solução obtida é admissível para o problema original P ; ou
 3. é possível provar que P_k não contém a solução ótima (ou soluções melhores que a melhor solução conhecida para P).

Problema de minimização



O problema P_2 é impossível, não é necessário ramificá-lo. \implies Corte por impossibilidade.

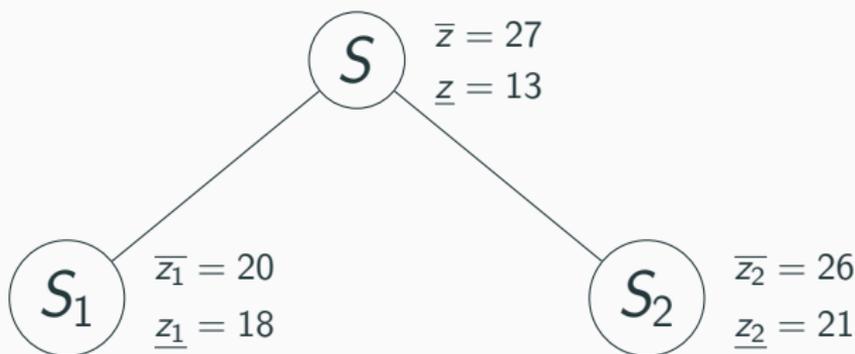
Problema de minimização



Como o limite superior e inferior de P_1 são iguais ($\bar{z}_1 = \underline{z}_1 = 20$) obtivemos o seu valor ótimo e por isso não é necessário ramificá-lo. \implies Corte por otimalidade.

Algoritmo de branch-and-bound

Problema de minimização



O valor ótimo de P_2 é pelo menos 21, enquanto o valor ótimo de S_1 é no máximo 20. Assim, como a partir de P_2 vamos sempre obter soluções piores que as de P_1 podemos não explorá-lo mais. \implies Corte por limite.

Algoritmo de branch-and-bound

- É um algoritmo de enumeração!
- Como resolver os subproblemas?
- ▶ É resolvida a sua relaxação linear.
- Notação:

$$(P) \equiv z = \min\{c(x) : x \in X\}$$

$$(P_k) \equiv z_k = \min\{c(x) : x \in X_k\}$$

L Lista de problemas por resolver

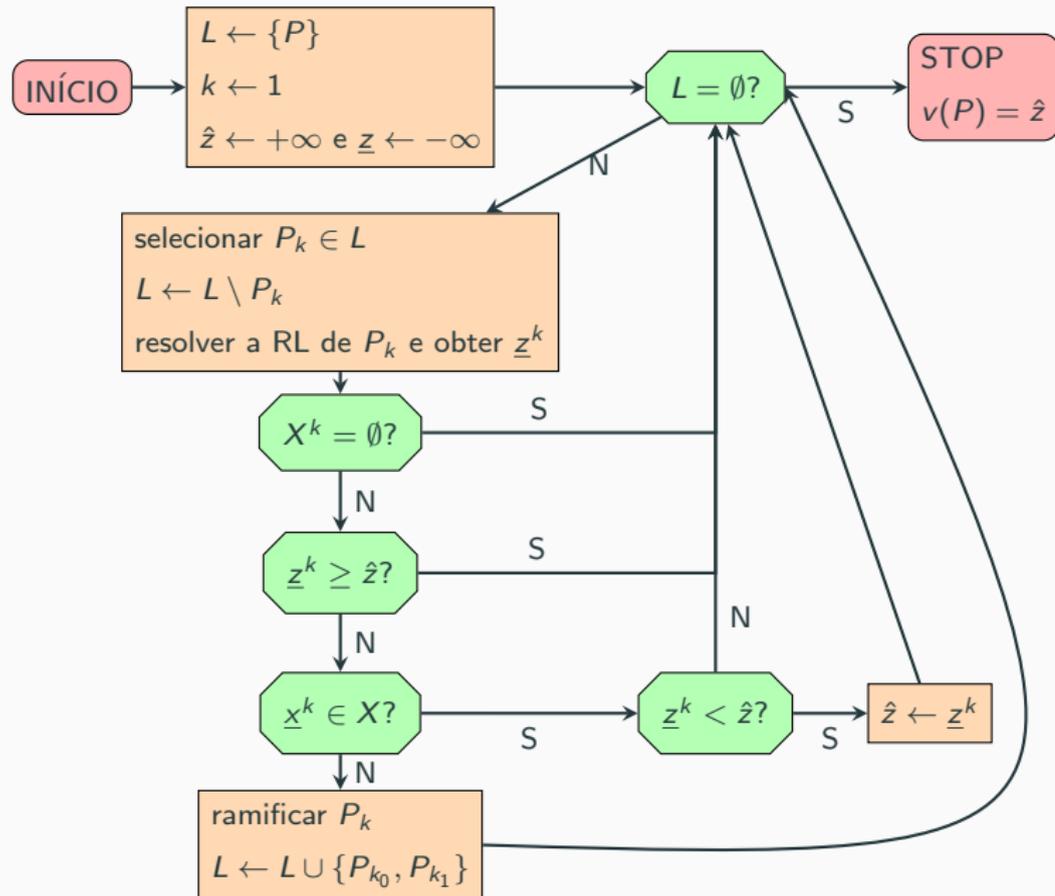
\hat{z} valor da melhor SA conhecida - **incumbente**.

