



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 19 e 20 (Semana 10)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)

- **Capítulo 1:** Análise Descritiva
- **Capítulo 2:** Probabilidades

Aulas TP (Semanas 3 a 6)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas TP (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas TP (Semanas 10 a 12)

- **Capítulo 5:** Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

5. Variáveis aleatórias especiais

5.1. Variáveis aleatórias discretas

5.1.1. A distribuição uniforme discreta

5.1.2. A variável aleatória de Bernoulli

5.1.3. A variável aleatória binomial

5.1.4. A variável aleatória de Poisson

5.2. Variáveis aleatórias contínuas

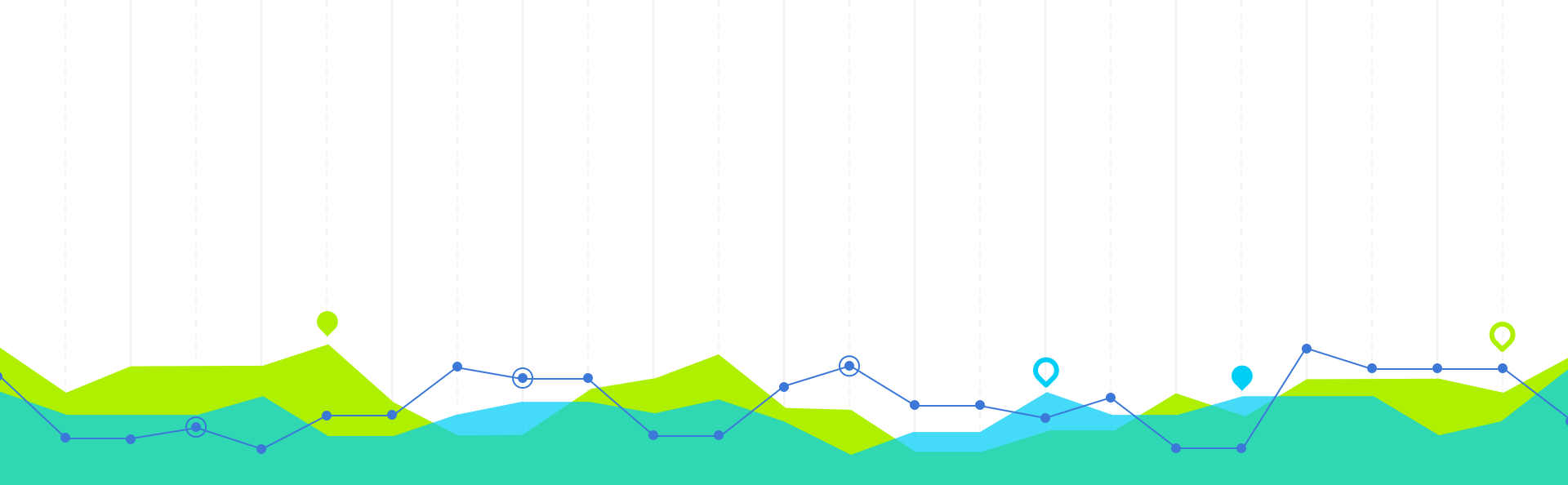
5.2.1. A variável aleatória uniforme contínua

5.2.2. A variável aleatória normal

5.2.3. A variável aleatória exponencial

5.2.4. As variáveis aleatórias gama e chi-quadrado

5.3. O Teorema Limite Central



Distribuição Binomial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

1

1. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, calcule a probabilidade de
- a) existirem somente duas garrafas com prémio.
 - b) receber pelo menos um prémio.



Exercício 1 (a)

X - v.a. n.º garrafas premiadas num conjunto de 15 unidades $\Rightarrow X \sim B(15, 0.05)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 n θ = proporção
garrafas
premiadas

(a)

$$P(X=2) = 0.1348$$

Exercício 1 (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.4633 = 0.5367$$

2. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeitos de controlo, 10 peças. Da experiência passada sabe-se que 80% das peças podem considerar-se “boas”. Calcule a probabilidade de, nas 10 peças, haver mais que 8 peças “boas”.



Exercício 2

X - nº peças boas, num conjunto de 10 $\rightarrow X \sim B(10, 0.8)$, $n = 10$, $\theta = 0.8$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.6242 = 0.3758 \rightarrow \text{máquina}$$

Pela Tabela 1B:

$$P(X > 8) = P(\underbrace{n-X}_{B(10, 0.2)} < 10-8) = P(Y < 2) = P(Y \leq 1) = 0.3758$$

$\downarrow$
 $B(10, 0.2)$

3. Sabe-se, por experiência, que a probabilidade de uma máquina necessitar de ser afinada em cada período de trabalho de 30 minutos é de 0.05 (períodos independentes). Em cada período só pode haver, no máximo uma afinação. Determine:
- a) O número médio de afinações numa semana em que a máquina trabalha 20 horas.
 - b) A probabilidade de em 8 horas de trabalho se verificar pelo menos uma afinação, e a de se verificarem 2 a 5 afinações.



Exercício 3 (a)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se máquina afurada em 30 min} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \rightarrow X \sim B(1, 0.05)$$

(a)

20 horas = $20 \times 2 = 40$ períodos de 30 minutos

Seja $\sum_{i=1}^{40} X_i \rightarrow$ n.º afinações num conjunto de 40 períodos $\rightarrow \sum_{i=1}^{40} X_i \sim B(40, 0.05)$

Então,

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} X_i\right) = 40 \times 0.05 = 2$$

Exercício 3 (b)

8 horas = $8 \times 2 = 16$ períodos de 30 minutos

Seja,

$Y = \sum_{i=1}^{16} X_i \rightarrow$ nº afinações num conjunto de 16 períodos (8 horas) $\rightarrow Y \sim B(16, 0.05)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.4401 = 0.5599$$

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y \leq 5) - P(Y < 2) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 1) = 0.9999 - 0.8108 = 0.189$$

4. A produção de parafusos em certa unidade fabril é assegurada por duas máquinas (M_1 e M_2) de funcionamento independente. Da experiência passada pode concluir-se que a proporção de parafusos com defeito, em cada uma das máquinas, é de 5%. Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de quatro parafusos da máquina M_1 e uma de oito da máquina M_2 .
- a) Calcule a probabilidade de se encontrarem dois parafusos com defeito no conjunto das duas amostras.
 - b) Os parafusos são vendidos em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade de essa garantia ser violada, isto é, de haver mais que dois parafusos defeituosos numa embalagem.



Exercício 4 (a)

X_1 - v.a. n.º para fusos defeituosos num conjunto de 4 unidades de $M_1 \Rightarrow X_1 \sim B(4, 0.05)$

X_2 - v.a. n.º para fusos defeituosos num conjunto de 8 unidades de $M_2 \Rightarrow X_2 \sim B(8, 0.05)$

(a)

$X_1 + X_2 = Y \rightarrow$ v.a. n.º para fusos defeituosos nos dois conjuntos

$$X_1 + X_2 \sim B(4+8, 0.05) \quad (\Rightarrow) \quad Y \sim B(12, 0.05)$$

$$P(Y=2) = 0.0988$$

Exercício 4 (b)

Z - v.a. n.º parafusos defeituosos numa embalagem de 20 unidades $\Rightarrow Z \sim B(20, 0.05)$

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9245 = 0.0755$$

8. Sabe-se que 1% dos parafusos de determinado fabricante são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com a garantia de devolução do valor pago caso existam dois ou mais parafusos defeituosos.

- a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução?
- b) Se se comprar dez caixas, qual a probabilidade de haver devoluções?



Exercício 8 (a)

X - n° parafusos defeituosos numa caixa de 12 unidades $\rightarrow X \sim B(12, 0.01)$

(a)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Exercício 8 (b)

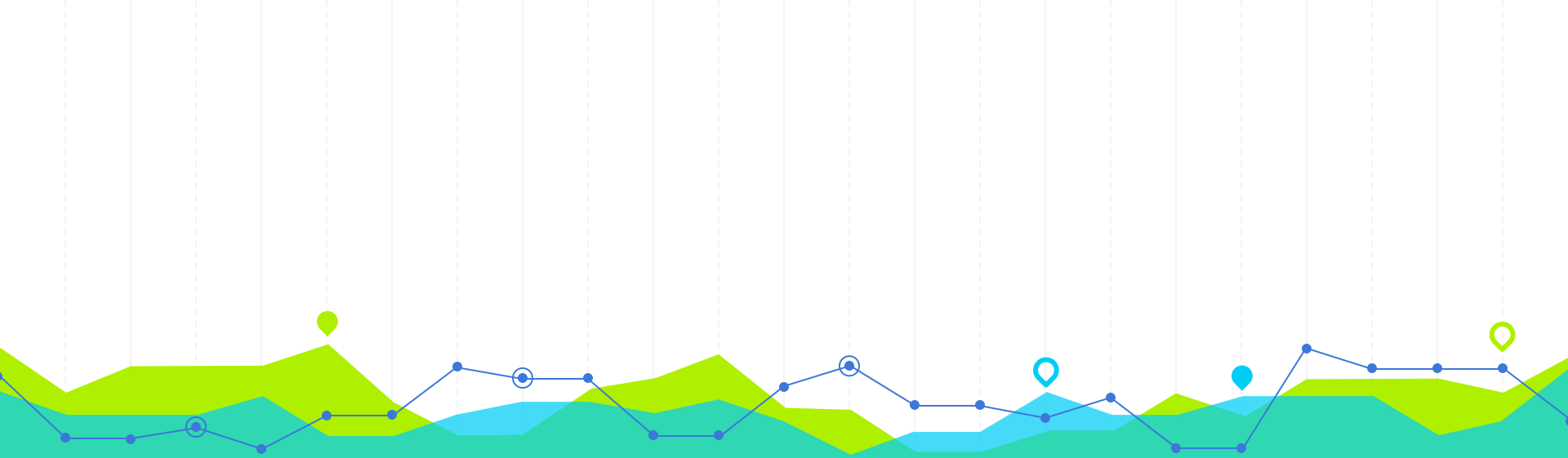
Y - nº de caixas devolvidas, num conjunto de 10

$Y \sim B(10, \theta)$, onde $\theta = P(\text{caixa devolvida}) = P(X \geq 2) = 0.0062$

Logo, $Y \sim B(10, 0.0062)$

Quer-se:

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.9397 = 0.0603$$



Distribuição Poisson

Variáveis Aleatórias Discretas

2

Distribuição de Poisson

Representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória que registra o número de ocorrências num determinado intervalo de tempo ou espaço.

- Carros que passam por minuto num cruzamento, durante uma dada hora do dia.
- Erros tipográficos por página num material impresso.
- Defeitos numa peça fabricada por unidade (m^2 , m, etc).
- Lâmpadas queimadas numa cidade por dia.
- Problemas de filas de espera.

