Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº5

1. Mostre que a série de funções

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n-1}} \right)$$

converge pontualmente em $[0, 1]$ mas não uniformemente.

2. Considere a função $f(x) = e^x$.

   (a) Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de MacLaurin para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Aproveite o resultado provado na alínea anterior para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

3. Utilize alguns dos desenvolvimentos em séries de MacLaurin que conhece para escrever o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:

   (a) $f(x) = a^x$, $a > 0$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$;

   (c) $f(x) = \arctan(x)$;

4. (a) Desenvolva em série de potências de $(x - 2)$ a função $f(x) = \dfrac{4}{3x}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

   (b) Utilize o resultado obtido na alínea anterior para determinar o valor de $f^{(17)}(2)$.

5. Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e defina, analiticamente, o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

   (a) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1\}$;

   (b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$;

Dos três exercícios que se seguem (6, 7 e 8) escolha dois para resolver:

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

   Determine o domínio de f, D_f, represente-o geometricamente e diga, justificando se D_f é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

7. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(2 - sen(x))(y - x^2)}}{ln(x + y - 2)}.$$

   (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

   (b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

8. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \ln(xy)\sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2}.$$

   (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

   (b) Defina, analiticamente, a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.