Caso não tenha sido determinada nenhuma SA, $\hat{z} = +\infty$.

\underline{z}^k minorante de z^k .

Temos $\underline{z}^k = -\infty$ se P_k impossível e $\underline{z}^k = z^k$ caso contrário.

Algoritmo de branch-and-bound



Exemplo

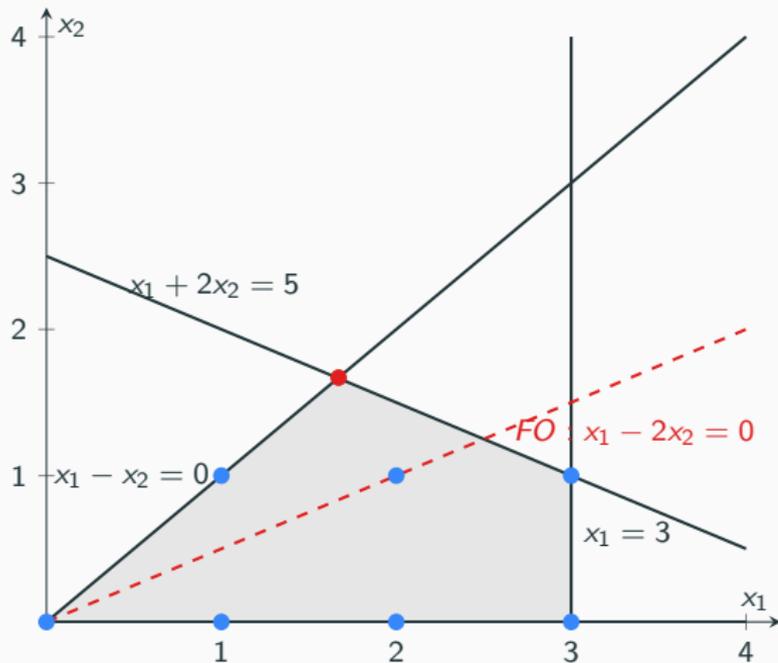
$$(P) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a. : } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 3$$

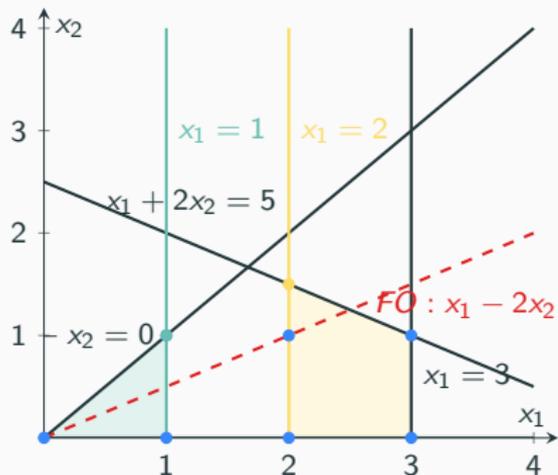
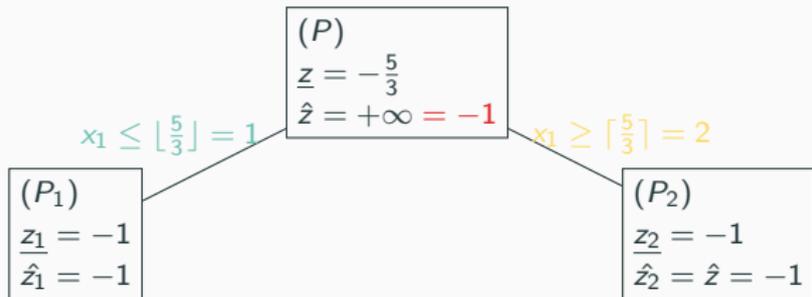
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$



Resolvendo a relaxação linear:

$$x_{RL} = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ e } z = \frac{5}{3} - 2 \times \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

