Capítulo 2

A teoria da agência e o problema de risco moral

Neste e no próximo capítulo vamos considerar relações bilaterais em que uma parte delega na outra parte a capacidade para agir em sua representação. A parte que delega é designada por delegante e a outra parte é designada por *agente*[1]. Existem dois elementos essenciais na teoria de agência: um é o facto de existir conflito de interesses (o delegante e o agente não têm os mesmos objectivos); o outro é o facto de existir alguma assimetria de informação entre as duas partes.

Se pensarmos na relação entre o gestor de uma empresa e os accionistas dessa mesma empresa veremos que estamos na presença de uma relação de agência. O objectivo do gestor é maximizar a sua utilidade, que pode ser influenciada por factores como o salário, pelo seu estatuto social, pelos benefícios marginais associados ao seu cargo (como o carro, o gabinete, ...). Em contrapartida, o objectivo dos accionistas é maximizar o valor da empresa. Por conseguinte, o elemento de conflito de interesses está presente nesta relação. O elemento de assimetria de informação nesta relação pode estar presente de várias formas. Por um lado, os resultados da empresa dependem das capacidades do gestor e pode acontecer que o gestor conheça melhor as suas capacidades do que os accionistas que o contratam (o gestor tem informação privada). Por outro lado, os resultados da empresa dependem também do esforço dispendido pelo gestor nas suas tarefas e é natural que não seja possível para os accionistas observar o esforço do gestor (os accionistas têm menos informação sobre o nível de esforço do que o próprio gestor). As várias fontes de assimetria de informação correspondem a diferentes tipos de problemas de agência. Quando, no momento em que o contrato é feito, já existe assimetria de informação temos um problema de selecção adversa. Se a assimetria de informação só ocorre depois do contrato ter sido assinado e resulta da não observabilidade da acção do agente temos um problema de

[1] Em inglês é usual designar a teoria da agência por *principal-agent theory*.

risco moral ou acção oculta *(hidden action)*. Quando assimetria de informação só surge após o contrato ter sido assinado e resulta de o agente ter acesso a mais informação que o delegante, temos um problema de informação oculta *(hidden information)*.

Neste capítulo vamos começar por descrever os vários tipos de problemas de agência. De seguida, estudamos o problema de risco moral. Os problemas de selecção adversa e informação oculta são analisados no próximo capítulo.

2.1 Os vários tipos de problemas de agência

Ao longo deste capítulo vamos admitir que é o delegante quem desenha o contrato de agência. O contrato especifica a compensação que o delegante paga ao agente, podendo esta ser contingente em variáveis que sejam *verificáveis*. Uma variável é *verificável* se for possível para o tribunal verificar aquela variável e, logo, provar se o contrato foi cumprido ou não. Naturalmente, os contratos só devem ser contingentes em variáveis verificáveis.

O delegante propõe o contrato ao agente e o agente pode aceitar ou não aceitar o contrato. O agente só aceita o contrato se isso for benéfico para si, ou seja, se a utilidade esperada que obtém com o contrato for pelo menos tão elevada como a utilidade esperada que consegue obter na melhor alternativa (a este nível de utilidade é costume chamar *utilidade de reserva*).

Aquilo que vamos estudar são relações contratuais em que existe *assimetria de informação*. Ou seja, uma parte tem informação relevante que a outra parte desconhece. Por outras palavras, uma das partes tem uma vantagem informacional. Para além disso, existe também conflito de interesses. O facto de haver, em simultâneo, conflito de interesses e assimetria de informação é que torna o problema da agência interessante. Se o delegante e o agente tivessem os mesmos objectivos, o agente ao agir no seu próprio interesse também agiria no interesse do delegante e acabaria, implicitamente, por «revelar» a sua informação privada.

2.1.1 Problema de risco moral

A Figura 2.1 apresenta a sequência de acontecimentos num problema de risco moral. O delegante oferece um contrato ao agente. Este contrato oferece uma compensação, w, ao agente que depende dos resultados obtidos, x (estes resultados são verificáveis). O agente pode aceitar ou rejeitar o contrato e, se aceitar, escolhe depois o nível de esforço e a despender. Os resultados são depois observados. Estes resultados dependem não só do nível de esforço, mas também de outros factores incontroláveis pelo agente.

