Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº2

1. Considere $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, se as séries

$$a)\sum\left(\frac{a_n}{1+b_n}\right) \qquad b)\sum\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right) \qquad c)\sum a_n b_n$$

são necessariamente convergentes, necessariamente divergentes ou se a sua convergência ou divergência depende das sucessões a_n e b_n consideradas.

2. Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+3}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)^3\sqrt{n^3+1}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n4^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^n}{n!}, \quad k\in\mathbb{R}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^2}$;

3. Estude, quanto à convergência, as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n n^n}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)\ldots(\pi+n)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{3.6.9.\ldots(3n+3)}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\left(tg\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+3n+2}{n^3+\sqrt{n}+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n).n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+k_1)!}{(n+k_2)!n!}$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{\pi}{n})$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n}}$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}$;

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n.n!}{(2n+1)!}$;

4. Considere a seguinte série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

   (a) Justifique que se trata de uma série convergente e calcule a soma da série com erro inferior a $0,01$.

   (b) Indique um majorante do erro que comete quando toma para soma da série a soma dos 3 primeiros termos.

5. Determine, se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries cujos termos de ordem n são:

   a) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; b) $\dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{n^2+n+3}$; c) $\dfrac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}}$;

6. Indique para que valores de α as seguintes séries são simplesmente convergentes, absolutamente convergentes ou divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\cos(\alpha))^n$;