Simulação e Otimização

Capítulo 1: Técnicas de resolução de problemas de otimização combinatória

Ano letivo 2025/2026

1. Considere os seguintes problemas de PLIM.

(a)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:}\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a:}\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq -2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:}\ & \frac{2}{3}x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:}\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$$

Indique, justificando, quais são os problemas que formam um par (problema original, relaxação).

2. Considere os seguintes problemas de PLI:

(a)

$$\begin{aligned} \max\ & 5x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a:}\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min\ & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:}\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Resolva a sua relaxação linear e indique o que pode concluir sobre o seu valor ótimo.

3. Indique uma relaxação, que não seja a linear, do seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a:}\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. Escreva a relaxação lagrageana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (*).

(a)

$$\begin{aligned} \max z = {} & 16x_1 + 10x_2 + 4x_4 \\ \text{sujeito a: } & 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \qquad (*) \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min z = {} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + 5x_2 \geq 3 \qquad (*) \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \qquad (*) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

5. Resolva os problemas relaxados do exercício anterior considerando os seguintes multiplicadores de lagrange.

(a)
   i. $u = 2$
   ii. $u = 0,5$
   iii. $u = 1$
   iv. $u = 6$

(b)
   i. $u = (1, 1)$
   ii. $u = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$
   iii. $u = (0, 1)$
   iv. $u = (0, \frac{1}{2})$

Indique, em cada alínea, o valor do melhor limite encontrado.

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

$$\begin{aligned} \min z = {} & 7x_{11} + 8x_{12} + 3x_{21} + 5x_{22} + 7x_{31} + 9x_{32} + 150y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\ \text{s. a: } & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 41 \qquad (*) \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 55 \\ & x_{11} + x_{12} \leq 38y_1 \qquad (*) \\ & x_{21} + x_{22} \leq 32y_2 \\ & x_{31} + x_{32} \leq 30y_3 \\ & y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3 \\ & x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

   (a) Atribuindo valores admissíveis aos multiplicadores de Lagrange defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com $(*)$. Relacione o valor ótimo do problema resolvido com o valor ótimo do problema inicial (sem o resolver).
   (b) Escreva o enunciado de um problema que pudesse dar origem ao modelo apresentado e defina as variáveis de forma compatível.
   (c) Escreva um enunciado para uma nova restrição que inclua apenas as variáveis binárias e escreva a restrição correspondente a adicionar ao modelo inicial.

7. Considere o seguinte PLI

$$z = \max\{c(x) : Ax \geq b,\ Dx \leq d,\ Tx = t,\ x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Deduza as expressões da relaxação lagrangeana e do problema dual lagrangeano considerando que todos os conjuntos de restrições (à exceção das restrições que definem X) devem ser relaxados.

8. Considere o seguinte PLI.

$$
\begin{aligned}
(P) \equiv \max z = x_1 + 10x_2 & \\
\text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

   (a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P).
   (b) Considere a relaxação Lagrangeana obtida relaxando a primeira restrição $4x_1 + x_2 \leq 4$.
      i. Resolva para os seguintes valores dos multiplicadores: 0, $\frac{1}{4}$, 4.
      ii. Determine a função dual Lagrangeana.
      iii. Resolva o problema dual Lagrangeano. O que pode concluir sobre a solução ótima de P?
   (c) Considere a relaxação Lagrangeana obtida relaxando a segunda restrição $x_1 + 2x_2 \leq 3$.
      i. Mostre que satisfaz a propriedade da integralidade.
      ii. Determine o valor ótimo do problema dual Lagrangeano.

9. Escreva o algoritmo de *branch-and-bound* considerando que P é um problema de maximização.

10. Resolva utilizando o algoritmo de *branch-and-bound* os seguintes PLIs, considerando as seguintes regras de ramificação: (i) Ramificando a variável de menor índice, e (ii) Ramificando a variável mais fracionária.

   (a)

$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.a: } -x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\
x_1 - x_2 &\leq 16 \\
4x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
\min z = 5x_1 + x_2 & \\
\text{s.a: } 5x_1 - x_2 &\geq 7 \\
x_1 + x_2 &\geq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

11. Considere o seguinte problema de PLI:

$$
\begin{aligned}
\min z = 21x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 & \\
\text{s.a: } 1.4x_1 - 2.3x_2 + 2.4x_3 + 2.2x_4 &\geq 33.3 \\
-0.5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &\geq 5 \\
-x_1 - 0.8x_2 + 2.5x_3 - 3.5x_4 &\geq 15 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

   Resolva recorrendo ao algoritmo de branch-and-bound, considerando como critério de paragem "resolver não mais de dez subproblemas", e ramificando escolhendo sempre a variável de índice mais baixo. Indique a melhor SA encontrada e indique o valor ótimo ou, caso não o tenha encontrado, enquadre-o utilizando os melhores valores possíveis para o minorante e o majorante. Nota: Utilize o Solver do Excel para resolver as relaxações lineares dos subproblemas.

12. Considere o seguinte problema de PLI

$$
\begin{aligned}
(P) \equiv \max z(u) = x_1 - x_2 & \\
\text{s.a: } 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\
6x_1 + 10x_2 &\geq 15 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

   (a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P). O que pode concluir acerca do valor ótimo de (P)?

