Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº1

1. Calcule a soma das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(5n+1)}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+k)},\ k \in \mathbb{N}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$;

2. Prove que se existe e é finito $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+k})$ é convergente e a sua soma é $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k \times \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

3. Sendo (a_n) uma sucessão real tal que $a_n \to +\infty$, indique, justificando, a natureza da série
$$\sum \frac{a_n}{1+a_n};$$

4. Estude, utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, a natureza das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt[3]{n^2+n}}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n-\sqrt{n^2-1})$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^3}$;

5. Utilize o critério do integral para decidir sobre a convergência ou divergência da seguinte série:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}.$$

6. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$.

   (b) $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n} a_n$.

7. Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

   a) $0 < a < b$; b) $0 < b \leq a < 1$; c) $1 \leq b \leq a$.

8. Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos tais que a série $\sum a_n$ e a série $\sum(b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que a série $\sum(a_n b_n)$ é também uma série convergente.

Nota: Os exercícios que aqui se apresentam são retirados de vários textos de Análise Matemática, entre os quais o livro "Introdução à Análise Matemática" de J. Campos Ferreira.