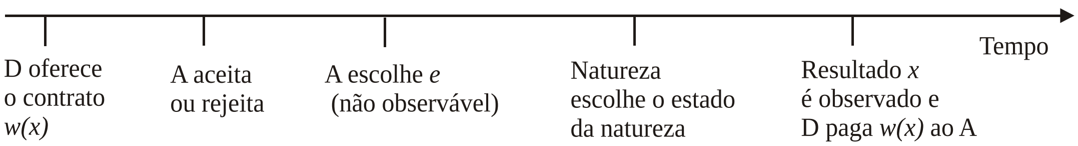

Figura 2.1: Sequência de acontecimentos no problema de risco moral.

Num problema de risco moral, no momento em que o contrato é feito, existe simetria de informação. Contudo, como o nível de esforço do agente não é observável isso cria uma situação de assimetria de informação pós-contratual. O facto do esforço não ser observável leva a que o contrato não possa depender do nível de esforço. Por conseguinte, se o delegante quiser induzir o agente a despender um determinado nível de esforço, ele vai ter que conceber um esquema de compensação que, indirectamente, dê ao agente os incentivos para escolher a acção correcta. Na presença de risco moral, o problema do delegante é precisamente conceber um mecanismo de incentivos (ou contrato de incentivos, ou esquema de compensação) que leve o agente a despender o nível de esforço que esteja de acordo com o interesse do delegante.

2.1.2 Problema de selecção adversa

Neste caso a assimetria de informação existe já no momento em que o contrato é feito. O agente tem informação privada pré-contratual. Por exemplo, quando um condutor (o agente) faz um seguro automóvel, a companhia de seguros (o delegante) não sabe se o condutor tem tendência para conduzir de forma mais ou menos cuidadosa. Ter esta informação podia ser muito útil para a companhia de seguros, que poderia cobrar um prémio de seguro mais elevado aos condutores que, por natureza, são mais descuidados. O problema é que a companhia de seguros não sabe qual é o «tipo» do condutor, e se perguntasse todos os condutores (mesmo os pouco cuidadosos) diriam que são extremamente cuidadosos.

A sequência de acontecimentos no problema de selecção adversa é a seguinte: Antes de o contrato ser realizado, a natureza escolhe o tipo do agente, $\theta \in \Theta$, o que é observável pelo agente mas não pelo delegante (o delegante apenas conhece a distribuição de probabilidades dos vários tipos). De seguida, o delegante oferece o contrato, $w(x, e)$ que pode ser contingente nos resultados x e na acção do agente e. Se o agente aceitar o contrato, ele vai escolher a acção a realizar. Finalmente, a natureza escolhe o estado da natureza e o contrato é implementado.

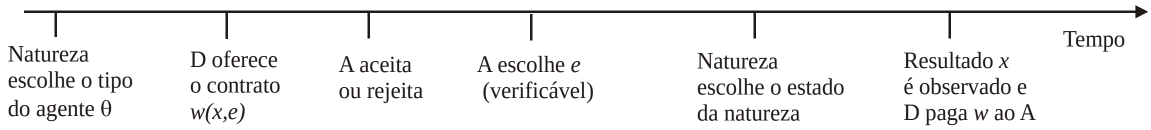

Figura 2.2: Sequência de acontecimentos no problema de selecção adversa.

No problema de selecção adversa, a grande questão para o delegante é desenhar um esquema de incentivos que leve o agente a «revelar» a sua informação privada. O problema de selecção adversa será estudado no próximo capítulo.

