Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II - 2º Semestre - 2022/2023

Exame da Época Normal - 5 de junho de 2023

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$.
   (a) Classifique, em função dos valores de a e de b, a forma quadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x}$, com $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Faça $b = 1$ e determine o valor de a para o qual $\lambda = 2$ é valor próprio da matriz $\mathbf{A}$. Determine os vetores próprios de $\mathbf{A}$ associados a esse valor próprio.

2. Considere a função $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$, cuja expressão analítica é dada por:
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y - 1} \times \ln(2x - x^2)}{\sqrt{y}}.$$
   (a) Determine D_f, o domínio de f.
   (b) Determine analiticamente a aderência do conjunto D_f. Pronuncie-se quanto à compacidade de D_f.
   (c) Determine um ponto da forma $(3/2, b) \in D_f$ tal que $f(3/2, b) = 0$ e dê exemplo de uma sucessão não constante (a_n, b_n) de termos em D_f e que convirja para $(3/2, b)$.

3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x+y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$.
   (a) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,1)$.
   (b) Indique segundo que vetores (v_1, v_2) existe derivada direcional da função f no ponto $(0,1)$ e, para os casos em que exista, calcule-a.

4. Determine e classifique todos os pontos críticos da função
$$f(x,y) = y(x+2)^2 + xy^2 - yx^2.$$
   Sem efectuar qualquer cálculo justifique que: i) a função f tem máximo e mínimo absolutos no conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 \leq 10\right\}$; ii) os extremos absolutos encontram-se na fronteira do conjunto A.

5. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x \leq 1 \wedge y \leq e^x \wedge y \geq x\}$. Represente graficamente o conjunto e calcule $\iint_A \left(y^2 + x\right) dxdy$.

6. Considere a seguinte equação diferencial

$$y' = x(1+x)(2y-1)$$

.

(a) Determine a solução geral da equação diferencial.

(b) Supondo que $y(0) = 1$, calcule o valor de $y(1)$.

7. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = g(xy, x^2 + y^2).$$

(a) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em função das derivadas parciais de g.

(b) Considere que a função g é homogénea de grau 4. Mostre que a função f também é homogénea e calcule o valor de $f(2, 2)$, sabendo que $g(1, 2) = \frac{1}{4}$.

Cotações:

1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)	3(b)	4	5	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)
1.5	1.5	1.5	1.5	1.0	1.5	2.0	2.5	2.0	1.5	1.0	1.0	1.5