
I - Exercícios de Análise Matemática

1. Topologia em $\mathbb{R}$

Exercício 1.

Determine o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam) dos seguintes conjuntos, e indique quais deles são conjuntos limitados:

- | | | |
|--------------------------------|---|--|
| (a) $A = [-1, 1];$ | (e) $E = \{1, 5, 20\};$ | (i) $I = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ |
| (b) $B =]-1, 1[;$ | (f) $F = \{4.9, 4.99, 4.999, \dots\};$ | (j) $J = \{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ |
| (c) $C = [2, 3[\cup [4, 10[;$ | (g) $G = [0, +\infty[;$ | (k) $K = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\};$ |
| (d) $D =]5, 7[\cup \{15\};$ | (h) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ | (l) $L = \{m + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}.$ |

Exercício 2.

Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados dos seguintes conjuntos, e indique quais deles são conjuntos abertos, fechados e/ou compactos:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $A = [-1, 1];$ | (g) $G = [0, +\infty[;$ | (m) $M = \mathbb{Z};$ |
| (b) $B =]-1, 1[;$ | (h) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ | (n) $N = \mathbb{Q};$ |
| (c) $C = [2, 3[\cup [4, 10[;$ | (i) $I = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ | (o) $O = [0, 1] \setminus \mathbb{Q};$ |
| (d) $D =]5, 7[\cup \{15\};$ | (j) $J = \{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\};$ | (p) $P = [2, 3] \cap \mathbb{Q};$ |
| (e) $E = \{1, 5, 20\};$ | (k) $K = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\};$ | (q) $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 49\};$ |
| (f) $F = \{4.9, 4.99, 4.999, \dots\};$ | (l) $L = \{m + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\};$ | (r) $R = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 49\}.$ |

2. Indução matemática

Exercício 3.

Mostre que se n é um número natural, então

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 4.

Seja S_n a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Calcule S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 , deduza que

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

e prove esta última igualdade usando indução matemática.

Exercício 5.

Usando indução matemática mostre que

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercício 6.

Mostre que para qualquer número natural n ,

$$n < 2^n.$$

Exercício 7.

Será que $2^n < n!$ para qualquer n número natural? Mostre que para qualquer número natural $n \geq 4$,

$$2^n < n!.$$

3. Progressões e séries geométricas**Exercício 8.**

Determine se cada uma das seguintes sucessões é uma progressão geométrica. Em caso afirmativo, encontre o primeiro termo e a razão da sucessão e determine a sua monotonia.

(a) $a_n = -5$

(e) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-n}$

(i) $a_n = (n+1)^3$

(b) $a_n = \frac{n-1}{n}$

(f) $a_n = \frac{2n}{7}$

(j) $a_n = \frac{(n+1)^2}{2}$

(c) $a_n = 3n$

(g) $a_n = n^n$

(k) $a_n = (-2)^n$

(d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(h) $a_n = 4 \times 3^{1-n}$

(l) $a_n = n(n-1)$

Exercício 9.

Determine os termos a_3 , a_6 e a_8 das seguintes progressões geométricas, sabendo que:

(a) $a_1 = 8$ e $a_4 = 320$

(d) $a_4 = 64$ e $a_7 = -512$

(g) $a_3 = -\frac{1}{2}$ e $a_8 = \frac{243}{2}$

(b) $a_9 = 1024$ e $r = 2$

(e) $a_7 = -2$ e $r = -\frac{1}{3}$

(h) $a_4 - a_2 = 8$ e $a_2 + a_3 = 4$

(c) $a_5 = 48$ e $a_6 = 96$

(f) $a_7 = -16$ e $r = \sqrt{2}$

(i) $a_5 = 4a_3$ e $a_3 + a_6 = 63$

Exercício 10.

Calcule:

(a) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$

(c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots$

(b) $27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$

Exercício 11.

Estude a convergência de cada uma das seguintes séries geométricas e calcule, quando possível, a respetiva soma.

$$\begin{array}{llll}
(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}} & (c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \times 6^{n+1}}{9^{n-2}} & (e) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7 \times 5^n}{3^{2n+2}} & (g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n} \\
(b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{n+1}}{5^{n-1}} & (d) \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \cos(n\pi) 5^{-n+1} & (f) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2 \times 5^{2n-1}}{3^{4n}} & (h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5 \times (-3)^{n-1}}{2^{n+1}}
\end{array}$$

Exercício 12.