Exemplo

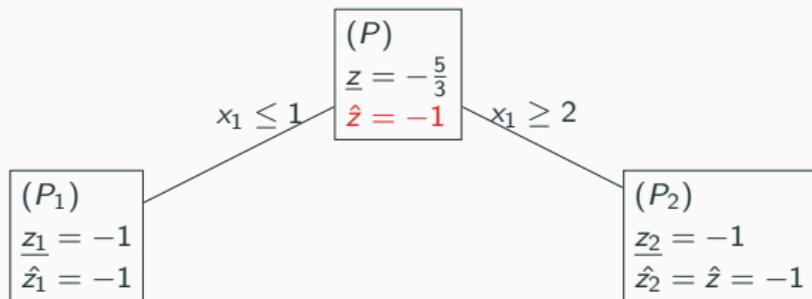


▶ (P₁) : $x_1^* = (1, 1)$ e $\underline{z}_1 = \bar{z}_1 = -1$

▶ (P₂) : $x_2^* = (2, \frac{3}{2})$ e $\underline{z}_2 = -1$

■ Não é preciso ramificar mais a partir de P₁ pois já encontramos uma SA. Podemos atualizar o majorante.

Exemplo



Como o minorante de P_2 é igual a \hat{z} podemos cancelar o nodo pois não vai conter a SO. **Todas as soluções de descendentes de P_2 vão ter valor pior ou igual que -1.**

■ Estratégias de ramificação e pesquisa

▶ Como ramificar?

- Escolher a variável fracionária com valor α mais próximo de $\lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{2}$ na relaxação linear (variável “mais fracionária”).
- Escolher a variável fracionária com o índice mais baixo.

▶ Como selecionar o subproblema?

- Pesquisa em profundidade.
Escolher um dos últimos problemas criados. \implies Descer rapidamente na árvore de pesquisa de modo a encontrar rapidamente uma solução admissível.
- Seleção do melhor nodo.
Escolher o problema em aberto com maior valor de \underline{z}^k .

▶ Estratégias de redução do número de nodos da árvore

- Utilizar heurísticas para determinar soluções admissíveis (majorantes).
- Se os coeficientes da função objetivo são inteiros, z só toma valores inteiros para soluções admissíveis. Neste caso os minorantes \underline{z}^k podem ser substituídos por $\lceil \underline{z}^k \rceil$.
- Tentar melhorar a qualidade dos minorantes.

■ O algoritmo de branch-and-bound pode ser utilizado como uma heurística.

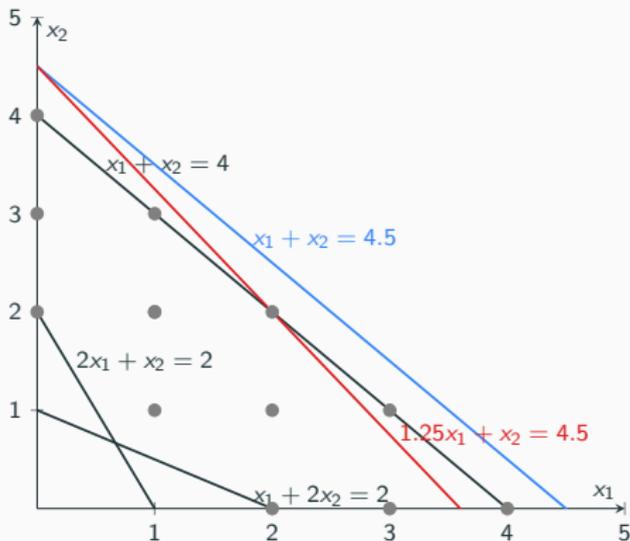
⇒ Por exemplo, parando o algoritmo quando uma SA for encontrada.

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Uma *desigualdade válida* para X é uma desigualdade $\pi_1 x_1 + \dots + \pi_n x_n \leq \pi_0$ ($\pi x \leq \pi_0$) que é satisfeita por todos os pontos de X .

Exemplo

Seja $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. \implies
Pontos cinzentos no gráfico.



A desigualdade $x_1 + x_2 \leq 4.5$ é uma desigualdade válida para X .

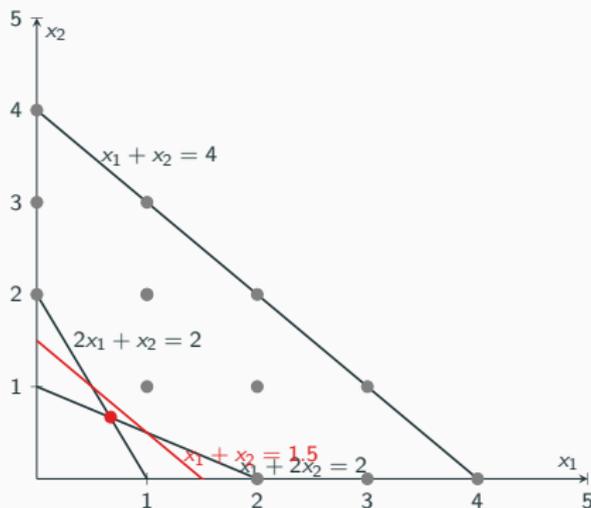
A desigualdade $1.25x_1 + x_2 \leq 4.5$ não é uma desigualdade válida para X . \implies Os pontos (3, 1) e (4, 0) pertencem a X e não satisfazem a desigualdade.