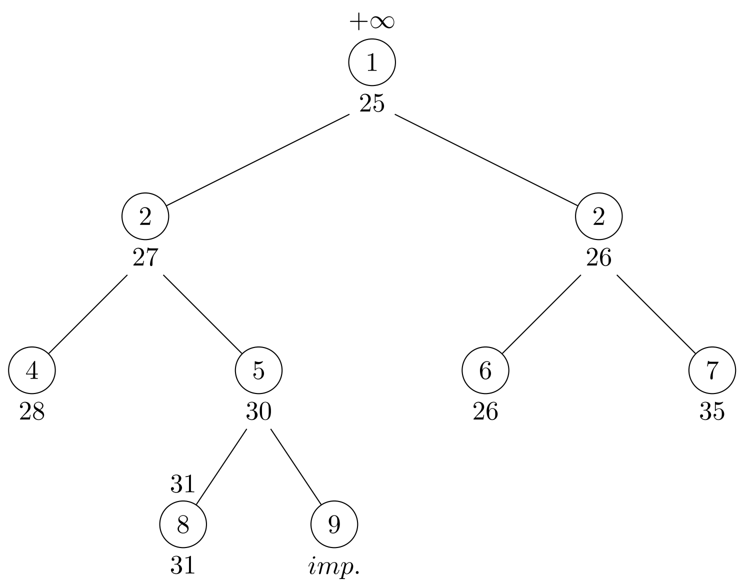
(b) Resolva (P) com o algoritmo de branch-and-bound.

(c) Seja $u \geq 0$. Considere

$$
\begin{aligned}
(P_u) \equiv \max z = & x_1 - x_2 + u(3 - 2x_1 + x_2) \\
\text{s.a: } & 6x_1 + 10x_2 \geq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Mostre que $v(P_u) \geq v(P)$. Determine $v(P_u)$ para u igual a 0, $\frac{1}{2}$ e 1.

13. Considere a seguinte árvore de enumeração para um problema de minimização, onde se indicam os limites inferiores para os subproblemas associados a cada nodo, bem como limites superiores para alguns dos subproblemas.



(a) Indique os melhores limites, inferior e superior, para o valor ótimo do problema, bem como um majorante do desvio da melhor solução em relação ao valor ótimo.

(b) Quais os nodos da árvore apresentada poderiam ser cancelados e quais deveriam estar sujeitos a nova ramificação ?

14. Resolva pelo algoritmo de branch-and-bound os seguintes problemas de PLI. Escolha para ramificar o problema com melhor majorante/minorante (em caso de empate escolha o último problema criado), e a variável fracionária mais próxima de 0.5 (em caso de empate escolha a variável com maior coeficiente na FO).

(a)

$$
\begin{aligned}
\max z = & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a: } & 2x_1 + 5x_2 \leq 25 \\
& x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\min z = & -3x_1 + x_2 \\
\text{s.a: } & 16x_1 - 4x_2 \leq 13 \\
& -3x_1 - 2x_2 \leq -8 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

15. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 10x_2 \\
\text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Indique quais das seguintes desigualdades são válidas para o problema apresentado e, das desigualdades válidas, quais são planos de corte para a solução ótima da relaxação linear.

i. $3x_1 + 4x_2 \leq 6$

ii. $-2x_1 + 2x_2 \leq 1$

iii. $-x_1 + 2x_2 \leq 3$

iv. $x_1 + 3x_2 \leq 4$

16. Resolva os problemas de PLI apresentados de seguida utilizando o algoritmo de planos de corte de Gomory. Represente graficamente os cortes de Gomory obtidos para cada um dos problemas.

(a)

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

17. Considere o seguinte PLI em que x_2 e x_3 são as VBs na SO da sua relaxação linear.

$$\begin{aligned} \min z = {} & 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a: } & 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 27 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Obtenha o valor ótimo da relaxação linear após a introdução de um corte de Gomory. Para gerar o corte de Gomory considere a restrição associada à VB de menor índice. Compare o valor obtido com o valor que obteria se resolvesse o PLI dado. Sem resolver, explique se seria necessário introduzir novo corte.

18. Aplique as técnicas de melhoria aprendidas ao seguinte PLB de forma a obter um problema equivalente com menos restrições funcionais. Se possível, identifique uma SO sem resolver o problema.

$$\begin{aligned} \min z = {} & 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 + x_6 + 6x_7 + x_8 + 4x_9 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_3 - x_7 - x_9 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 + 4x_7 + x_9 \geq 4 \\ & x_6 + x_7 \leq 1 \\ & x_2 + 2x_5 + 3x_8 + 2x_9 \geq 4 \\ & 2x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 3x_8 + x_9 \leq 5 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, 9 \end{aligned}$$

19. Aplique o algoritmo de fortalecimento de restrições com variáveis binárias à restrição $3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1$, com $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$.

20. Encontre dois cortes de cobertura para a seguinte restrição de um problema saco-mochila

$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 12.$$

21. Considere o conjunto

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0,1\} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 36, x_1 \leq 20y_1, x_2 \leq 10y_2, x_3 \leq 10y_3, x_4 \leq 8y_4\}$.

Derive uma restrição válida para X que seja uma restrição saco-mochila.

22. Determine desigualdades válidas para o conjunto de pontos $(x_1, \ldots, x_m, y)$ definidos por

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq my,\ 0 \leq x_i \leq 1,\ y \in \{0,1\}.$$