Distribuição de Poisson

Se X é uma v.a. que regista o número de ocorrências num determinado intervalo e a probabilidade de uma ocorrência é independente e a mesma para quaisquer dois intervalos de tempo, então a v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ e a sua função massa de probabilidade é dada por:

Formulário

- **POISSON** $X \sim \text{Po}(\lambda)$, ($\lambda > 0$)

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad E(X) = \lambda \quad ; \quad \text{Var}(X) = \lambda \quad ; \quad M_X(s) = \exp\{\lambda(e^s - 1)\} \quad ; \quad \gamma_1 = \lambda^{-1/2}$$

Propriedades:

- $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$, X_1 e X_2 independentes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- Se $X \sim B(n; \theta)$, com n grande θ pequeno então $X \overset{a}{\sim} \text{Po}(n\theta)$

λ = valor esperado ou número médio de ocorrências num dado intervalo.

$e = 2,71828$ (Número de Euler)

Distribuição de Poisson

- **Notação:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ indica que v.a. X tem **Distribuição de Poisson** com parâmetro λ .
- Uma v.a de Poisson não tem limite superior: $x = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $P(X = x \mid \lambda)$ = à probabilidade de x ocorrências num determinado intervalo, sendo λ o número médio de ocorrências em tal intervalo.
- O valor médio e a variância de X são:

$$\text{Média: } E(X) = \lambda$$

$$\text{Variância: } \text{Var}(X) = \lambda$$

Processo de Poisson e Distribuição de Poisson

Num **processo de Poisson**, os acontecimentos ocorrem a uma taxa média de λ por unidade de tempo, o número de ocorrências num intervalo de amplitude t tem distribuição de Poisson de parâmetro λt

$$f(x | \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\lambda > 0).$$

Soma de Poisson independentes

- Teorema 5.3 – Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes. Então,
 $X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda)$ onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

Em média há 2 chamadas por hora em um certo telefone. Calcule a probabilidade de:

- a) receber nenhuma chamada em 1 horas.
- b) receber uma chamada em 1 horas.
- c) receber uma chamada em 2 horas.
- d) receber no máximo 1 chamadas em 2 horas.
- e) receber pelo menos 1 chamadas em 2 horas.

Distribuição de Poisson: Exemplo 1

X = número chamadas por hora em um certo telefone
 $\lambda = 2$ chamadas por hora

$$\text{a) } P(X = 0 | \lambda = 2) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,1353$$

$$\text{b) } P(X = 1 | \lambda = 2) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,2706$$

$$\text{c) } P(X = 1 | \lambda = 4) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0732$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \leq 1 | \lambda = 4) &= P(X = 0 | \lambda = 4) + P(X = 1 | \lambda = 4) \\ &= \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0,0183 + 0,0732 = 0,0915 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(X \geq 1 | \lambda = 4) &= 1 - P(X < 1 | \lambda = 4) \\ &= 1 - P(X = 0 | \lambda = 4) = 1 - 0,0183 = 0,9817 \end{aligned}$$

Distribuição de Poisson: Exemplo 2

Outro exemplo:

X = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência numa hora

$$X \sim \text{Poisson}(30)$$

Y = nº de doentes que chegam a um serviço de urgência em 4 horas (20h-24h)

$$Y \sim \text{Poisson}(30 \times 4) = \text{Poisson}(120)$$

Errado: ~~$Y = 4X$~~ $Y \sim \text{Poisson}(4 \times 30)$

Distribuição de Poisson: Resumindo...

A **distribuição de Poisson** é uma distribuição discreta que se aplica quando ocorre um acontecimento num **intervalo especificado**. A variável aleatória **X** representa o nº de ocorrências num determinado intervalo. O intervalo pode se referir a tempo, distância, área, volume, ou algum tipo de medida similar.

Distribuição de Poisson vs. Distribuição Binomial

A distribuição de Poisson difere da distribuição binomial nos seguintes aspectos fundamentais:

- ✓ A distribuição binomial é caracterizada pela dimensão da amostra n e pela probabilidade de sucesso p , enquanto que a distribuição de Poisson é caracterizada apenas pela média μ .
- ✓ Numa distribuição binomial, os valores que a variável aleatória X pode tomar são $0, 1, \dots, n$, enquanto que na distribuição de Poisson a variável X toma os valores $0, 1, \dots$, sem limite superior.

Lei dos Acontecimentos Raros: Binomial para a Poisson

Quando $\theta = \lambda / n \rightarrow 0$, mantendo-se fixo $n\theta = \lambda$, a binomial tende para a Poisson,

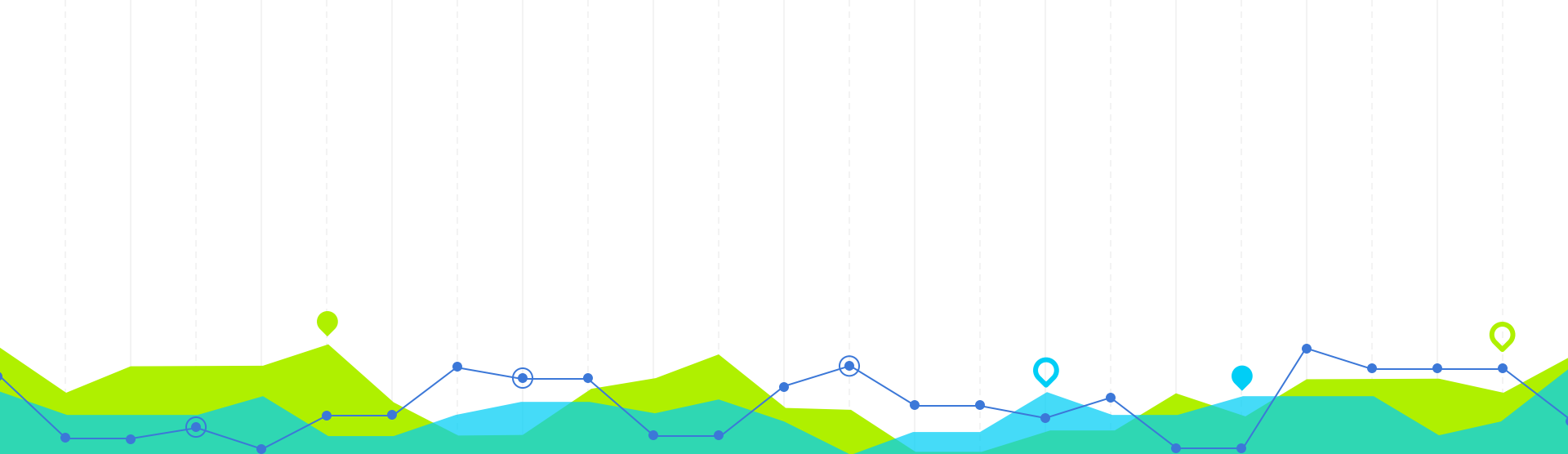
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}.$$

A **regra prática** para utilizar esta “lei” baseia-se no pressuposto de que se tem um acontecimento **raro** e um número “elevado” de observações.

Assim, **não é aconselhável** fazer a aproximação quando:

$0.1 < \theta < 0.9$ (quando $\theta \geq 0.9$, evidentemente que o acontecimento em causa não é “raro”, mas sim o seu complementar)

$n \leq 20$ (que são os valores de n considerados na tabela 1).



Distribuição Poisson: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

3

20. O número de erros de ortografia que um aluno dá por página, numa prova escrita de Estatística, segue um processo de Poisson com taxa média de 1.5 erros.
- a) Qual a percentagem de provas de duas páginas sem erros de ortografia?
 - b) Se um aluno escreveu quatro páginas, qual a probabilidade de ter cometido mais de 8 erros?
 - c) Escolhidas ao acaso cinco provas de quatro páginas cada, qual a probabilidade de apenas uma delas não ter erros de ortografia?
 - d) Numa prova com seis páginas contaram-se dez erros, qual a probabilidade de metade deles estarem nas duas primeiras páginas?



Exercício 20 (a)

X - v.a. n.º ERROS por página $\rightarrow X \sim \text{Po}(1.5)$

$\rightarrow \lambda = 1.5 \rightarrow \text{média: } E(X)$

(a)

Y - v.a. n.º ERROS em 2 páginas $\rightarrow Y \sim \text{Po}(2\lambda) = \text{Po}(3)$

$$P(Y=0) = 0.0498$$

Exercício 20 (b)

Z - v.a. nº erros em 4 páginas $\rightarrow Z \sim Po(4\lambda) = Po(6)$

$$P(Z > 8) = 1 - P(Z \leq 8) = 1 - 0.8472 = 0.1528$$

Exercício 20 (c)

Num conjunto de 5 provas (de 4 páginas) apenas uma não tem erros $\rightarrow$ Binomial

W - v.a. n.º provas ^(de 4 páginas) sem erros num conjunto de 5

$$W \sim B(n, \theta), \text{ onde: } \begin{cases} n = 5 \\ \theta = P(\underbrace{z=0}_{\substack{\text{prova 4 pág.} \\ \text{sem erros}}}) = 0.0025 \end{cases} \rightarrow W \sim B(5, 0.0025)$$

$$P(W=1) = 0.0124$$

Exercício 20 (d)

X_i = nº erros por página ($i=1,2,\dots,6$) $\rightarrow X_i \sim P_0(1.5)$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \mid \sum_{i=1}^6 X_i = 10\right) &= \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \wedge \sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \wedge \sum_{i=3}^6 X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ x_i \text{ ind.} \end{matrix} \\ &= \frac{P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5\right) P\left(\sum_{i=3}^6 X_i = 5\right)}{P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right)} \end{aligned}$$

Exercício 20 (d)

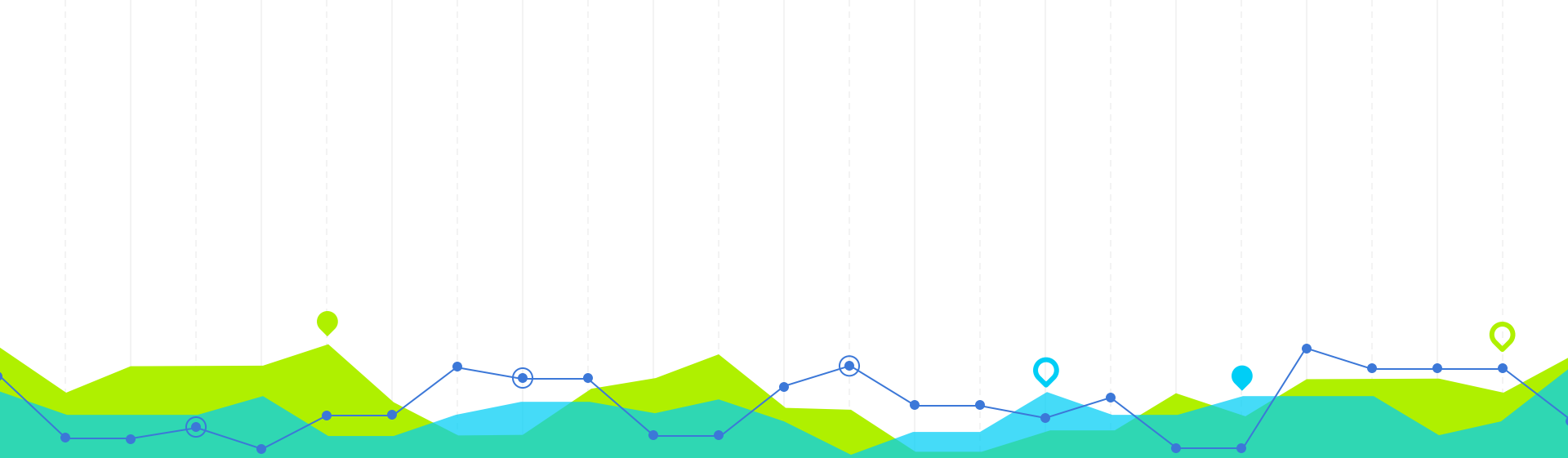
$$\bullet \sum_{i=1}^2 X_i \sim P_0(1.5+1.5) = P_0(3) \rightarrow P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5\right) = 0.1008$$

$$\bullet \sum_{i=3}^6 X_i \sim P_0(1.5+1.5+1.5+1.5) = P_0(6) \rightarrow P\left(\sum_{i=3}^6 X_i = 5\right) = 0.1606$$

$$\bullet \sum_{i=1}^6 X_i \sim P_0(1.5+1.5+1.5+1.5+1.5+1.5) = P_0(9) \rightarrow P\left(\sum_{i=1}^6 X_i = 10\right) = 0.1186$$