Definição

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $x^* \notin X$. Uma desigualdade válida para X não satisfeita por x^* , diz-se um *plano de corte*.

Exemplo

Seja $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. \implies
Pontos cinzentos no gráfico.



A desigualdade $x_1 + x_2 \geq 1.5$ é um plano de corte para $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, que é a SO da relaxação linear do problema

$$\min\{3x_1 + 2x_2 : (x_1, x_2) \in X\}.$$

■ Esta é a ideia geral do algoritmo de planos de corte de Gomory.

Seja

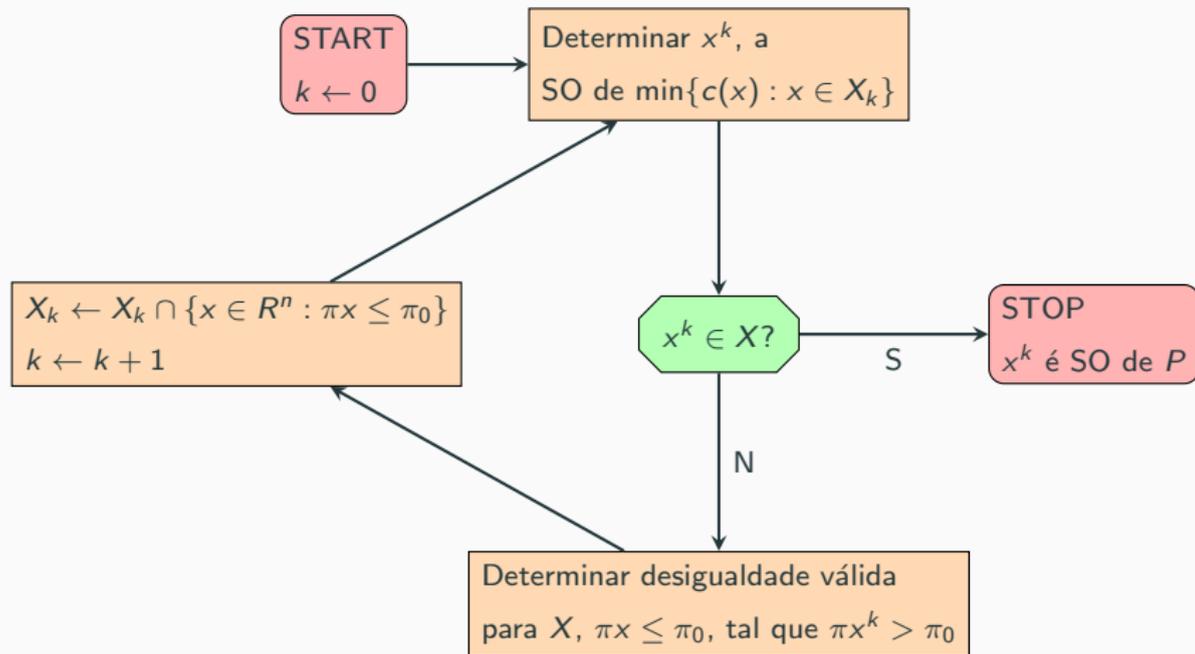
$$(P) \equiv \min\{c(x) : x \in X\},$$

com $X = \{x \in R^n : Ax \geq b \text{ e } x_j \text{ inteiro, para } j \in J\}$ sendo J um subconjunto de $\{1, \dots, n\}$.

Ideia geral: resolver uma sucessão de relaxações lineares até à solução obtida estar em X . Cada relaxação linear é obtida da anterior acrescentando-lhe planos de corte.

Algoritmo de planos de corte de Gomory

Seja $\bar{X}_0 = \{x \in R^n : Ax \geq b\}$ (X sem as restrições de integralidade).



Algoritmo de planos de corte de Gomory

Como determinar planos de corte para a SO da relaxação linear?

- ▶ Procedimento de geração de cortes de Gomory, que é válido para qualquer PLIM

■ Procedimento de geração de cortes de Gomory

Seja

$$(P) \equiv z = \min\{c(x) : Ax \geq b, x \geq 0 \text{ e inteiros}\}.$$

Passo 1: Resolver a relaxação linear de P .

Passo 2: Escrever o sistema $Ax \geq b$ na forma aumentada.

Passo 3: Rescrever o sistema em função das VB da SO, isto é, $x_i + \sum_{j \in VNB} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$ para toda a VB x_i .

