UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MICROECONOMICS

2009/2010

References:

- Gibbons, R. (1992), *A Primer in Game Theory*, Harvester Wheatsheaf (G)
- Mas-Collel, A., M. Whinston, and J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York (MWG)
- Varian, H. (1992), *Microeconomic Analysis*, Norton, New York (V)

GAME THEORY

Exercício 55

Dados os seguintes jogos com dois jogadores, *A* em linha e *B* em coluna:

1.

Estratégias	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*
A1	5, 10	0, 11	1, 10	10, 20
A2	4, 0	1, 0	2, 0	20, 1
A3	3, 2	0, 4	4, 3	50, 1
A4	2, 93	0, 92	0, 91	100, 90

2.

Estratégias	*B1*	*B2*	*B3*
A1	3, 3	0, 3	0, 0
A2	3, 0	2, 2	0, 2
A3	0, 0	2, 0	1, 1

Identifique, através de um processo iterativo, as estratégias dominadas e reduza os jogos às estratégias racionalizáveis.

Exercício 56

Considere um jogo em que cada um dos dois jogadores, A e B, anuncia um número inteiro não negativo igual ou inferior a 100 (representados por s_A e s_B). Se $s_A + s_B \leq 100$, cada jogador recebe um montante de s_i, i = A, B. Se $s_A + s_B > 100$ e $s_i < s_j$, então o jogador i recebe s_i e j recebe 100 - s_i. Por fim, se $s_A + s_B > 100$ e $s_i = s_j$, cada jogador recebe 50. Resolva este jogo por eliminação sucessiva de estratégias dominadas.

Exercício 57

Uma sociedade constituída por três indivíduos {1, 2, 3} tem que eleger um dos candidatos a, b ou c. Os conjuntos de estratégias dos três indivíduos são $S_1 = S_2 =$

S_3={a, b, c} e o resultado da eleição determina-se do seguinte modo: com os votos (s_1, s_2, s_3), o candidato eleito é s_2 se s_2=s_3 e s_1 se $s_2 \neq s_3$. Suponha ainda que a utilidade dos membros da sociedade é dada pelo seguinte:

$$u_1(a) > u_1(b) > u_1(c)$$
$$u_2(b) > u_2(c) > u_2(a)$$
$$u_3(c) > u_3(a) > u_3(b)$$

Resolva o jogo por eliminação sucessiva de estratégias dominadas.

Exercício 58

As empresas A e B querem contratar um trabalhador. Os salários oferecidos são diferentes, satisfazendo a condição $\frac{1}{2}w_A < w_B < 2w_A$, onde w_i é o salário oferecido pela empresa *i*. Suponha que existem dois trabalhadores e que cada trabalhador só pode concorrer a uma única empresa. Admita ainda que os dois trabalhadores decidem simultaneamente a qual empresa vão concorrer e as contratações são feitas de acordo com a seguinte regra: se apenas um trabalhador concorre a uma empresa, ele é imediatamente contratado por essa empresa; se os dois trabalhadores concorrem à mesma empresa, esta contratará aleatoriamente um deles, e o outro fica desempregado (situação a que se atribui uma utilidade de 0).

i. Formalize esta situação como um jogo estratégico entre os dois trabalhadores e represente o jogo na sua forma normal.
ii. Determine os equilíbrios de Nash.

Exercício 59

Considere o oligopólio de Cournot com *n* empresas, em que cada uma delas escolhe simultaneamente a quantidade a produzir. Seja q_i a quantidade que a empresa *i* coloca no mercado e seja $Q = q_1 + ... + q_n$ a quantidade total colocada no mercado. Seja *p* o preço de equilíbrio e assuma que a procura inversa do mercado é dada por: $p(Q)$= max{0, a-Q}. Os custos totais de produção da quantidade q_i pela empresa *i* são dados por $c_i(q_i) = c_i\, q_i$, com $c_i < a$ para todo i=1,..., n.

Considere que as firmas se comportam de forma racional e têm conhecimento comum das situações e elementos que caracterizam o jogo.

i. Assuma que $c_i = c$ para todo i=1,..., n. Determine, como função de n, as quantidades, o preço e os lucros de cada empresa no equilíbrio de Cournot (equilíbrio de Nash).

ii. Determine os limites das funções obtidas em i. quando n tende para infinito. Interprete o resultado.

iii. Assuma n =2. Qual é o equilíbrio de Cournot se $0 < c_i < \frac{a}{2}$ para cada empresa? E se $c_1 < c_2 < a$, mas $2c_2 > a + c_1$?