Logo,

$$P\left(\sum_{i=1}^2 X_i = 5 \mid \sum_{i=3}^6 X_i = 10\right) = \frac{0.1008 \times 0.1606}{0.1186} \approx 0.1365$$

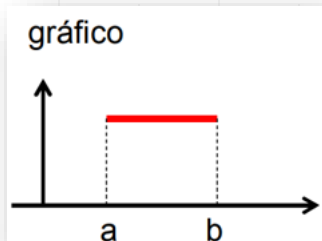


Distribuição Uniforme Contínua

Variáveis Aleatórias Contínuas

4

Distribuição Uniforme



Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros a e b , $a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(a,b)$

Formulário

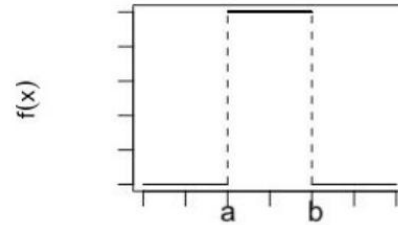
- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \alpha < x < \beta \quad ; \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ; \quad \text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad ; \quad M_X(s) = \frac{e^{s\beta} - e^{s\alpha}}{s(\beta - \alpha)}, \quad s \neq 0$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Uniforme** pode ser escrita destas duas formas.

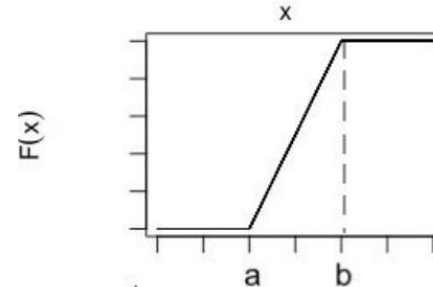
Distribuição Uniforme

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$

Distribuição Uniforme

Uniforme (0, 1)

O caso $\alpha = 0, \beta = 1$, isto é, $X \sim U(0, 1)$, é o de **maior interesse**

$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$
$E(X^k) = \frac{1}{(k+1)} \text{ logo } E(X) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{12}, \quad \gamma_1 = 0$	

<https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/>

Distribuição Uniforme

- **Teorema 5.4 – Transformação uniformizante** – resultado particularmente importante em problemas de simulação.

Este resultado mostra que, em certas condições, $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ e inversamente que se $Y \sim U(0,1)$ então $X = F_X^{-1}(Y) \sim F_X(x)$

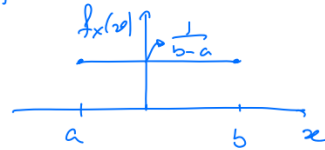
<https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/>

Distribuição Uniforme: Resumindo...

i) $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ [lê-se: X tem distribuição uniforme no intervalo (a, b)]

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



$$\left(\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1 \Rightarrow \text{a função está bem definida} \right)$$

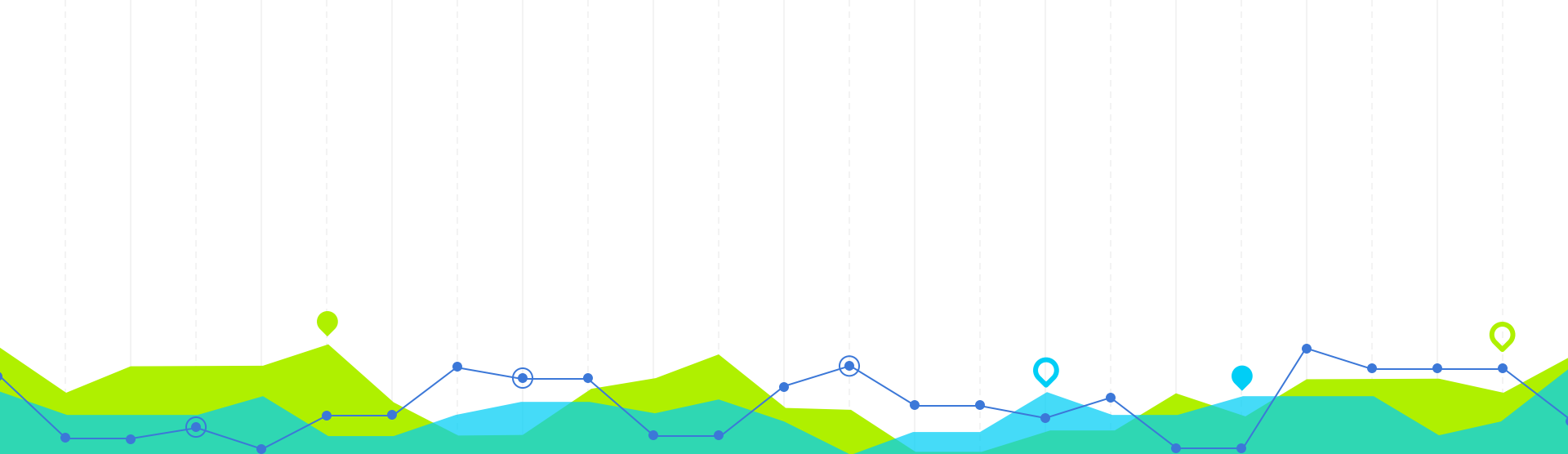
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1.0 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$\text{var}(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Distribuição Uniforme Contínua: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

5

34. A duração de pequenos anúncios (entre 5 e 12 segundos) numa cadeia de televisão pode considerar-se uma variável aleatória com distribuição uniforme.

- a) Indique a função de distribuição.
- b) Qual a probabilidade de um pequeno anúncio ter duração superior a 7 segundos.
- c) Calcule e interprete: $P(X > 6 | X \leq 10)$.
- d) Calcule a média e o desvio padrão da duração dos pequenos anúncios.



Exercício 34 (a)

X - v.a. duração anúncios (entre 5 e 12 segundos)

$$X \sim U(5, 12)$$

(a)

$$X \sim U(5, 12) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12-5} = \frac{1}{7} \quad (5 < x < 12)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_5^x \frac{1}{7} du = \left[\frac{u}{7} \right]_5^x = \frac{x}{7} - \frac{5}{7} = \frac{x-5}{7}$$

Assim,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 5) \\ \frac{x-5}{7} & (5 \leq x < 12) \\ 1 & (x \geq 12) \end{cases}$$

Exercício 34 (b)

$$P(X > 7) = \int_7^{12} f(x) dx = 1 - F_x(7) = 1 - \frac{7 \cdot 5}{7} = \frac{5}{7} \approx 0.7143$$

Exercício 34 (c)

$$\begin{aligned} P(X > 6 \mid X \leq 10) &= \frac{P(X > 6 \cap X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{P(6 < X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{F_X(10) - F_X(6)}{F_X(10)} = \\ &= \frac{5/7 - 1/7}{5/7} = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

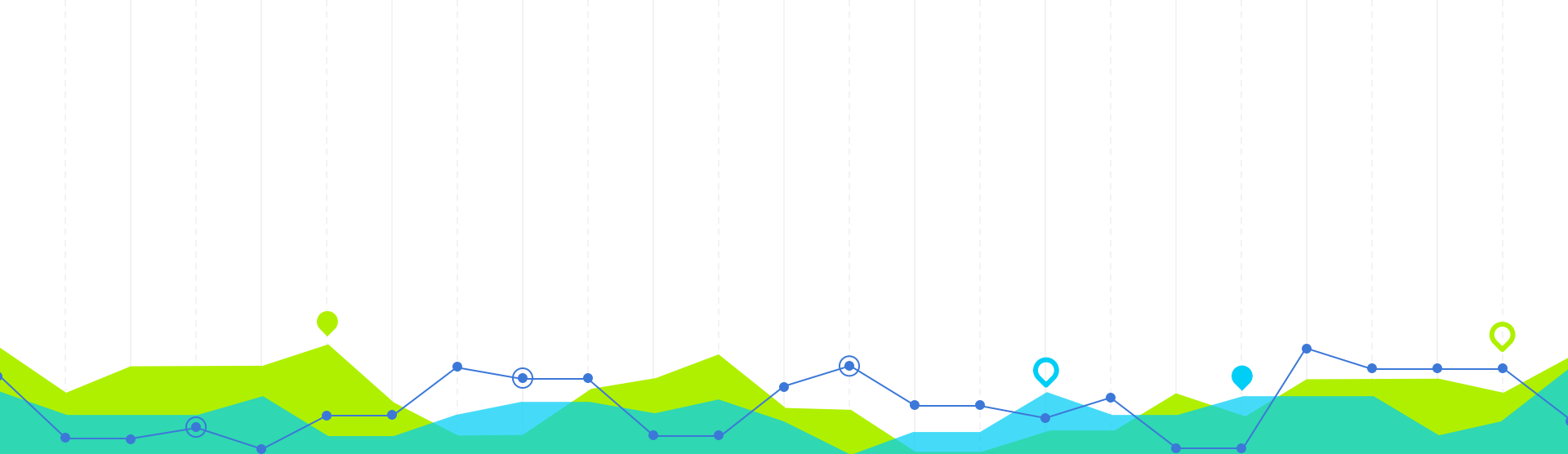
- Sabendo que um anúncio não dura mais de 10 segundos, a probabilidade de durar mais de 6 segundos é de 0.8
- 80% dos anúncios com duração não superior a 10 segundos, duram mais de 6 segundos.