Passo 4: O corte de Gomory é obtido através do seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} x_i + \sum_{j \in VNB} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i &\implies x_i + \sum_{j \in VNB} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i \implies x_i + \sum_{j \in VNB} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor \\ \implies \sum_{j \in VNB} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j &\geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \end{aligned}$$

Definição

O corte de Gomory é $\sum_{j \in VNB} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$.

Exemplo

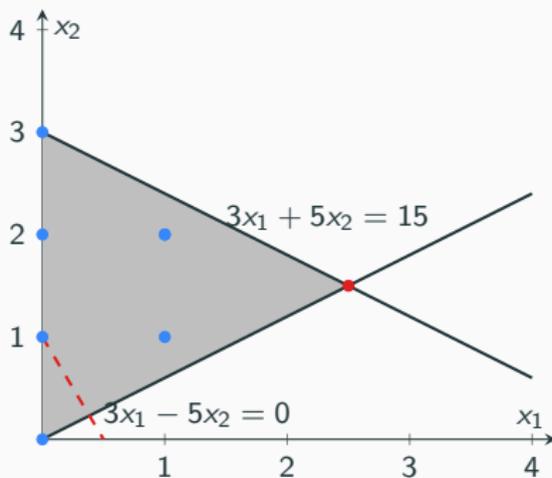
$$(P) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a: } 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

■ Resolvendo a relaxação linear de P obtém-se $x^0 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.



- Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

- A solução na forma aumentada é $x^0 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$ e tem como VBs x_1 e x_2 .

Exemplo

■ Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases} & \iff & \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ 3(\frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3) + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} - \\ 5x_2 - x_3 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases} & \iff & \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}(\frac{15}{10} + \frac{1}{10}x_3 - \frac{1}{10}x_4) - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{15}{10} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{15}{10} \end{cases} & \iff & \begin{cases} x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{5}{2} \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Como ambos os \bar{b}_i são fracionários podemos escolher qualquer restrição para gerar um corte de Gomory. \implies Vamos escolher a linha do x_1 .

$$\left(\frac{1}{6} - 0\right)x_3 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)x_4 \geq \left(\frac{5}{2} - 2\right) \iff \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Exemplo

■ Temos que escrever o corte $\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.

■ Da forma aumentada de P tiramos que:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -3x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \iff x_4 = 15 - 3x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

■ Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{1}{6}(-3x_1 + 5x_2) + \frac{1}{6}(15 - 3x_1 - 5x_2) \geq \frac{1}{2} \\ \iff -\frac{3}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{15}{6} - \frac{3}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 \geq \frac{1}{2} &\iff -x_1 \geq -\frac{12}{6} \iff x_1 \leq 2 \end{aligned}$$

Exemplo

$$(P^1) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$

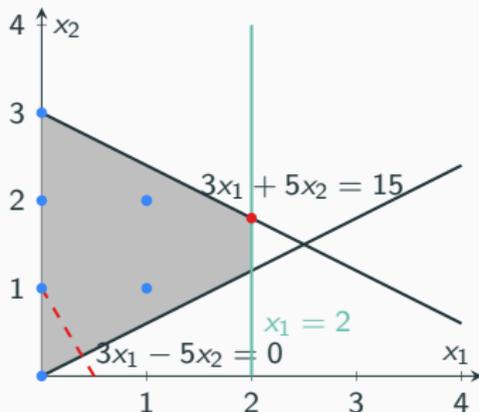
$$\text{s.a: } 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

■ Resolvendo a relaxação linear de P^1 obtém-se $x^1 = (2, \frac{9}{5})$.



Exemplo

■ Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$

■ A solução na forma aumentada é $x^1 = (2, \frac{9}{5}, 3, 0, 0)$ e tem como VBs x_1 , x_2 e x_3 .

Exemplo

■ Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x_2 = 3 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 2 - x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x_2 = \frac{9}{5} + \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4 \\ - \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3(2 - x_5) - 5(\frac{9}{5} + \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4) + x_3 = 0 \\ - \\ - \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 + x_4 - 6x_5 = 3 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 = \frac{9}{5} \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos escolher a restrição associada a x_2 para gerar um corte de Gomory porque é a única com um \bar{b}_i fracionário.

$$\left(\frac{1}{5} - 0\right)x_4 + \left(-\frac{3}{5} - (-1)\right)x_5 \geq \left(\frac{9}{5} - 1\right) \iff \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5}$$

Exemplo

■ Temos que escrever o corte $\frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.