Exercício 60

Determine as correspondências melhor resposta, represente graficamente (se possível) e determine todos os equilíbrios de Nash dos seguintes jogos:

1.

Estratégias	*B1*	*B2*
A1	0, 1	0, 2
A2	2, 2	0, 1

2.

Estratégias	*B1*	*B2*
A1	6, 0	0, 6
A2	3, 2	6, 0

3.

Estratégias	*C1*			*C2*		
		B1	*B2*		*B1*	*B2*
	A1	1, 1, 1	0, 0, 0	*A1*	0, 0, 0	0, 0, 0
	A2	0, 0, 0	0, 0, 0	*A2*	0, 0, 0	2, 2, 2

Exercício 61

Os jogadores 1 e 2 escolhem simultaneamente um número inteiro positivo menor ou igual a K. Se escolherem o mesmo número, o jogador 2 paga 1€ ao jogador 1; caso contrário, não é efectuado nenhum pagamento. Determine o único equilíbrio de Nash do jogo.

Exercício 62

Existem n cidadãos que pretendem ser candidatos e estão com dúvidas sobre o perfil ideológico a tomar. Há um contínuo de eleitores, cada um com um perfil ideológico determinado; a distribuição do posicionamento ideológico é dada por uma função uniforme com densidade unitária. Os candidatos escolhem simultaneamente o seu perfil ideológico e cada candidato atrai os votos dos cidadãos cujo perfil ideológico for mais próximo do seu que dos outros candidatos. Se k candidatos escolhem o mesmo posicionamento, cada um recebe uma fracção $1/k$ dos votos que o seu posicionamento atrai. O vencedor é o candidato que tiver mais votos e o objectivo de cada candidato é ganhar as eleições.

i. Formalize esta situação como um jogo em formato estratégico
ii. Encontre o ou os equilíbrios de Nash para n=2.
iii. Existe algum equilíbrio de Nash para n=3?

Exercício 63 *(First- price sealed-bid auction)*

Considere o seguinte leilão: um objecto é atribuído a um participante i (i = 1, 2,…, n) contra uma oferta. A valorização do objecto feita pelo participante i é $v_i \quad (v_1 > v_2 > ... > v_n)$. O mecanismo usado para atribuir o objecto é um leilão em que os participantes submetem as suas ofertas (não negativas) simultaneamente em envelope fechado.
O objecto é atribuído ao participante com o índice mais baixo de entre aqueles que fizeram a maior oferta, contra o pagamento desta oferta.

i. Determine o conjunto de equilíbrios de Nash para n=2.
ii. Determine o conjunto de equilíbrios de Nash para qualquer valor de n.

Exercício 64 *(Second- price sealed-bid auction)*

Dois jogadores (1 e 2) participam no leilão de um quadro. As valorizações que os jogadores atribuem à posse do quadro são do conhecimento comum e satisfazem

$v_1 > v_2 > 0$. Cada jogador faz uma oferta (número não negativo) em envelope fechado; as ofertas são representadas por x_1 e x_2. O leiloeiro recolhe e abre os envelopes, atribuindo o quadro ao jogador que fez a maior oferta, mediante o pagamento do montante da oferta do outro jogador. Assume-se que se as duas ofertas forem iguais, é o jogador 1 que recebe o quadro.

i. Encontre e represente graficamente as correspondências melhor resposta dos jogadores.

ii. Obtenha graficamente o conjunto de equilíbrios de Nash.

Exercício 65

Considere o jogo Guerra dos Sexos com a seguinte matriz de pagamentos:

	Bach	*Stravinski*
Bach	3, 1	0, 0
Stravinski	0, 0	1, 3

i. Determine o conjunto de equilíbrios de Nash deste jogo de informação completa.

ii. Introduza informação incompleta no jogo e calcule um equilíbrio Bayes-Nash em estratégias puras que se aproxima do equilíbrio em estratégias mistas do jogo de informação completa à medida que o grau de ignorância de cada jogador sobre o tipo do oponente tende a desaparecer.

(Ver **Gibbons**, pp.152-154).

Exercício 66

Duas empresas escolhem simultaneamente entrar ou não entrar num mercado. O custo de entrada da empresa i, $\theta_i \in [0,+\infty[$, é do conhecimento apenas da empresa i. Os custos de entrada de cada empresa são realizações independentes de uma variável aleatória com função de distribuição $P(\ )$ e densidade estritamente positiva $p(\ )$. O resultado que a empresa i obtém é $\prod^m - \theta_i$ se for a única a entrar no mercado, $\prod^d - \theta_i$ se entrarem as duas empresas e 0 se não entrar. $\prod^m$ e $\prod^d$ representam os lucros de monopólio e de duopólio, respectivamente, e são do conhecimento comum. Assuma que $\prod^m > \prod^d > 0$. Determine um equilíbrio de Bayes-Nash.