Exercício 34 (d)

$X \sim U(\alpha, \beta)$, onde $\alpha = 5$ e $\beta = 12$. Então:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5 + 12}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} = \frac{(12 - 5)^2}{12} = \frac{49}{12} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{49/12} \approx 2.0207$$



Distribuição Normal

Variáveis Aleatórias Contínuas

6

Distribuição Normal ou Gaussiana

A v. a. X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Formulário

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

Pode ser mostrado que:

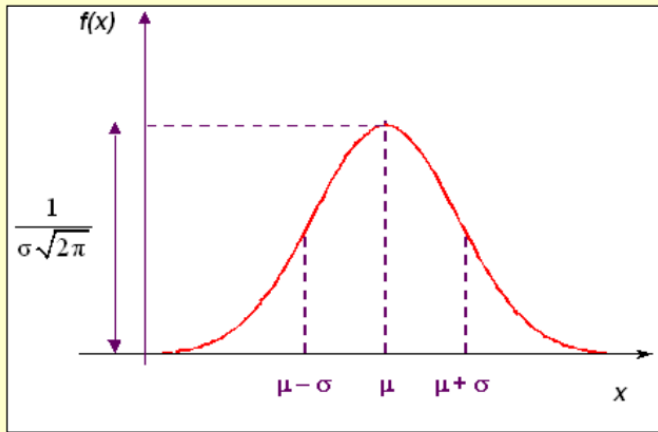
1. μ é o valor esperado (média) de X , com $-\infty < \mu < \infty$;
2. σ^2 é a variância de X , com $\sigma^2 > 0$.

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Notação : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

Distribuição Normal: Propriedades

Propriedades de $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

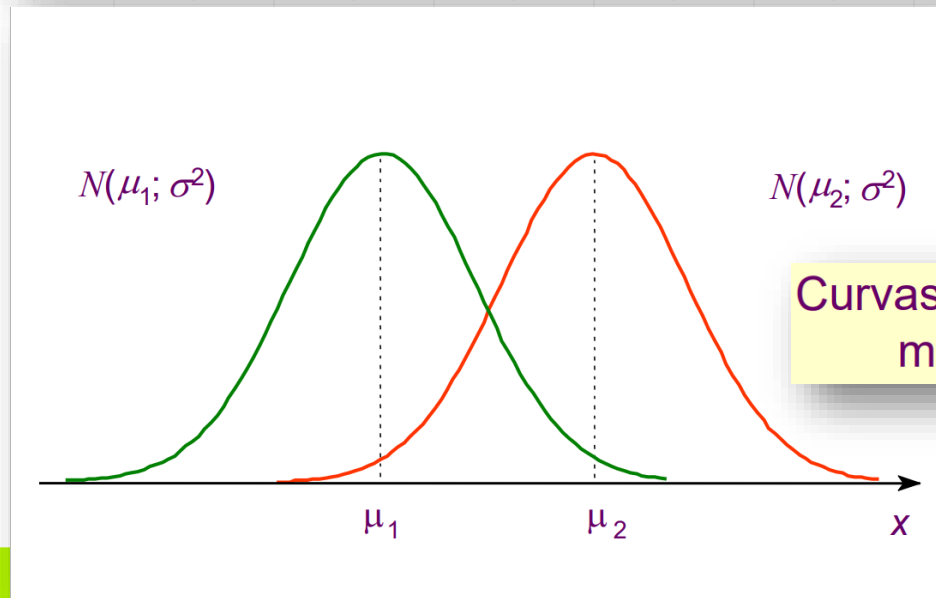


- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ .

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Valor Médio

A distribuição Normal depende dos parâmetros μ e σ^2

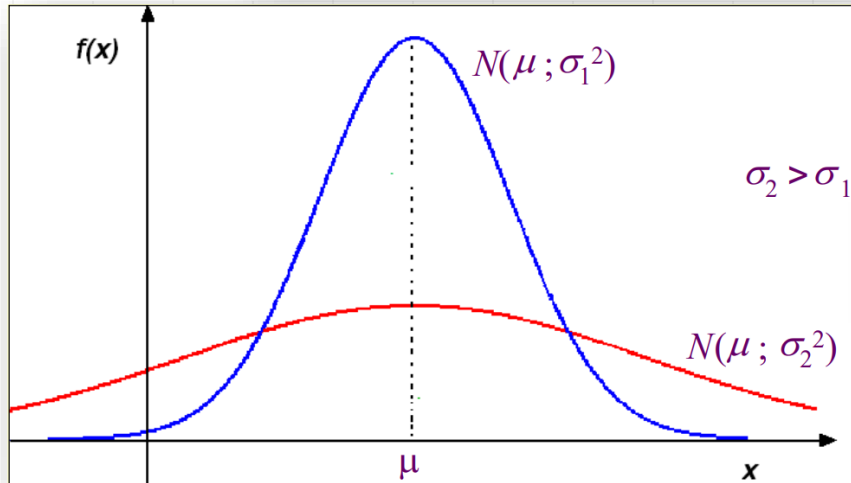


Curvas Normais com mesma variância σ^2
mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal: Variância

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ
mas com variâncias diferentes ($\sigma_2 > \sigma_1$).

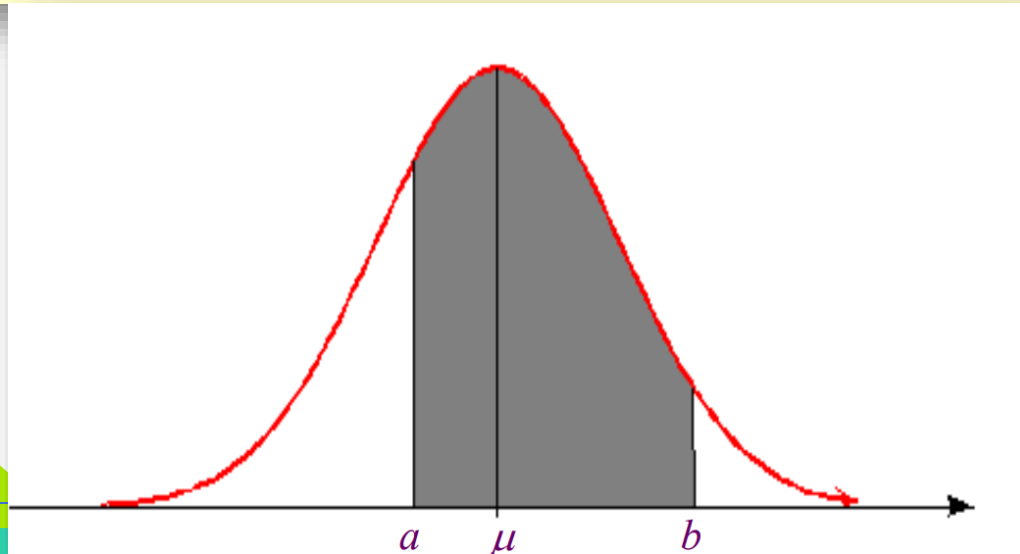
[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal: Cálculo de Probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$



Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b .

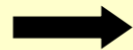


Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: $Z \sim N(0,1)$

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, definimos

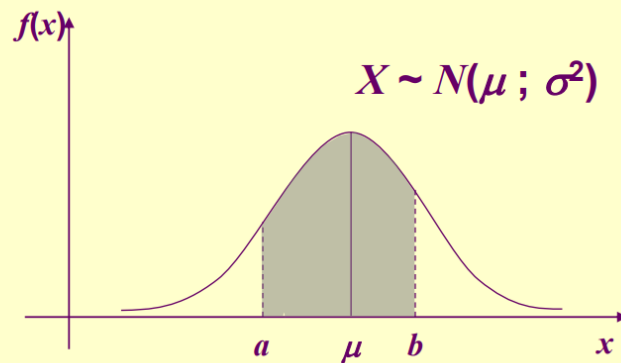
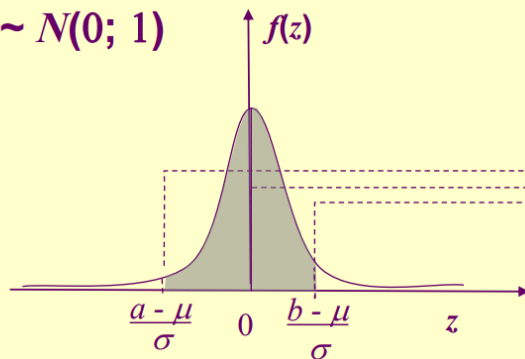
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



$$E(Z) = 0$$

$$Var(Z) = 1$$

$Z \sim N(0; 1)$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: $Z \sim N(0,1)$

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se *normal padrão* ou *reduzida*.

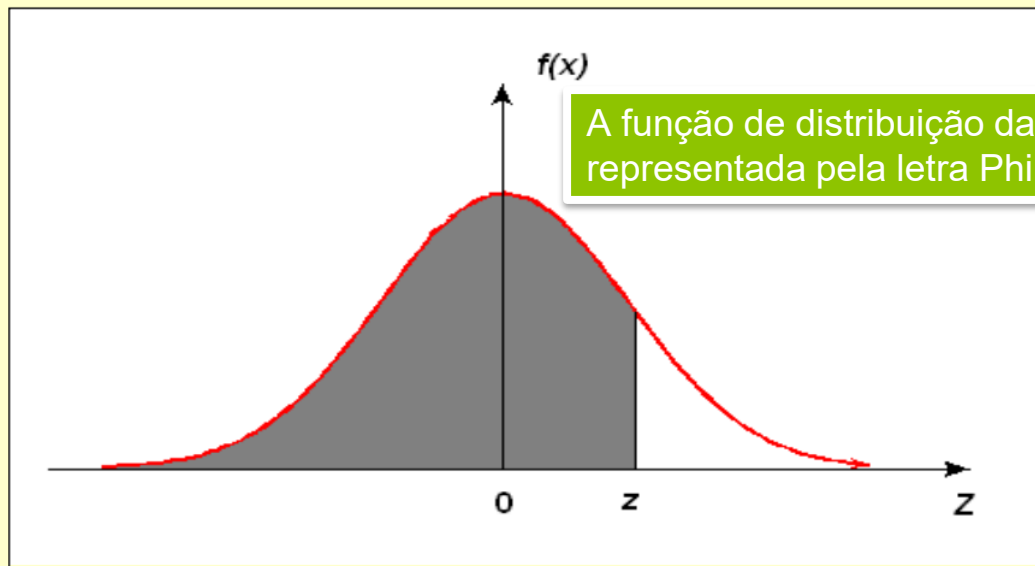
Portanto,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z \times \sigma.$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades



A função de distribuição da Normal Padrão é representada pela letra Phi: $P(Z \leq z) = F(z) = \Phi(z)$

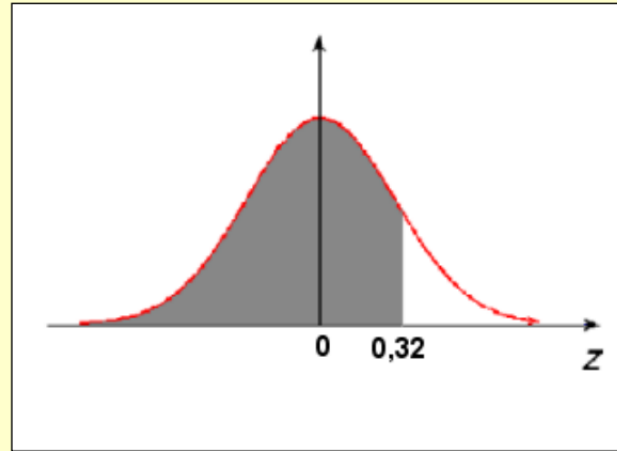
Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$, para $z \geq 0$.