2.1.3 Problema de informação oculta

Neste tipo de problemas, quando o contrato é feito existe simetria de informação. Posteriormente, o agente recebe informação privada, o que cria uma situação de assimetria de informação pós contratual. Para exemplificar, suponhamos que uma empresa contrata um agente para ser seu representante de vendas num país estrangeiro. Em certos casos, no momento em que o contrato é assinado, tanto a empresa como o agente, têm pouca informação sobre o mercado externo. Como é óbvio, há várias características no mercado externo que podem ser importantes para determinar a estratégia óptima de entrada nesse mercado. Apesar de, no momento do contrato ser assinado, o agente não ter informação sobre essas características, é natural que quando ele começa a trabalhar no exterior ele vá ficando a conhecer as características do mercado. Neste exemplo, é possível que o delegante consiga observar a estratégia de entrada adoptada pelo agente, mas como não têm a mesma informação que o agente sobre o mercado, o delegante pode não conseguir avaliar se a estratégia escolhida foi a óptima tendo em conta as características do mercado.

Neste problema a sequência dos acontecimentos é a seguinte: o delegante oferece o contrato, o agente aceita ou rejeita o contrato, de seguida a Natureza decide o tipo do agente $\theta \in \Theta$ sendo este observável apenas pelo agente, o agente escolhe o nível de esforço que é verificável. Finalmente, a natureza escolhe o resultado e, de acordo com o resultado, o delegante paga a compensação ao agente.

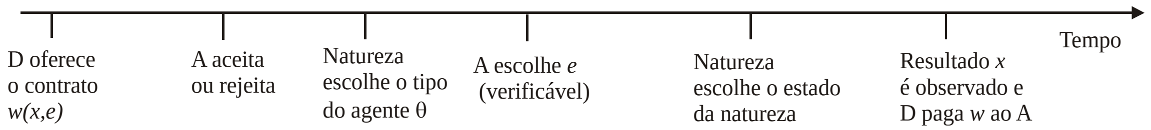

Figura 2.3: Sequência de acontecimentos no problema de informação oculta.

Em termos formais o problema de informação oculta é semelhante ao problema de selecção adversa. O problema do delegante é desenhar um esquema de incentivos que leve o agente a «revelar» a sua informação privada. A diferença em relação ao problema de selecção adversa prende-se com o facto de, no momento em que o contrato é assinado, haver simetria de informação. Logo a aceitação ou não do contrato é feita antes do agente conhecer o seu «tipo».

2.2 O «jogo» do problema de risco moral

O problema de *risco moral* pode ser visto como um jogo sequencial, em que o primeiro jogador a decidir é o delegante (que escolhe o esquema de compensação) e, depois de observar o esquema de compensação oferecido pelo delegante, o agente decide se aceita o contrato e qual o nível de esforço a despender. Depois do agente escolher o nível de esforço, a natureza escolhe o estado da natureza. Embora a Natureza seja aqui interpretada como um jogador, há uma diferença essencial - a Natureza decide de forma puramente aleatória, o resultado é escolhido ao acaso de acordo com determinadas probabilidades. Neste caso concreto, a probabilidade de cada resultado depende do nível de esforço dispendido pelo agente, para cada nível de esforço e, é conhecida a probabilidade de ocorrer o resultado x, $p(x|e)$. A Figura 2.4*(a)* representa este jogo. O facto de estar desenhado um arco entre os ramos que representam as acções de cada jogador significa que o conjunto de possíveis acções é infinito (por exemplo, há uma infinidade de possíveis esquemas de compensação que o delegante pode escolher). Para caracterizarmos completamente o jogo anterior temos ainda de especificar os payoffs terminais de cada jogador. Se ocorrer o resultado x, o delegante tem um lucro igual a $\Pi = x - w(x)$, enquanto que o agente tem uma utilidade $U(w, e) = u(w(x)) - g(e)$.

A representação do jogo pode ser simplificada. Repare-se que, como não sabem qual o resultado que vai ocorrer, tanto o delegante como o agente estão a decidir em contexto de incerteza. Isto significa que devem escolher de forma a maximizar o valor esperado dos seus payoffs. Por isso podemos eliminar a Natureza da árvore, sendo os payoffs nos nós terminais dado pelo valor esperado do lucro (para o delegante) e pela utilidade esperada (para o agente). Nesta representação estamos a admitir que o delegante é neutro em relação ao risco. A atitude do agente em relação ao risco depende das características da função $u(w)$: se u for linear o agente é neutro em relação ao risco, se u for côncava o agente é avesso ao risco.