Exercício 67

Determine todos os equilíbrios de Bayes-Nash do seguinte jogo de informação incompleta:

(a) A Natureza escolhe a matriz do jogo: J_1 ou J_2 com igual probabilidade;
(b) O jogador 1 observa a escolha da Natureza, mas o jogador 2 não;
(c) O jogador 1 escolhe *C* ou *B*; simultaneamente, o jogador 2 escolhe *E* ou *D*.

J_1	*E*	*D*
C	1, 1	0, 0
B	0, 0	0, 0

J_2	*E*	*D*
C	0, 0	0, 0
B	0, 0	2, 2

Exercício 68

Suponha que dois jogadores, 1 e 2, partilham 1€ usando o seguinte procedimento: cada jogador i escolhe um número, representado por s_i, com $s_i \in [0, 1]$, $i = 1,2$; a escolha é simultânea; se $s_1 + s_2 \leq 1$, cada jogador recebe o montante correspondente ao número escolhido; se $s_1 + s_2 > 1$ ambos recebem 0.

i. Determinar os equilíbrios de Nash (em estratégias puras) deste jogo.

Suponha que o jogador 2, antes de escolher s_2, observa o número escolhido pelo jogador 1 e este facto é do conhecimento comum.

ii. Determine os equilíbrios de Nash (em estratégias puras) do jogo modificado.

iii. Determine os equilíbrios de Nash perfeitos nos sub-jogos (em estratégias puras) do jogo modificado.

Exercício 69

Considere o seguinte jogo com dois jogadores. O jogador 1 pode escolher *Parar* ou *Continuar*. Se escolher *Parar*, o jogo termina e cada jogador recebe 1 u.m.. Se o jogador escolher *Continuar*, então os dois jogadores escolhem simultaneamente números inteiros não negativos e cada jogador recebe o produto dos dois números escolhidos.

i. Formule esta situação como um jogo dinâmico (não finito) com informação imperfeita.
ii. Determine o conjunto de equilíbrios de Nash perfeitos nos sub-jogos.
iii. Como se altera este conjunto se os números inteiros não negativos escolhidos pelos dois jogadores forem, no máximo, iguais a $M > 0$?

Exercício 70

Considere o seguinte Dilema dos Prisioneiros *G*:

	E	*D*
C	3, 3	0, 4
B	4, 0	1, 1

1. O perfil de estratégias do tipo "tit-for-tat" é um equilíbrio de Nash de $G(10)$?
2. Prove que o perfil de estratégias "tit-for-tat" é um equilíbrio de Nash de $G(\infty, \delta)$, com $½ \le \delta < 1$.
3. Determine outro equilíbrio de Nash (diferente de "tit-for-tat") de $G(\infty, 3/4)$.

Exercício 71

Considere o duopólio de Cournot em que duas empresas 1 e 2 escolhem quantidades q_1 e q_2, defrontam uma procura inversa $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$ e têm custo marginal constante c.

i. Calcule a quantidade de equilíbrio de Nash num jogo estático q_c e calcule a quantidade de monopólio, q_m, que as duas unidades produziriam conjuntamente se fossem estabelecimentos da mesma empresa.

ii. Determine o factor de desconto δ que as empresas devem partilhar para que, usando "estratégias desencadeadoras" num jogo infinitamente repetido, produzam sempre $\frac{q_m}{2}$.

iii. Responda à alínea anterior, supondo que as empresas produzem indefinidamente uma quantidade $\hat{q}$ estritamente compreendida entre q_c e $\frac{q_m}{2}$. Determine a relação entre a quantidade $\hat{q}$ que pode ser sustentada num jogo infinitamente repetido e o valor do factor de desconto.

Exercício 72

Considere o modelo do duopólio de Bertrand como um jogo entre duas empresas, produzindo um produto homogéneo. As empresas têm a mesma tecnologia de produção, que se traduz num custo marginal constante. A procura dirigida à empresa *i* é igual a $a - p_i$, *i*=1,2.

Encontre e caracterize:

1. o equilíbrio num jogo simultâneo;
2. o equilíbrio num jogo simultâneo repetido num número finito de vezes;
3. o equilíbrio num jogo simultâneo repetido indefinidamente e em que as empresas têm o mesmo factor de desconto.