Exprima os seguintes números racionais como soma de uma série geométrica convergente e escreva-os na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
(a) 0,77777\ldots & (c) 0,123123123\ldots \\
(b) 0,52525252\ldots & (d) 0,811111\ldots
\end{array}$$

Exercício 13.

Recorrendo à soma de uma série geométrica convergente, escreva os seguintes números reais na forma a^b com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ll}
(a) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ldots}}} & (b) \sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7}\ldots}}}
\end{array}$$

Exercício 14.

Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ cada uma das seguintes séries geométricas é convergente, e em caso afirmativo, calcule a respetiva soma.

$$\begin{array}{lll}
(a) \sum_{n=0}^{+\infty} 3x^n & (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n & (c) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3x-4}{5}\right)^n
\end{array}$$

4. Domínios de funções reais de variável real

Exercício 15.

Determine o domínio das seguintes funções:

- (a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ (c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (e) $l(x) = \sqrt{|x-2|-4}$ (g) $n(x) = \frac{1}{-1+\ln x}$
(b) $g(x) = \ln(1-x)$ (d) $j(x) = \sqrt{e^{x^2}-1}$ (f) $m(x) = \ln(\ln x)$ (h) $o(x) = \frac{2}{\sqrt{2-|x-1|}}$

5. Funções trigonométricas inversas

Exercício 16.

Calcule:

- (a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $\arctan(1)$ (e) $\arctan(-1)$
(b) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $\arcsin(-1)$ (f) $\arccos(-1)$

Exercício 17.

Calcule:

- (a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$; (d) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; (g) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
(b) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$; (e) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$; (h) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;
(c) $\tan(\arctan(e))$; (f) $\arctan(\tan(e))$. (i) $\arcsin\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercício 18.

Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões e apresente, para cada uma delas, uma expressão equivalente que não envolva funções trigonométricas.

- (a) $\cos(\arcsin(x))$; (d) $\tan(\arcsin(x))$; (g) $\sin(2\arccos(x))$;
(b) $\sin(\arccos(x))$; (e) $\cos(\arctan(x))$; (h) $\sin^2(\arcsin(x))$;
(c) $\tan(\arccos(x))$; (f) $\cos(2\arctan(x))$; (i) $\cos^2(\arccos(x))$.

6. Limites e continuidade

Exercício 19.

Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$; (g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3 - 5x + 1}{2x^2 - 3x + 5}$; (j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$; (e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 3x + 4$; (h) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2(2x + 3)}$; (k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$;
(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$; (f) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 3x^2 + 4}$; (i) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 6x + 9}$; (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

Exercício 20.

Considere a função real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2x + \arccos(x) & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ \frac{x+5}{3} & , \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.
- (b) Aplicando o Teorema de Bolzano, mostre que existe $c \in]2, 4[$ tal que $h(c) = c$.

Exercício 21.

Determine os valores de a e b tais que, nos pontos indicados, tornam contínuas as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3x - 7, & x \geq 3 \\ ax + 3, & x < 3 \end{cases}, \text{ em } x = 3; & \text{(c)} \quad g(x) &= \begin{cases} x + a, & x < -2 \\ 3ax + b, & -2 \leq x \leq 1 \\ ax + 3, & x > 1 \end{cases}, \\ \text{(b)} \quad h(x) &= \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}, \text{ em } x = 0; & \text{em } x = -2 \text{ e } x = 1. \end{aligned}$$

Exercício 22.

Mostre que as seguintes funções têm um prolongamento por continuidade ao ponto $x = 0$ e defina esse prolongamento:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1-e^{3x}}{5x}; & \text{(b)} \quad g(x) &= 1 - \frac{\sin(x)}{x}; & \text{(c)} \quad h(x) &= 1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

7. Cálculo diferencial**Exercício 23.**

Sabendo que f é uma função bijetiva, que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f'(3) = 7$ e $f'(1) = 9$, calcule $(f^{-1})'(3)$.

Exercício 24.

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto indicado, nos seguintes casos:

- (a) $f(x) = x^3 + 3$, ponto $(4, 1)$;
- (b) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 1$, ponto $(1, 0)$;
- (c) $f(x) = 5x^2 e^{2x-4}$, ponto $(20, 2)$.

Exercício 25.