A Figura 2.4*(b)* apresenta o jogo simplificado. Repare-se que estamos na presença de

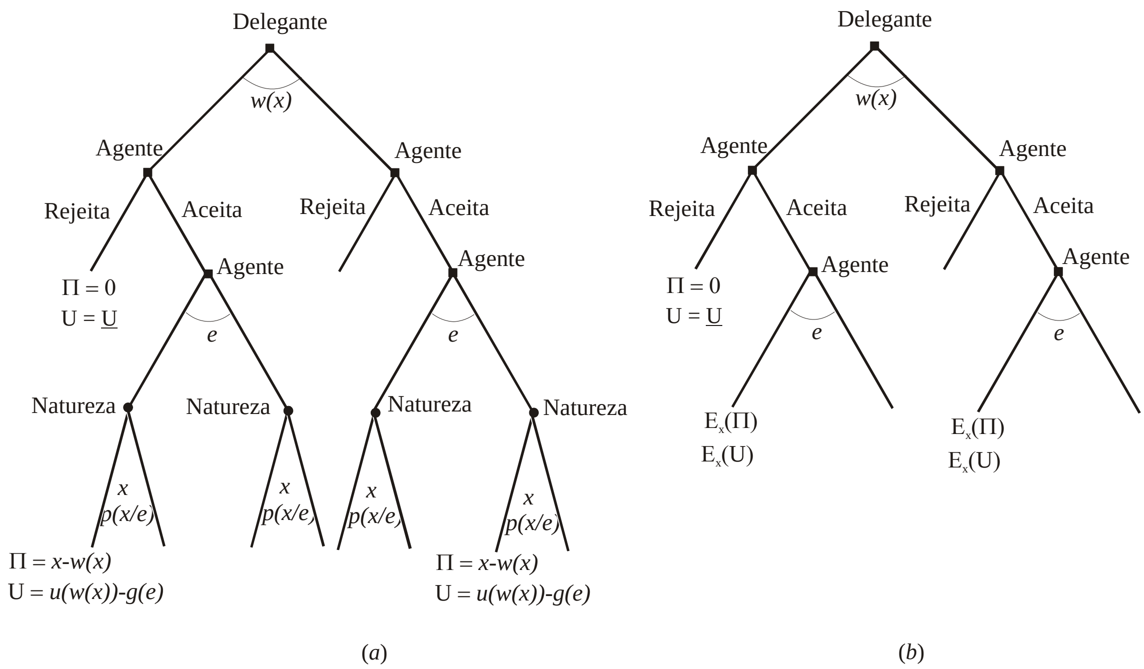

Figura 2.4: O «jogo» do problema de risco moral.

um jogo dinâmico com informação perfeita. Por conseguinte, o jogo pode ser resolvido usando indução à retaguarda. Devemos começar por analisar o problema da escolha do nível de esforço pelo agente. Para cada esquema de compensação, o agente escolherá o nível de esforço que maximiza a sua utilidade esperada. De seguida, devemos recuar na árvore e analisar a decisão do agente entre aceitar ou rejeitar o contrato. O agente só deve aceitar se a utilidade esperada que obtém com o nível de esforço óptimo anteriormente determinado for pelo menos tão elevada como a utilidade de reserva. Por último, recuando mais uma vez na árvore, temos de analisar o problema do delegante. O delegante quer escolher e e $w(x)$ que maximizam o seu lucro esperado, tendo em conta que o agente só aceita o contrato se isso for vantajoso e que escolhe o nível de esforço de forma a maximizar a sua utilidade esperada. Ou seja, o problema do delegante de maximizar o lucro esperado tem duas restrições. A restrição de que a utilidade esperada do agente com o contrato tem que ser no mínimo igual à utilidade de reserva é designada por *restrição de participação.* A restrição de que o agente escolhe o nível de esforço que lhe dá maior utilidade esperada é designada por restrição de *compatibilidade de incentivos.* Estes dois tipos de restrições são um dos elementos comuns aos vários problemas de agência e, por isso, vamos falar muito delas.

