Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II - 2º Semestre - 2022/2023

Exame da Época de Recurso - 29 de junho de 2023

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que os vetores da forma $(0, 0, c)$, com $c \neq 0$, são vetores próprios de $\mathbf{A}$. Determine também quais os valores de α e de β para os quais $\lambda = 1$ é valor próprio de $\mathbf{A}$, com multiplicidade algébrica 2.
   (b) Faça $\beta = \sqrt{3}$ e considere $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$. Classifique, em função dos valores de α, a forma quadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$, com $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a função $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$, cuja expressão analítica é dada por:
$$f(x, y) = \sqrt{1 - y} \times \sqrt{-xe^x} \times \ln\left(\frac{2x + e^y}{1 + x^2}\right).$$
   (a) Determine o domínio de f, D_f (simplifique as expressões que o definem).
   (b) Mostre que D_f não é limitado e pronuncie-se quanto à sua compacidade.
   (c) Defina analiticamente o conjunto $fr(D_f)$.

3. Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$.
   (a) Calcule, ou prove que não existe, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
   (b) Sendo $\partial_{(2,3)} f(0, 0)$ a derivada da função f no ponto $(0, 0)$ segundo o vetor $(2, 3)$, mostre que
$$\partial_{(2,3)} f(0, 0) \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (2, 3).$$
   (c) O que pode afirmar sobre a diferenciabilidade da função f no ponto $(0, 0)$?
   (d) Sem efectuar cálculos, baseando-se apenas na resposta que deu na alínea c), é possível decidir sobre a continuidade da função f no ponto $(0, 0)$?

4. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9\}$ e defina a função f pela expressão $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y$. Justifique que a função f tem extremos globais no conjunto A e determine-os.

5. Considere o conjunto limitado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 2y\}$. Represente graficamente o conjunto e calcule $\iint_C \left(2x - y^2\right) \, dxdy$.

6. Considere a seguinte equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 4x$.
   (a) Determine a solução geral da equação diferencial.
   (b) Determine a solução da equação diferencial que verifica as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

7. Seja a função real $g \in C^2(\mathbb{R})$, uma função positiva e tal que $g'(1) = 0$. Determine e classifique todos os pontos críticos da função

$$f(x, y) = (1 - x)\, y + \ln(g(x)).$$

Cotações:

1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)	4	5	6(a)	6(b)	7
1.5	1.5	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0	1.5	2.0