Considere a função «seno hiperbólico» definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$f(x) := \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (a) Justifique que $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bijeção e obtenha uma expressão para a respetiva função inversa «argsinh.»
- (b) Obtenha uma expressão para $\operatorname{argsinh}'$ e calcule $\operatorname{argsinh}'(0)$.
- (c) Calcule de novo $\operatorname{argsinh}'(0)$ utilizando desta vez o Teorema da derivada da função inversa.

Exercício 26.

Considere a função $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \frac{x+2}{x-3}$.

- (a) Mostre que f é invertível e que para todo o $x \neq 1$, $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$.
- (b) Utilizando a alínea anterior mostre que para todo o $x \neq 1$, $(f^{-1})'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$.
- (c) Obtenha novamente a expressão de $(f^{-1})'(x)$ utilizando desta vez o teorema de derivação da função inversa.

Exercício 27.

Calcule os limites:

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(2x)}{\sin(5x)}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(ex) - 1}{\sin(3x - 3)}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ |
| (c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y}{\tan(2y)}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{x^2-9}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{xe^{3x}} \right)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | (m) $\lim_{y \rightarrow +\infty} y(2 \arctan(3y) - \pi)$ |
| (f) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\arctan(t)}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{4x}}$ |
| (g) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha y)}{1 - \cos(\beta y)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{2}{x}\right) \right)^{\frac{\pi}{4}}$ |
| (h) $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - 1}$ | (p) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}}$ |

Exercício 28.

Verifique se o Teorema de Rolle é aplicável a:

- (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ no intervalo $[1, 2]$;
- (b) $g(x) = |x - 1|$ no intervalo $[0, 2]$.

Exercício 29.

Utilize o Teorema de Lagrange para demonstrar as seguintes desigualdades:

- (a) $|\sin(x)| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- (b) $|\cos(x) - 1| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- (c) $e^x > 1 + x$, para todo o $x > 0$.

Exercício 30.

Considere as funções definidas pelas expressões

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad h(x) = \ln(x), \quad \text{e} \quad i(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Calcule os polinômios de Taylor de ordens $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ de:

(i) f , centrados no ponto $a = 0$;

(iii) h , centrados no ponto $a = 1$;

(ii) g , centrados no ponto $a = 1$;

(iv) i , centrados no ponto $a = 16$.

(b) Trace (com uma calculadora ou um computador) o gráfico de cada uma destas funções e dos gráficos dos respectivos polinômios de Taylor de ordens 1 e 2.

(c) Utilize os polinômios de segunda ordem obtidos na primeira alínea para obter aproximações de

$$\sqrt[10]{e}; \quad \frac{1}{\sqrt{0,8}}; \quad \ln(1,1); \quad \sqrt{17}.$$

Verifique com uma calculadora a qualidade destas aproximações.

Exercício 31.

Considere a função i definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Obtenha uma aproximação de $\sqrt{17}$ com a ajuda do polinômio de Taylor de ordem 1 (a aproximação linear) centrado em $a = 16$ da função i .

(b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 centrada em $a = 16$ para a função i .

(c) Mostre que o erro cometido com a aproximação linear obtida para $\sqrt{17}$ na alínea (a) não excede $\frac{1}{512}$.

Exercício 32.

Considere as funções f e g definidas por $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.

(a) Explícite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 0$ para a função f .

(b) Explícite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 1$ para a função h .

(c) Utilizando as alíneas anteriores, majore o erro cometido no Exercício 30 nas aproximações de segunda ordem de $\sqrt[10]{e}$ e de $\ln(1,1)$.

Exercício 33.

Determine o polinômio de MacLaurin de ordem n das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) e^{3x}

(b) $\ln(1+2x)$

(c) $\sinh(2x)$

(d) $\sqrt{x+1}$

Exercício 34.

Determine os pontos críticos das seguintes funções e, para cada um deles, averigue se se trata de um minimizante local, de um maximizante local ou de um ponto de sela.

(a) $4x^3 - 8x - 12$

(d) $x + \frac{1}{x}$

(g) $\frac{x}{3^x}$

(j) $x \ln(x)$

(b) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

(e) $x^3 - \frac{2}{x}$

(h) $\frac{x}{1-x^2}$

(k) $e^x(x^2 - 1)^3$

(c) $x(x-3)^2 + 4$

(f) $\frac{x}{e^x}$

(i) xe^x

(l) $e^{2x-1}(x^2 - 3)^2$

Exercício 35.