■ Da forma aumentada de P^1 tiramos que:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \iff x_4 = 15 - 3x_1 - 5x_2 \\ x_1 + x_5 = 2 \iff x_5 = 2 - x_1 \end{cases}$$

■ Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5} &\iff \frac{1}{5}(15 - 3x_1 - 5x_2) + \frac{2}{5}(2 - x_1) \geq \frac{4}{5} \\ &\iff x_1 + x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Exemplo

$$(P^2) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a: } 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$

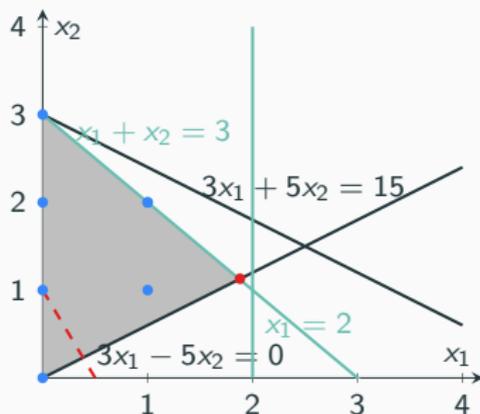
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

■ Resolvendo a relaxação linear de P^1 obtém-se $x^2 = (\frac{15}{8}, \frac{9}{8})$.



Exemplo

■ Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3 \end{array} \right.$$

■ A solução na forma aumentada é $x^2 = (\frac{15}{8}, \frac{9}{8}, 0, \frac{30}{8}, \frac{1}{8}, 0)$ e tem como VBs x_1, x_2, x_4 e x_5 .

Exemplo

■ Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3 \end{array} \right. \iff \dots \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 = \frac{15}{8} \\ \frac{2}{8}x_3 + x_4 - \frac{30}{8}x_6 = \frac{30}{8} \\ -\frac{1}{8}x_3 + x_5 - \frac{5}{8}x_6 = \frac{1}{8} \\ x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_6 = \frac{9}{8} \end{array} \right.$$

Como todos os \bar{b}_i são fracionários podemos escolher qualquer restrição para gerar um corte de Gomory. \Rightarrow Vamos escolher a linha do x_1 .

$$\left(\frac{1}{8} - 0\right)x_3 + \left(\frac{5}{8} - 0\right)x_6 \geq \left(\frac{15}{8} - 1\right) \iff \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8}$$

Exemplo

■ Temos que escrever o corte $\frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.

■ Da forma aumentada de P^2 tiramos que:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 & \iff x_3 = -3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3 & \iff x_6 = 3 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

■ Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8} & \iff \frac{1}{8}(-3x_1 + 5x_2) + \frac{5}{8}(3 - x_1 - x_2) \geq \frac{7}{8} \\ & \iff x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Exemplo

$$(P^3) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a: } 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$

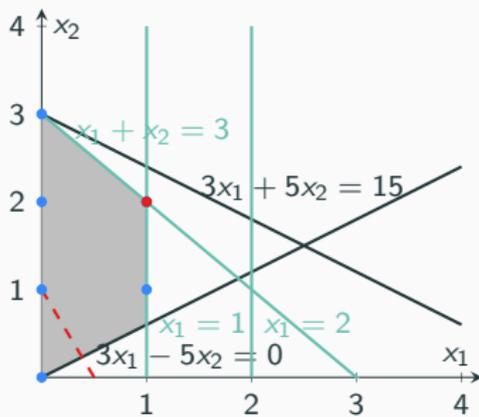
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$x_1 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

■ Resolvendo a relaxação linear de P^3 obtém-se $x^3 = (1, 2)$. Como x^3 é inteira é a SO de P . Logo, $z = 2 \times 1 + 2 = 4$. \implies **FIM**.



■ Para melhorar o desempenho dos algoritmos apresentados existem algumas técnicas que podemos adotar.

▶ Pré-processamento.

- Fixar variáveis e/ou melhorar limites superiores e inferiores de variáveis.
- Remover restrições e/ou variáveis redundantes.
- Melhorar coeficientes/termos independentes de restrições.

▶ Adição de desigualdades válidas.

- Juntar restrições que são redundantes para P mas que melhoram o valor da relaxação linear.

- **Ideia geral:** simplificar a formulação inicial.
- Algumas das técnicas utilizadas são:
 - ▶ Fixação de variáveis.
 - ▶ Eliminação de restrições redundantes.
 - ▶ “Fortelecer” restrições de forma a reduzir a RA do PLR.
- As técnicas utilizadas **não podem** cortar soluções admissíveis para o problema.
- Os softwares que resolvem problemas de PLIM aplicam algumas destas técnicas.

■ Fixação de variáveis

- ▶ É possível fixar o valor de algumas variáveis observando apenas as restrições do modelo.

■ Exemplos:

Considere-se x_1 , x_2 e x_3 variáveis binárias. $\implies x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3$.

1. $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \implies x_1 = 0$
2. $x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \implies x_3 = 0$
3. $5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \implies x_1 = 0$
4. $x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \implies x_2 = 1$
5. $3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \implies x_3 = 0$ e $x_1 = 1$

- Ao fixarmos o valor de uma variável devemos substituí-la na formulação.