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://distribuicao-normal.usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

Exemplo: Seja $Z \sim N(0; 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0,32)$



$$P(Z \leq 0,32) = A(0,32) = 0,6255.$$

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Tabela

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7824	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999064	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999533	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999650
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999821	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999930	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

$$P(Z \leq 0,32) = 0,6255$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$\text{b) } P(0 < Z \leq 1,71)$$

$$= P(Z \leq 1,71) - P(Z \leq 0)$$

$$= A(1,71) - A(0)$$

$$= 0,9564 - 0,5 = 0,4564.$$

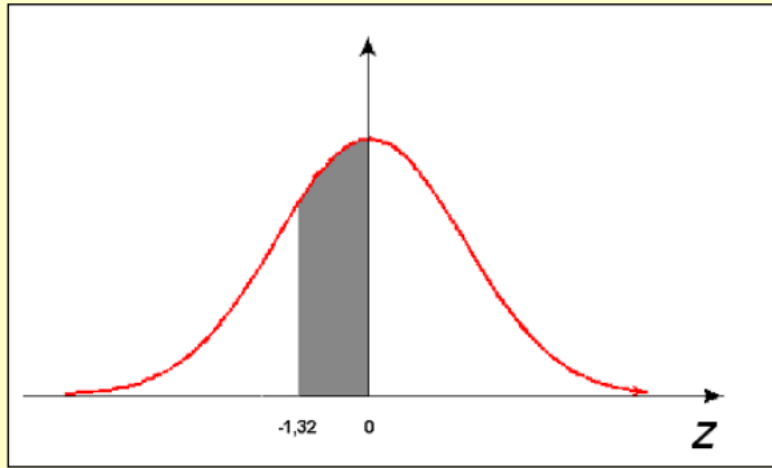
Obs.: $A(0) = P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0,5$.

$P(-a < Z < a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$
 $P(Z < -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
sendo “a” uma constante positiva e Φ (Phi) a fd da Distribuição Normal Padrão



Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$c) P(-1,32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,32)$$



$$= P(Z \leq 1,32) - P(Z \leq 0)$$

$$= A(1,32) - 0,5$$

$$= 0,9066 - 0,5 = 0,4066.$$

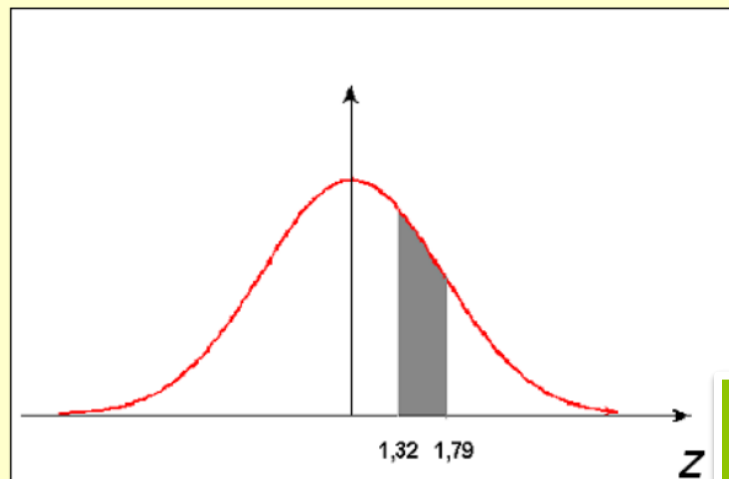
Tabela

$$\text{Alternativa, } P(-1,32 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,32) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1,32)] = 0,5 - 1 + 0,9066 = 0,4066$$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$d) P(1,32 < Z \leq 1,79)$$



$$\begin{aligned} &= P(Z \leq 1,79) - P(Z \leq 1,32) \\ &= A(1,79) - A(1,32) \\ &= 0,9633 - 0,9066 = 0,0567. \end{aligned}$$

$$\text{Alternativa, } P(1,32 < Z \leq 1,79) = \Phi(1,79) - \Phi(1,32) = 0,9633 - 0,9066 = 0,0567$$

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

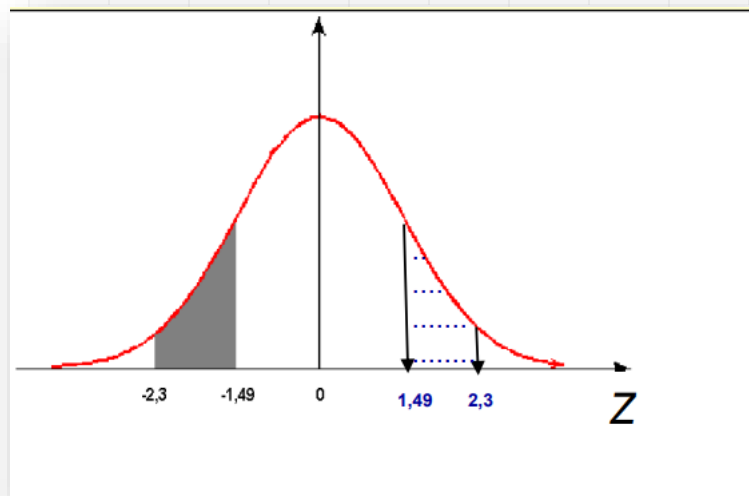
$$\text{e) } P(-2,3 < Z \leq -1,49)$$

$$= P(1,49 \leq Z < 2,3)$$

$$= A(2,3) - A(1,49)$$

$$= 0,9893 - 0,9319$$

$$= 0,0574.$$



Distribuição Normal (usp.br)

$$\begin{aligned} \text{Alternativa, } P(-2,3 < Z \leq -1,49) &= \Phi(-1,49) - \Phi(-2,3) \\ &= [1 - \Phi(1,49)] - [1 - \Phi(2,3)] = 0,0574 \end{aligned}$$

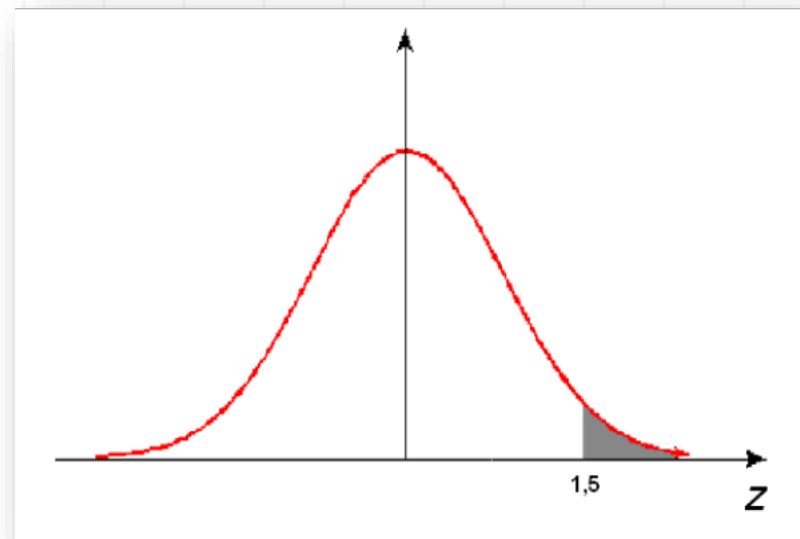
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$f) P(Z \geq 1,5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,5)$$

$$= 1 - A(1,5)$$

$$= 1 - 0,9332 = 0,0668.$$



Alternativa, $P(Z \geq 1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 0,0668$

Distribuição Normal (usp.br)

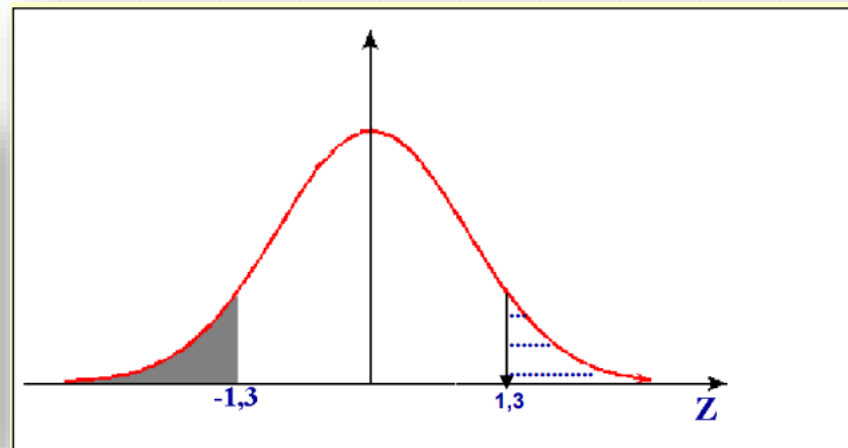
Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

$$g) P(Z \leq -1,3)$$

$$= P(Z \geq 1,3) = 1 - P(Z \leq 1,3)$$

$$= 1 - A(1,3)$$

$$= 1 - 0,9032 = 0,0968.$$

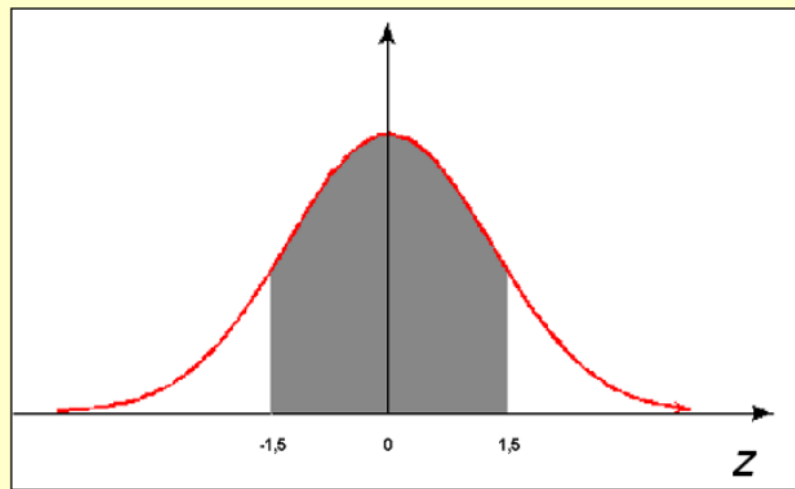


Distribuição Normal (usp.br)

• Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1,3) = P(Z \geq 1,3)$.