Estude as concavidades e localize os pontos de inflexão das funções definidas pelas expressões

- | | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|-----------------------|
| (a) $5x - x^2$ | (d) $(x^2 - 9)^3$ | (g) xe^x | (j) $x - \sin(2x)$ |
| (b) $x^2 - 4x + 2$ | (e) $\frac{x}{x^2 + 4}$ | (h) e^{-3x^2} | (k) $x \arctan(x)$ |
| (c) $3x - x^5$ | (f) $\sqrt{3x}$ | (i) $\ln(1 - x^2)$ | (l) $ 2x^2 + 9x - 5 $ |

8. Cálculo integral**Exercício 36.**

Calcule as primitivas das funções definidas pelas seguintes expressões:

- | | |
|---|--|
| (a) $4x^3 + x^2 - x + 1;$ | (b) $\sin(3x) - \frac{1}{2}x^5 + \sqrt{x};$ |
| (c) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cos(5x);$ | (d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - e^{3x} - \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{5}e^{-2x};$ |
| (e) $\tan(x) + \frac{1}{1+x};$ | (f) $(2 - 4x)^5;$ |
| (g) $\sin(x)e^{\cos(x)};$ | (h) $x^2e^{x^3} - x\cos(x^2);$ |
| (i) $x^2(x^3 + 1)^3;$ | (j) $\frac{(1 + \ln(x))^5}{x};$ |
| (k) $\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x};$ | (l) $\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^{2x}};$ |
| (m) $\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)};$ | (n) $\sin^3(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x);$ |
| (o) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{x+5}{x+7};$ | (p) $\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{3+4x^2};$ |
| (q) $\frac{x^2+5x-2}{1+x^2};$ | (r) $\frac{x^2-7x+5}{9+x^2};$ |
| (s) $\frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}};$ | (t) $\frac{x^4}{e^{x^5}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$ |

Exercício 37.

Primitiva as funções racionais definidas pelas seguintes expressões:

- | | |
|--------------------------------|--|
| (a) $\frac{x}{x^2 - 3x + 2};$ | (b) $\frac{1}{(x^2 - 1)(x + 2)};$ |
| (c) $\frac{x}{x^2 + 4};$ | (d) $\frac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)};$ |
| (e) $\frac{x^3 + 3}{x^2 - 1};$ | (f) $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}.$ |

Exercício 38.

(a) Mostre que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

(b) Deduza da alínea anterior que $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ e que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Calcule $\int \cos^2(x) dx$ e $\int \sin^2(x) dx$.

(c) Inspirando-se nas alíneas anteriores e utilizando o binómio de Newton, calcule

$$\int \cos^4(x) dx \text{ e } \int \sin^6(x) dx.$$

Exercício 39.

Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à fórmula de primitivação por partes:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| (a) xe^{2x} ; | (g) $\arccos(x) + \arcsin(x)$; | (m) $x^2 \arctan x$; |
| (b) $x^2 \sin(2x)$; | (h) $\arctan(x) + \arctan(1/x)$; | (n) $x^3 e^{x^2}$; |
| (c) $(x^2 + x + 1)e^{3x}$; | (i) $e^x \sin(2x)$; | (o) $x \ln(x)$; |
| (d) $\arctan(3x)$; | (j) $e^{2x} \cos(x)$; | (p) xe^{x-2} ; |
| (e) $\ln(x)$; | (k) $\sqrt{x} \ln(x)$; | (q) $\sin^2(x)$; |
| (f) $\arccos(x)$; | (l) $\ln^2(x)$; | (r) $\cos^2(x)$. |

Exercício 40.

Calcule as seguintes primitivas recorrendo à substituição indicada:

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, x = \tan(t)$; | (b) $\int \frac{\tan(x)}{1 + \cos(x)} dx, t = \cos(x)$; |
| (c) $\int \frac{1}{(1 - \sin(x)) \cos(x)} dx, t = \sin(x)$; | (d) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx, x = \ln(t^2 - 1)$; |
| (e) $\int \sqrt{4-x^2} dx, x = 2 \cos(t)$; | (f) $\int \frac{t}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} dt, \text{ com } t = x^\alpha \text{ } (\alpha \in \mathbb{R} \text{ a escolher}).$ |

Exercício 41.

