Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº6

1. Considere o seguinte conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}.$$

   (a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a X que convirja para um ponto que não pertence a X.
   (b) Poderia encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X? Justifique.

2. Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$;
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$;
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$;
   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$;
   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin(\log(x+y))}$;

3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ função tal que

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}.$$

   (a) Para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ seja $A_{k,m} = \{(x, y) \in D_f : y = mx^k\}$.
   Calcule, para cada par (k, m) tal que $(k, m) \neq (1, -1)$ (visto que a recta $y = -x$ não pertence ao domínio de f) o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.
   (b) Considere o conjunto $B = \{(x, y) \in D_f : y = -x + x^2\}$ e calcule o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto B.
   (c) Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0, 0)$? Justifique.

4. Determine o parâmetro real α de modo a que a seguinte função tenha limite no ponto $(1, 1)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} + \alpha & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5. Mostre que o seguinte limite não existe
$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx},$$
através do cálculo de alguns dos seus limites sucessivos.
6. Considere a função f definida por $f(x,y) = x\ln(xy)$.
   (a) Determine o dominio de f e indique, se possível, uma sucessão de pontos pertencentes ao domínio de f cujo limite não pertence ao domínio de f.
   (b) Mostre que, para qualquer semirecta S com origem no ponto $(0,0)$ contida no domínio de f, o valor do limite de f na origem relativo ao conjunto S, isto é,
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$$
   é sempre o mesmo.
   (c) Prove que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (sugestão: estude o limite relativo ao conjunto $\{(x,y)\in D_f : y = e^{-\frac{1}{x^2}}\}$)