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

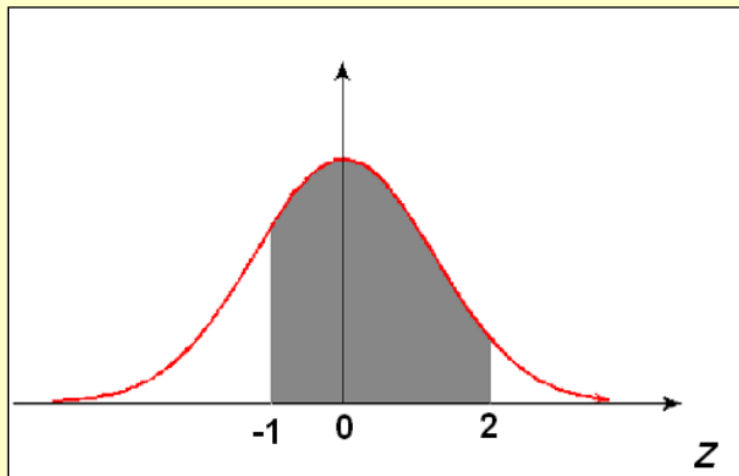
$$\begin{aligned} \text{h) } & P(-1,5 \leq Z \leq 1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - P(Z \geq 1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - [1 - P(Z \leq 1,5)] \\ &= 2 \times P(Z \leq 1,5) - 1 = 2 \times A(1,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$



Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

i) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$$\begin{aligned} &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) \\ &= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1)) \\ &= 0,9773 - (1 - 0,8413) \\ &= 0,9773 - 0,1587 = 0,8186. \end{aligned}$$

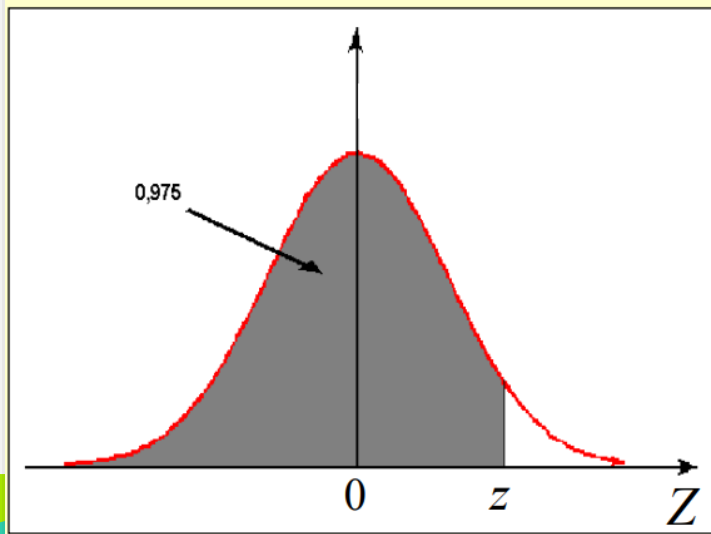
Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0,975$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,975$
 $\Leftrightarrow z = \Phi(0,975)^{-1} = 1,96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Tabela

Quantis

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8829
1.2	.8849									
1.3	.9032									
1.4	.9192									
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868				.9871	.9874	.9877	.9880
2.3	.9883	.9886	.9889				.9892	.9895	.9898	.9900
2.4	.9903	.9906	.9909				.9912	.9915	.9918	.9920
2.5	.9923	.9926	.9929	.9932	.9935	.9938	.9941	.9944	.9947	.9950
2.6	.9953	.9956	.9959	.9962	.9965	.9968	.9971	.9974	.9977	.9980
2.7	.9983	.9986	.9989	.9992	.9995	.9998				
2.8										
2.9										
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

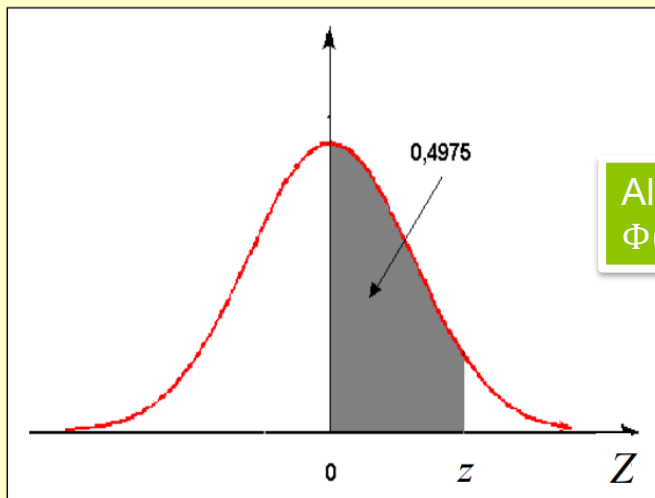
$$P(Z \leq z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,975 \Leftrightarrow z = \Phi(0,975)^{-1} = 1,96$$

Probabilidades

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(ii) P(0 < Z \leq z) = 0,4975$$



z é tal que $A(z) = 0,5 + 0,4975 = 0,9975$.

Pela tabela $z = 2,81$. Tabela

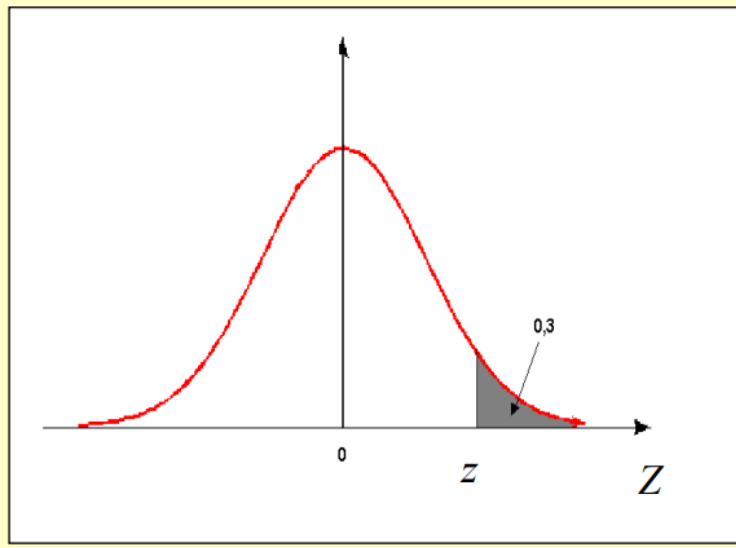
Alternativa, $P(0 < Z \leq z) = 0,4975 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(0) = 0,4975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,4975 + 0,5 \Leftrightarrow z = \Phi(0,9975)^{-1} = 2,81$

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iii) $P(Z \geq z) = 0,3$



z é tal que $A(z) = 0,7$.

Pela tabela, $z = 0,53$.

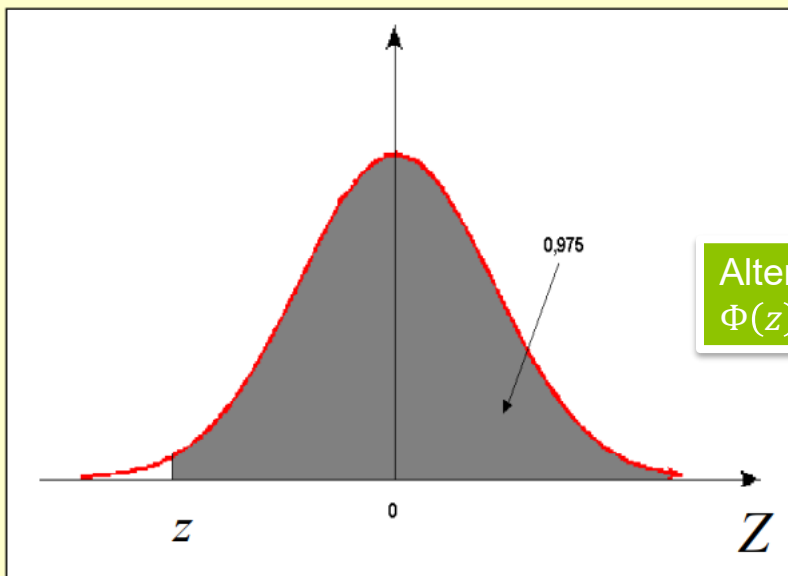
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3$
 $\Leftrightarrow \Phi(z) = 0,7 \Leftrightarrow z = \Phi(0,7)^{-1} = 0,53$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(iv) P(Z \geq z) = 0,975$$



a é tal que $A(a) = 0,975$ e $z = -a$.

Pela tabela $a = 1,96$.

Então, $z = -1,96$.

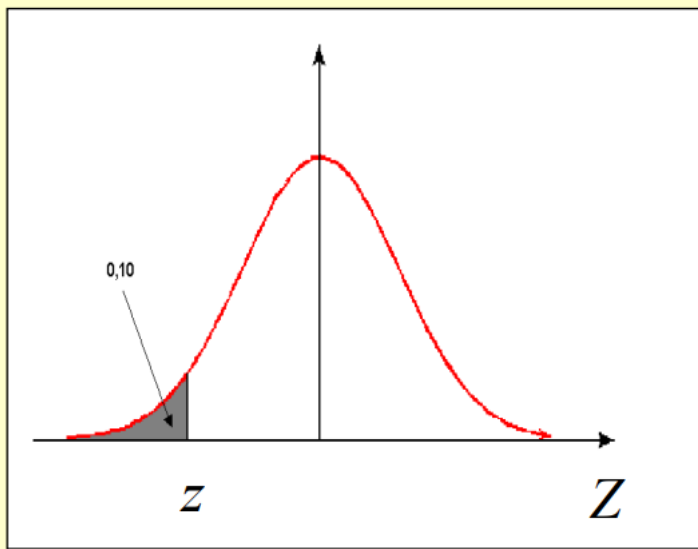
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,975 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,025 \Leftrightarrow z = \Phi(0,025)^{-1} = -\Phi(0,975)^{-1} = -1,96$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(v) P(Z \leq z) = 0,10$$



a é tal que $A(a)=0,90$ e $z = -a$.

Pela tabela, $a = 1,28$

e, assim, $z = -1,28$.

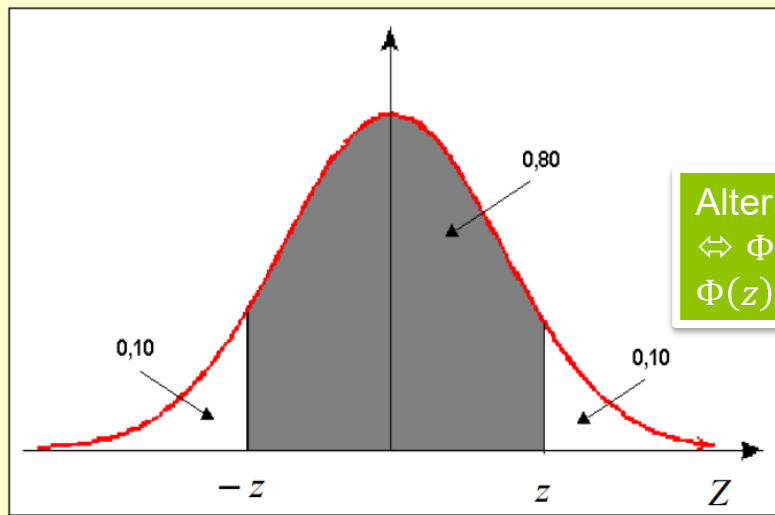
Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,10 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,10 \Leftrightarrow z = \Phi(0,1)^{-1} = -\Phi(0,9)^{-1} = -1,28$

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

$$(vi) P(-z \leq Z \leq z) = 0,80$$



z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0,1$.