Considere as funções «cosseno hiperbólico» e «seno hiperbólico» definidas respetivamente por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$,

- (i) $\cosh' = \sinh$ e $\sinh' = \cosh$;
- (ii) $\sinh(2x) = 2 \cosh(x) \sinh(x)$;
- (iii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica).

(b) Recorrendo à mudança de variável $t = 2 \sinh(x)$ calcule $\int \sqrt{4+t^2} dt$.

Exercício 42.

Calcule geometricamente os seguintes integrais. Para verificar os resultados, calcule os integrais também de forma analítica. A expressão $\lfloor x \rfloor$ nas alíneas (c) e (e) representa a função $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

(a) $\int_0^3 (2x - 4) dx$

(c) $\int_{-2}^3 \lfloor x \rfloor dx$

(e) $\int_1^0 \lfloor 3x \rfloor dx$

(b) $\int_0^2 (4x - 2) dx$

(d) $\int_{-1}^1 t \cos(t) dt$

(f) $\int_a^b x dx$

Exercício 43.

Calcule cada um dos seguintes integrais definidos:

(a) $\int_0^2 4x^3 dx$

(f) $\int_1^4 \left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

(j) $\int_1^e \frac{1}{x(1+x^2)} dx$

(b) $\int_2^3 (6x^2 - 1) dx$

(g) $\int_2^3 -\frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

(k) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(c) $\int_4^5 (4x + 3) dx$

(h) $\int_2^3 \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$

(l) $\int_0^1 3(x^4 + 4x)(x^5 + 10x^2)^6 dx$

(d) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx$

(i) $\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$

(m) $\int_{\pi}^0 \sin(x) \cos^3(x) dx$

(e) $\int_4^9 \sqrt{x} dx$

Exercício 44.

Usando o integral definido, calcule a área da região do plano definida por:

(a) $y \leq 9 - x^2, y \geq x^2$

(d) $y \leq \frac{1}{x}, 0 < y \leq x, x \leq 4$

(g) $y = \frac{1}{2}x, y = x, y = x^2$

(b) $y \geq x, y \leq 2 - x^2$

(e) $y = x^4 - 4x^2, y = \sqrt{4 - x^2}$

(h) $x^2 \leq y \leq \frac{1}{x}, x \geq 0, y \leq 2$

(c) $y \leq 5, y \geq -5x + 5, y \geq \ln(x)$

(f) $y = \sqrt[3]{x}, y = \sqrt{x}$

(i) $0 \leq y \leq x^2, y \leq \frac{1}{x^2}, 0 \leq x \leq 2$

Exercício 45.

Mostre que se f é contínua em $[a, b]$ e se $\int_a^b f(x) dx = 0$, então f possui pelo menos uma raiz em $[a, b]$.

Exercício 46.

Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$ define-se a «média de f no intervalo $[0; x]$ » por

$$M_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

(a) Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} M_f(x)$.

(b) Prove que M_f é constante se e só se f é constante.

(c) Prove que o contradomínio de M_f está contido no de f .

Exercício 47.

Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(t^2 + 1) dt}{x^3};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{x^2}.$$

Exercício 48.

Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das seguintes funções:

$$(a) G(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(b) H(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt;$$

$$(c) I(x) = \int_0^{2x} \ln(t+2) dt.$$

Exercício 49.

Seja, para $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$. Mostre que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

Exercício 50.

Para $t \in [0; 1]$ considere $x = \arctan(t)$.

$$(a) \text{ Mostre que } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ e que } \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$(b) \text{ Seja } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)(1+\sin^2(x))} dx. \text{ Procedendo à substituição } x = \arctan(t), \text{ mostre que}$$

$$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+2t^2)(t+1)} dt.$$

$$(c) \text{ Calcule } I.$$

Exercício 51.

Calcule os seguintes integrais impróprios (ou mostre que são divergentes):

$$(a) \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$$

$$(c) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$$

$$(e) \int_3^5 \frac{1}{x-3} dx$$

$$(b) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(d) \int_0^1 \ln(x) dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

II - Exercícios de Álgebra Linear

1. Vetores

Exercício 52.

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstre as seguintes propriedades:

- (a) $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- (b) $u + v = v + u$;
- (c) $\mathbf{0} + v = v$;
- (d) $v + (-v) = \mathbf{0}$;
- (e) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- (f) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
- (g) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$;
- (h) $1u = u$.