■ Remoção de restrições redundantes

Definição

Considere-se $\pi x \leq \pi_0$ e $\mu x \leq \mu_0$ duas desigualdades válidas para X . Dizemos que $\pi x \leq \pi_0$ *domina* $\mu x \leq \mu_0$ se existe uma constante $u \in \mathbb{R}$ tal que $\pi \geq u\mu$, $\pi_0 \leq u\mu_0$ e $(\pi, \pi_0) \neq (u\mu, u\mu_0)$.

Definição

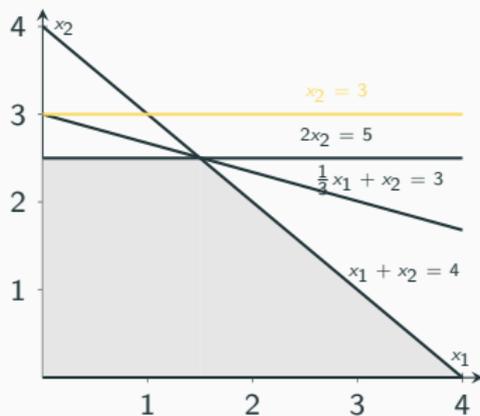
Uma desigualdade válida $\pi x \leq \pi_0$ é *redundante* para X se existem $k \geq 2$ restrições de P da forma $\mu^i x \leq \mu_0^i$ e pesos $u_i \geq 0$ com $i = 0, \dots, k$ tais que $(\sum_{i=1}^k u_i \mu^i) x \leq \sum_{i=1}^k u_i \mu_0^i$ domina $\pi x \leq \pi_0$.

■ Uma restrição redundante não é necessária para o modelo, podendo ser removida.

Exemplo

Seja

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 \leq 5, \frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 4 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}.$$



- ▶ A desigualdade $x_2 \leq 3$ é dominada por $2x_1 \leq 5 \iff x_2 \leq \frac{5}{2}$, pois o lado esquerdo é igual e $\frac{5}{2} < 3$.
- ▶ A desigualdade $(1/3)x_1 + x_2 \leq 3$ é redundante para X pois pode ser obtida como uma combinação linear de $2x_1 \leq 5$ e $x_1 + x_2 \leq 4$, isto é,

$$(1/3)(2x_1 \leq 5) + (1/3)(x_1 + x_2 \leq 4) \iff (1/3)x_1 + x_2 \leq 3$$

- O conjunto X é o mesmo sem a restrição $(1/3)x_1 + x_2 \leq 3$.

■ Fortalecimento de restrições

- ▶ Em certos casos, é possível apenas por inspeção tornar as restrições mais fortes.
- ▶ Existem algoritmos para tornar mais fortes restrições com variáveis binárias.

■ Exemplos (por inspeção):

Sejam x_1 e x_2 variáveis inteiras não negativas e y_1 e y_2 variáveis binárias.

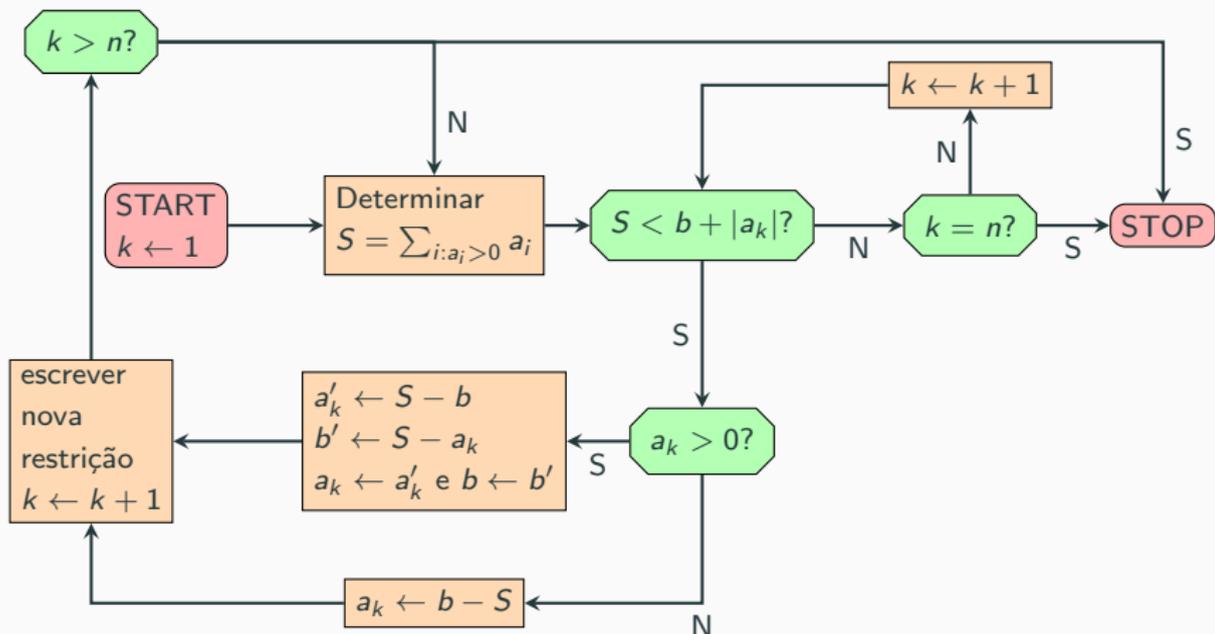
1. $x_1 + x_2 \leq 2.5 \implies x_1 + x_2 \leq 2$
2. $4y_1 + 3y_2 \leq 4 \implies y_1 + y_2 \leq 1$
3. $x_1 \leq 3$ e $x_1 \leq My_1$, com M suficientemente grande \implies
 $x_1 \leq 3$ e $x_1 \leq 3y_1$