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0,90$

$\Rightarrow z = 1,28$ (pela tabela).

Tabela

Alternativa, $P(-z \leq Z \leq z) = 0,80 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0,80$
 $\Leftrightarrow \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 0,80 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0,80 \Leftrightarrow$
 $\Phi(z) = 0,9 \Leftrightarrow z = \Phi(0,9)^{-1} = 1,28$

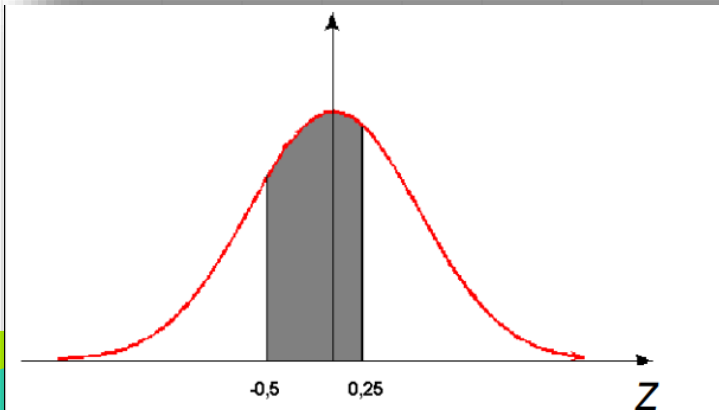
Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Probabilidades

Exemplo: Seja $X \sim N(10 ; 64)$ ($\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$)

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$

$$= P\left(\frac{6-10}{8} < \frac{X-10}{8} < \frac{12-10}{8}\right) = P(-0,5 < Z < 0,25)$$



$$= A(0,25) - (1 - A(0,5))$$

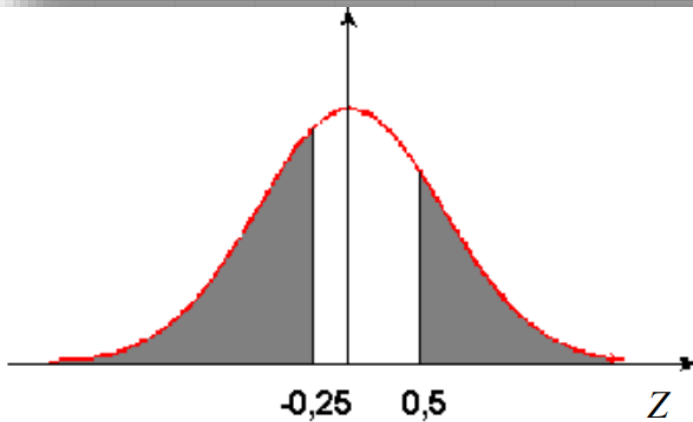
$$= 0,5987 - (1 - 0,6915)$$

$$= 0,5987 - 0,3085 = 0,2902$$

Distribuição Normal: Probabilidades

(b) $P(X \leq 8 \text{ ou } X > 14)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) + P(X > 14) &= P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right) \\ &= P(Z < -0,25) + P(Z > 0,5) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 1 - A(0,25) + 1 - A(0,5) \\ &= 1 - 0,5987 + 1 - 0,6915 \\ &= 0,7098 \end{aligned}$$

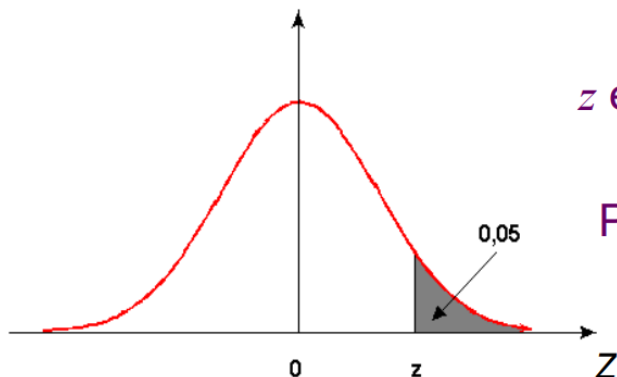
Distribuição Normal: Quantis

c) k tal que $P(X \geq k) = 0,05$

$$P(X \geq k) = 0,05 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \geq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \geq \frac{k-10}{8}\right) = 0,05.$$

z é tal que $A(z) = 0,95$

Pela tabela $z = 1,64$



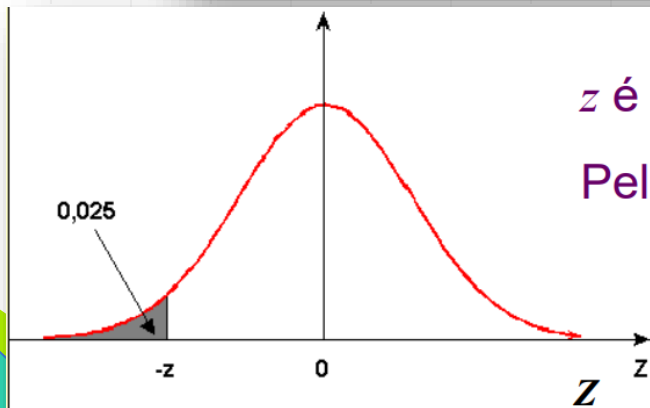
$$\text{Então, } z = \frac{k-10}{8} = 1,64.$$

$$\text{Logo } k = 10 + 1,64 \times 8 = 23,12.$$

Distribuição Normal: Quantis

d) k tal que $P(X \leq k) = 0,025$

$$P(X \leq k) = 0,025 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \leq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-10}{8}\right) = 0,025.$$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

$$\text{Então, } \frac{k-10}{8} = -z = -1,96.$$

$$\text{Logo } k = 10 - 1,96 \times 8 = -5,68.$$

Distribuição Normal: Probabilidades

Observação : Se $X \sim N(\mu ; \sigma^2)$, então

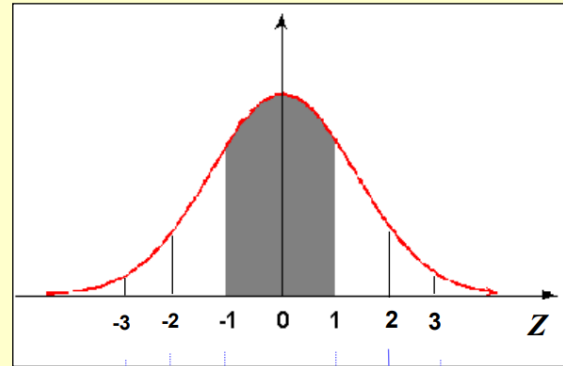
$$(i) P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2 \times (A(1) - 0,5)$$

$$= 2 \times (0,8413 - 0,5)$$

$$= 0,6826$$



ou seja, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,683$.

68%

95,5%

99,7%

$$(ii) P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,955.$$

$$(iii) P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,997.$$

Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

Distribuição Normal: Resumo...

Formulário

- **NORMAL** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(-\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty)$

$$f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu; \text{Var}(X) = \sigma^2; M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 3$$

Função geradora de momentos

Propriedades:

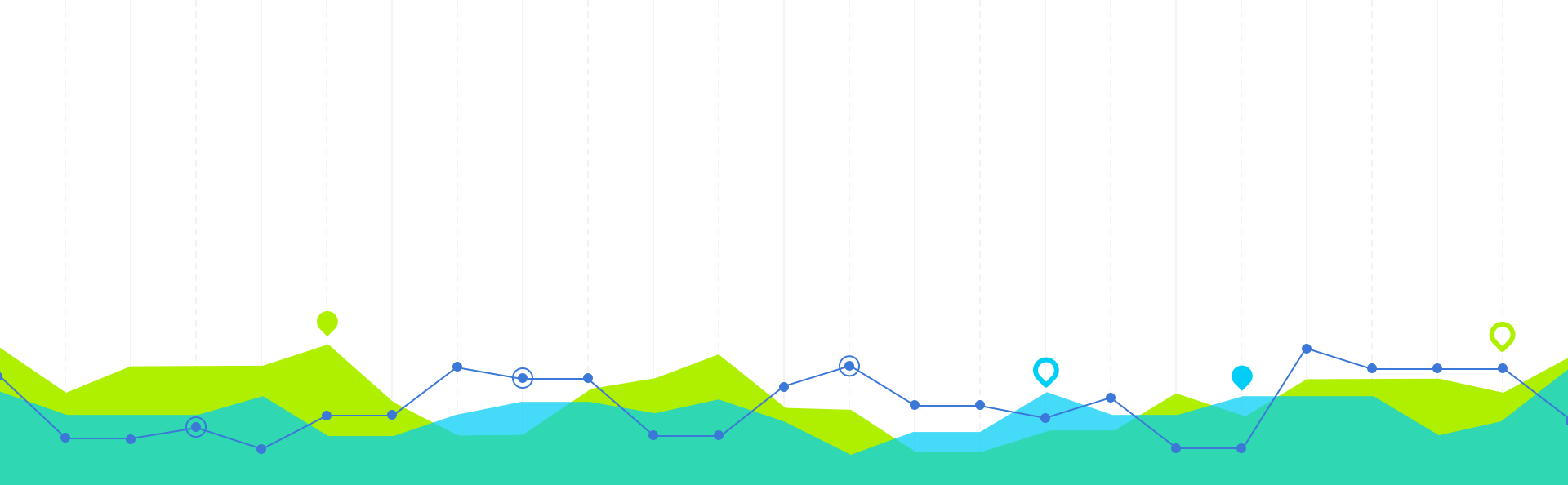
- Normal estandardizada $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$; $\phi(z) = \phi(-z)$ e $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$

- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^k X_i \sim N(k\mu, k\sigma^2)$ e $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$

- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ com $\mu_Y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i$ e $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \sigma_i^2$

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

$$M_X^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = E(X^n)$$



Distribuição Normal: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

7

Exemplo : O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 *min* e desvio padrão 15 *min*.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

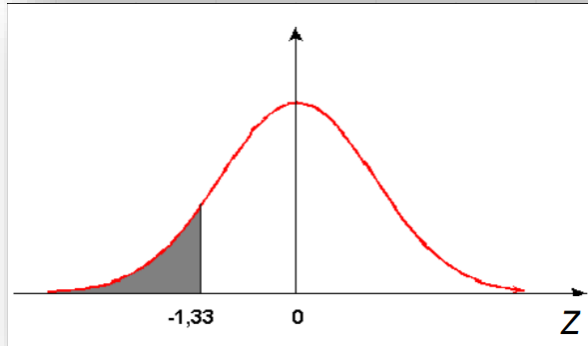
c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?