Exercício 53.

Sejam $u = (-1, 3, 4)$, $v = (2, 1, -1)$, $w = (-2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Calcule:

- (a) $\|u\|$;
- (b) $\|v\|$;
- (c) $\|u + v\|$;
- (d) $\| -u \|$;
- (e) $u \cdot (v + w)$;
- (f) $d(u, v)$.

Exercício 54.

Mostre que:

- (a) $\|u\| \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$;
- (b) $\|v\| = 0$ se e só se $v = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$;
- (c) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

Exercício 55.

Considere o vetor $v = (2, 4, -3)$. Determine se v é ou não combinação linear dos seguintes vetores:

- (a) $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 0, 1)$;
- (b) $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 1)$;
- (c) $a = (2, 0, 0)$, $b = (1, 3, 0)$, $c = (1, 1, 1)$;
- (d) $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 0, 2)$, $c = (3, 1, 3)$.

Exercício 56.

Averigue se as seguintes famílias de vetores são linearmente independentes:

- (a) $\underline{a} = \{(-2, 4), (1, -2)\}$;
- (b) $\underline{b} = \{(2, 1), (-6, -3)\}$;
- (c) $\underline{c} = \{(2, 3), (3, 2)\}$;
- (d) $\underline{d} = \{(0, 0, 3), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\}$;
- (e) $\underline{e} = \{(2, 0, 0, 0), (1, 3, 0, 0), (4, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\}$;
- (f) $\underline{f} = \{(1, 1, 1, 1), (0, -2, 3, 5), (3, 3, 3, 3), (1, 2, 2, -7)\}$.

Exercício 57.

Seja $\underline{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma família de p vetores de $\mathbb{R}^n$ não nulos e dois a dois ortogonais.

- (a) Mostre que a família $\underline{u}$ é linearmente independente.
- (b) Aplicação: mostre que a família $\underline{u} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (-3, 0, 3, 0)\}$ é linearmente independente.

Exercício 58.

Discuta, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a independência linear das seguintes famílias de vetores:

- (a) $\underline{u} = \{(3, -1), (1, 1 + \lambda)\}$;
- (b) $\underline{u} = \{(1, -2), (\lambda, -1)\}$;
- (c) $\underline{v} = \{(1, 2, 3), (-2, \lambda, -6)\}$.

Exercício 59.

Considere uma família $\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a família formada pelos vetores $v_1 = 2u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$ e $v_3 = u_1 + 3u_3$ é também linearmente independente.

Exercício 60.

Mostre que um conjunto de k vetores de $\mathbb{R}^n$, com $k \geq 2$, é linearmente dependente se e só se um dos vetores for combinação linear dos restantes.

Exercício 61.

Mostre que se o vetor nulo pertencer a um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$, então o conjunto é linearmente dependente.

2. Matrizes

Exercício 62.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique quais das seguintes operações estão definidas e calcule, se for o caso, a matriz resultante:

- | | | | |
|---------------|----------------|-----------------|------------|
| (a) $3A$ | (e) AB | (i) $(AC)^2$ | (m) AC . |
| (b) $A + B$ | (f) $(CD)^T$ | (j) $(2A - BD)$ | (n) CA . |
| (c) $B + C$ | (g) $(2A)(5C)$ | (k) $A^T A$ | |
| (d) $4C - 2D$ | (h) A^2 | (l) $BC - CB$ | |

Exercício 63.

Determine os valores do parâmetro real α para os quais a matriz seguinte é simétrica:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & -3 \\ \alpha + 1 & 2 & \alpha^2 + 4 \\ -3 & 4\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 64.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Explicite as dimensões das seguintes matrizes:

- (a) A^T
- (b) AA^T
- (c) $A^T A$.

Exercício 65.

Sejam A, B e C matrizes quadradas da mesma dimensão. Indique quais das seguintes proposições são necessariamente verdadeiras e forneça um contra-exemplo para as restantes.

(a) $A = B \Rightarrow AC = BC.$

(d) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0.$

(b) $AC = BC \Rightarrow A = B.$

(e) $A + C = B + C \Rightarrow A = B.$

(c) $AB = BA.$

(f) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I.$

Exercício 66.