Pré-processamento

■ Algoritmo para fortalecer restrições com variáveis binárias

Considere-se uma restrição de \leq com variáveis binárias, isto é,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b, \quad x_i \in \{0, 1\}, i = 1 \dots n.$$



Exemplo

■ Fortalecer a restrição $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$, com $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

■ $k = 1$

▶ $S = 4 + 1 + 2 = 7$

▶ $S = 7 < b + |a_1| = 5 + 4 = 9$? Sim.

– $a_1 = 4 > 0$? Sim.

– $a'_1 \leftarrow 7 - 5 = 2$, $b' \leftarrow 7 - 4 = 3$

– Nova restrição: $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$

■ $k = 3$

▶ $S = 2 + 1 + 2 = 5$

▶ $S = 5 < b + |a_3| = 3 + 1 = 4$? Não.

▶ $3 = 4$? Não.

■ $k = 2$

▶ $S = 2 + 1 + 2 = 5$

▶ $S = 5 < b + |a_2| = 3 + 3 = 6$? Sim.

– $a_2 = -3 > 0$? Não.

– $a_2 \leftarrow 3 - 5 = -2$

– Nova restrição: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$

■ $k = 4$

▶ $S = 2 + 1 + 2 = 5$

▶ $S = 5 < b + |a_4| = 3 + 2 = 5$? Não.

▶ $4 = 4$? Sim. FIM.

■ A restrição fortalecida é $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$.

- Uma forma de tornar os algoritmos apresentados mais eficientes é “aproximando” a RA do PLR com o invólucro convexo do problema original.
⇒ Feito através da adição de desigualdades válidas, que cortem soluções fracionárias.

- Existem várias formas de obter desigualdades válidas para um problema.
 - ▶ Algoritmos de geração de desigualdades válidas. ⇒ Algoritmo de Chavátal-Gomory.
 - ▶ Desigualdades válidas baseadas nas especificidades do problema. ⇒ Famílias de desigualdades válidas.
 - Por exemplo, desigualdades de cobertura para o problema do saco-mochila.

Adição de desigualdades válidas

Considere-se o caso geral do problema do saco-mochila

$$\max\{c(x) : x \in X\},$$

com

$$X = \{x \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}.$$

Definição

Uma *cobertura* é um subconjunto de artigos $S \subseteq N$ que não cabem todos na mochila, isto é,

$$\sum_{i \in S} a_i > b.$$

Definição

Sendo S uma cobertura, uma desigualdade válida - *desigualdade cobertura* - para o problema do saco-mochila é

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1.$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \max z &= 32x_1 + 20x_2 + 19x_3 + 13x_4 + 11x_5 + 8x_6 \\ \text{s.a: } &12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 14 \\ &x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

► Resolvendo (Solver) a relaxação linear do problema apresentado obtemos $z^{PLR} = 37.6$. \implies Quando temos variáveis binárias é necessário adicionar as restrições $x_i \leq 1$ à relaxação linear.

■ Desigualdades de cobertura para a instância apresentada são, por exemplo:

1. $x_1 + x_2 \leq 1$
2. $x_1 + x_3 \leq 1$
3. $x_1 + x_6 \leq 1$
4. $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$
5. $x_2 + x_3 \leq 1 \implies$ **Domina a desigualdade 4.**

Adicionando estas desigualdades válidas à relaxação linear obtemos $z^{PLR^+} = 37.4$.

- ▶ Apesar de alguns softwares aplicarem técnicas de pré-processamento, devemos tentar sempre dar ao software uma formulação o mais “simplicada” possível. \implies Temos conhecimento sobre o nosso problema que o *solver* não tem.
- ▶ Uma técnica não abordada neste capítulo são as restrições de quebra de simetria.

-  Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* Mc Graw-Hill, New York, USA, 11th edition.
-  Wolsey, L. A. (1998). *Integer programming*. John Wiley & Sons