Exercício 1 (a): Probabilidades

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100 - 120}{15}\right) = P(Z \leq -1,33)$$



$$= 1 - A(1,33)$$

$$= 1 - 0,9082 = 0,0918.$$

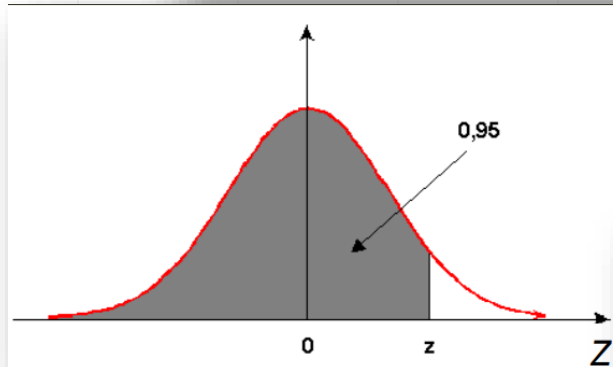
Distribuição Normal (usp.br)

$$\text{Alternativa, } P(Z \leq -1,33) = \Phi(-1,33) = 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$

Exercício 1 (b): Distribuição Normal - Quantis

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq x) = 0,95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-120}{15}\right) = 0,95$$



$z = ?$ tal que $A(z) = 0,95$.

Pela tabela $z = 1,64$.

Distribuição Normal (usp.br)

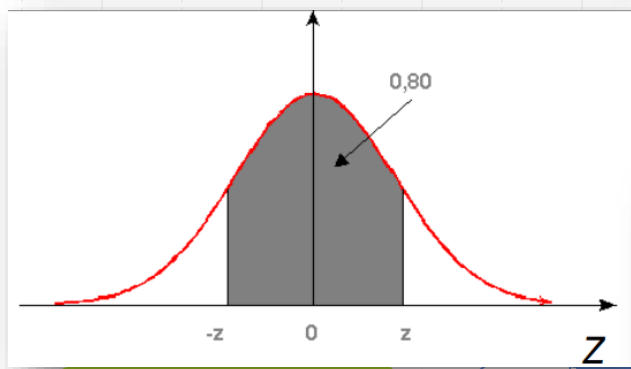
$$\begin{aligned} \text{Então, } z = 1,64 &= \frac{x-120}{15} & \Rightarrow x &= 120 + 1,64 \times 15 \\ & & \Rightarrow x &= 144,6 \text{ min.} \end{aligned}$$

Alternativa, $P(Z \leq (x-120)/15) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi((x-120)/15) = 0,95 \Leftrightarrow (x-120)/15 = \Phi(0,95)^{-1} \Leftrightarrow (x-120)/15 = 1,64 \Leftrightarrow x = 144,6 \text{ minutos}$

Exercício 1 (c): Distribuição Normal - Quantis

X : tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0,80$$



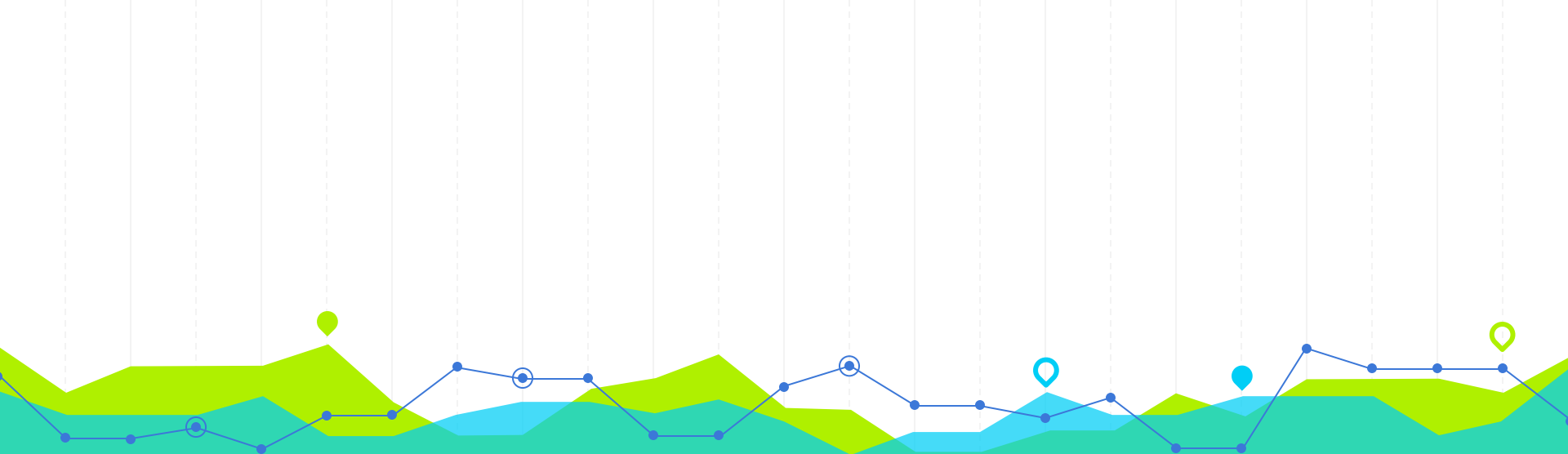
$z = ?$ tal que $A(z) = 0,90$.

Pela tabela, $z = 1,28$.

[Distribuição Normal \(usp.br\)](http://www.usp.br/distribuição-normal)

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1,28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1,28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100,8 \text{ min.}$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1,28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1,28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139,2 \text{ min.}$$



Distribuição Normal: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Contínuas

8

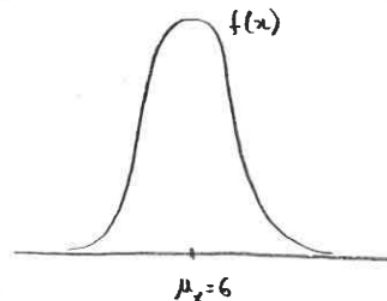
39. Se X tem distribuição normal com média 6 e variância 25, calcule:

- a) $P(6 < X \leq 12)$.
- b) $P(0 \leq X < 8)$.
- c) $P(X < -4)$.
- d) $P(|X - 6| > 10)$.
- e) O valor de k tal que $P(X > k) = 0.90$.



Exercício 39 (a)

$$X \sim N(6, 25) \rightarrow \mu_x = 6, \sigma_x^2 = 25$$



(a)

$$P(6 < X \leq 12) \rightarrow \text{normalcdf}\left(6, 12, \overset{\mu}{\underset{\uparrow}{6}}, \overset{\sigma}{\underset{\uparrow}{5}}\right) \approx 0.38493$$

$$\begin{aligned} P(6 < X \leq 12) &= P\left(\frac{6-6}{\sqrt{25}} < \underbrace{\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{12-6}{\sqrt{25}}\right) = P(0 < Z \leq 1.2) = \underbrace{\Phi(1.2)}_{(F_2)} - \underbrace{\Phi(0)}_{(F_2)} = \\ &= 0.8849 - 0.5 = 0.3849 \end{aligned}$$

Exercício 39 (b)

$$P(0 \leq X < 8) \rightarrow \text{normalcdf}(0, 8, 6, 5) \approx 0.54035$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < 8) &= P\left(\frac{0-6}{\sqrt{25}} \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} < \frac{8-6}{\sqrt{25}}\right) = P(-1.2 \leq Z < 0.4) = \Phi(0.4) - \Phi(-1.2) = \\ &= \Phi(0.4) - [1 - \Phi(1.2)] = 0.6554 - (1 - 0.8849) = 0.5403 \end{aligned}$$

Exercício 39 (c)

$$P(X < -4) \rightarrow \text{normalcdf}(-10^{99}, -4, 6, 5) \approx 0.02275$$

$$P(X < -4) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{-4 - 6}{\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.022$$

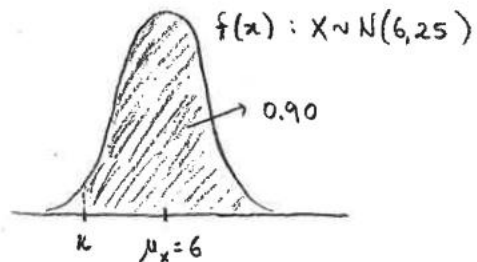
Exercício 39 (d)

$$\begin{aligned} P(|X-6| > 10) &= 1 - P(|X-6| \leq 10) = 1 - P(-10 \leq X-6 \leq 10) = 1 - \underbrace{P(-4 \leq X \leq 16)}_{\text{normalcdf}(-4, 16, 6, 5)} \\ &\approx 1 - 0.9545 = 0.0455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X-6| > 10) &= 1 - P(|X-6| \leq 10) = 1 - P\left(-10 \leq X - \frac{\mu_x}{n} \leq 10\right) = 1 - P\left(\frac{-10}{\sqrt{25}} \leq \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{10}{\sqrt{25}}\right) = \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - \Phi(2) + [1 - \Phi(2)] = \\ &= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) = 2[1 - \Phi(2)] = 2(1 - 0.9772) = \\ &= 2 \times 0.0228 = 0.0456 \end{aligned}$$

Exercício 39 (e)

$$K: P(X > K) = 0.90$$

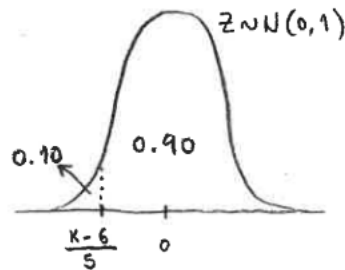


$$P(X > K) = 0.90 \rightarrow \text{invNorm}(0.10, 6, 5) \approx -0.4078$$

→ prob. à esquerda!

Exercício 39 (e)

$$P(X > K) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{K - 6}{5}\right) = 0.90 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{K - 6}{5}\right) = 0.90$$



$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{K - 6}{5}\right) = 0.10 \quad (\text{simétrica}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > -\frac{K - 6}{5}\right) = 0.10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{6 - K}{5}\right) = 0.10$$

Pela tabela 5: $\frac{6 - K}{5} = 1.282 \Leftrightarrow 6 - K = 1.282 \times 5 \Leftrightarrow -K = 1.282 \times 5 - 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow K = 6 - 1.282 \times 5 = -0.41$$

43. Considere que o tempo gasto numa visita à feira do livro é uma variável aleatória com distribuição normal, de média igual a duas horas. Suponha que apenas 2.5% dos visitantes permanecem mais de três horas.
- a) Qual o desvio padrão da variável?
 - b) Sabendo que um visitante já chegou há uma hora, qual a probabilidade de se ir embora nos próximos 30 minutos?
 - c) Calcule a mediana e o intervalo interquartil de X , e interprete o seu significado.
 - d) Calcule a probabilidade de em 20 visitantes seleccionados ao acaso haver no máximo um que permaneça mais de três horas.



Obrigada!

Questões?