Seja A uma matriz quadrada tal que $A^T = 4A$. Mostre que A é a matriz nula.

Exercício 67.

Sejam $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(C_j)_{1 \leq j \leq m}$ as famílias dos vetores linha e dos vetores coluna de uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Mostre que se estas famílias forem ambas linearmente independentes, A é uma matriz quadrada.

Exercício 68.

Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & -12 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 19 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -12 & 20 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 69.

Discuta a característica das seguintes matrizes em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{bmatrix} t & 0 & t^2 - 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & t & t - 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} t+3 & 5 & 6 \\ -1 & t-3 & -6 \\ 1 & 1 & t+4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{bmatrix}$

Exercício 70. Considere, para $a, b \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ a & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $B = A^{-1}$, determine os valores de a e de b .

Exercício 71.

Mostre que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule a respectiva matriz inversa:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 72.

Mostre que uma matriz diagonal é invertível se e só se nenhum elemento da diagonal for nulo.

Exercício 73.

Seja A uma matriz quadrada tal que $5AA^T + 2A + 5I = 0$. Mostre que A é invertível, e deduza a sua inversa em função de A .

Exercício 74.

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n .

- (a) Mostre que $B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB .
- (b) Resolva a equação matricial $XA^{-1} + (AB)^{-1} = A$, em ordem a X .

Exercício 75.

Para cada matriz A , efetue o cálculo indicado, deduza que A é invertível e explice A^{-1} .

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^2 + A$. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 - A$. (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A^2 - 6A + 9I$.

3. Determinantes

Exercício 76. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine A^{-1} e B^{-1} .
- (b) Calcule o determinante das matrizes A , B , A^T , B^T , $2A$, $3B$, AB , BA , A^{-1} , B^{-1} e $A^{-1}B$, identificando as propriedades que os cálculos ilustram.

Exercício 77.

Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det(A) = 2$. Calcule

(a) $\det(A^2)$

(b) $\det(3A)$

(c) $\det(-A^{-1})$

(d) $\det(2A^T)$

(e) $\det(AA^TA^{-1})$

(f) $\det\left(\frac{1}{2}A^4\right)$.

Exercício 78.

Considere uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertível. Mostre que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exercício 79.

Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & a & a \\ b & b & b & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, onde a e b são dois parâmetros reais.

Sabe-se que $\det(C) = 5$. Calcule o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2a & 2a & 2a & 2a \\ 7b & 7b & 7b & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 80.

Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exercício 81.

Calcule os determinantes das seguintes matrizes em função dos parâmetros reais a , b e c :

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ b & 0 & a & a \\ 0 & b & a & a \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{bmatrix}$

Exercício 82.

Determine para que valores do parâmetro real λ as seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Sistemas de equações lineares

Exercício 83.

Para cada um dos seguintes sistemas lineares:

- (1) Explicite a matriz ampliada correspondente e reduza-a a uma matriz em escada;
- (2) Classifique o sistema e determine, se pertinente, o respectivo número de graus de liberdade;
- (3) Resolva explicitamente o sistema.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} -2x - 3y + z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases} \\ \text{(d)} \begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ x + 5y - 8z + w = 1 \\ 4x + 5y - 7z + 7w = 7 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 3y + 2z + 4w = 0 \\ 2x + y - w = 1 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ 2x - y + z - 3w = 1. \end{cases} \end{array}$$

Exercício 84.

Classifique os sistemas seguintes em função dos parâmetros reais a e b :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + az = 2 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = a^2 \\ x + 3y = a^3 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} ax + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + y + 3z = 6 \end{cases} \\ \text{(d)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z - y + 2z = a \\ 2x + bz = 2 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} 2x + y = b \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = 2 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} by + az = 1 \\ y + az = 0 \\ x + by = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercício 85.

Mostre que o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - 3z = -3. \end{cases}$ é de Cramer e determine a respetiva solução.

Exercício 86.

Mostre que o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1. \end{cases}$ é de Cramer e determine o valor da incógnita z da solução.

Exercício 87.

Mostre que, independentemente dos valores dos parâmetros reais a , b e c , o sistema $\begin{cases} 3x + y = a \\ x - y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = c \end{cases}$ é possível e determinado e calcule a respetiva solução de duas formas:

- (a) Utilizando as fórmulas ditas de Cramer;

(b) Começando por calcular a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.