A análise do problema de risco moral pode ser feita a vários níveis dependendo das hipóteses sobre os possíveis valores de e e de x. Na exposição que se segue, vamos começar por admitir que só há dois níveis de esforço possíveis e que o conjunto de resultados é finito. De seguida, estudamos os caso em que, tanto o nível de esforço como os resultados são variáveis contínuas.

2.3 Hipóteses gerais do modelo

Nas secções que se seguem vamos analisar dois modelos do problema de risco moral. Estes dois modelos têm um conjunto de hipóteses comuns.

A primeira hipótese é que é o delegante quem propõe o contrato. O delegante oferece um contrato que especifica o pagamento w, contingente no resultado x. O agente rejeita ou aceita o contrato, se aceitar o contrato é implementado. Ou seja, temos uma oferta do tipo «pegar ou largar», não há um processo de negociação. Esta hipótese é bastante forte mas não é essencial em termos de eficiência. Ou seja, os ganhos totais com o contrato, não dependem de quem faz a oferta. Contudo, a forma como o contrato é negociado não é indiferente em termos da distribuição dos ganhos. Neste caso, o delegante consegue apropriar-se de todo o excedente da negociação, mas isso não seria verdade se admitissemos outro processo de negociação.

Vamos admitir que o delegante é neutro em relação ao risco, sendo o seu objectivo a maximização do lucro esperado:

$$E_x(\Pi) = E_x\left[x - w(x)\right].$$

Contudo, poderíamos também analisar o caso em que o delegante é avesso ao risco e o seu objectivo é maximizar a sua utilidade esperada, sendo a utilidade uma função crescente e côncava do lucro, ou seja, teríamos $v(x - w)$, com $v' > 0$ e $v'' \leq 0$.

Em contrapartida, o agente é avesso ao risco e a sua utilidade esperada é dada por:

$$EU = E_x\left[u(w(x)) - g(e)\right],$$

com $u' > 0$, $u'' \leq 0$ (estas hipóteses implicam que o agente ou é neutro ao risco ou é avesso ao risco). O termo $g(e)$ é a desutilidade do esforço e é comum admitir que $g(e)$ é crescente e convexa ($g' > 0$ e $g'' > 0$), o que significa que a desutilidade marginal do esforço é crescente. O agente tem uma utilidade de reserva igual a $\underline{U}$. Isto implica que ele só aceitará o contrato se, com o contrato tiver $EU \geq \underline{U}$.

A função de distribuição dos resultados depende de e. Designemos por $F(x|e)$, definida em $[\underline{x}, \overline{x}]$, a função de distribuição de x dado e, e designemos por $f(x|e)$ a função de densidade correspondente. A função de distribuição satisfaz as seguintes hipóteses:

- $F(\underline{x}\,|e) = 0$, $F(\overline{x}\,|e) = 1$ e $f(x\,|e) > 0$ para todo o e.
- A função de distribuição é tal que, quanto maior o nível de esforço, maior probabilidade têm os melhores resultados. Esta ideia é captada usando o conceito de *dominância estocástica de primeira ordem*: $F_e(x|e) < 0$. Por palavras, aumentar e faz decrescer a probabilidade de o resultado ser inferior ou igual a x.
- Vamos também admitir que $F_{ee}(x|e) > 0$. Ou seja, a produtividade marginal do esforço é decrescente. Aumentar e faz baixar $F(x)$, mas a um ritmo decrescente. Esta hipótese de convexidade da função de distribuição relativamente a e, também se pode escrever:

$$\lambda F(x|e_1) + (1-\lambda)F(x|e_2) \geq F(x|\lambda e_1 + (1-\lambda)e_2).$$

2.4 O caso dos dois níveis de esforço

Vamos começar por considerar o caso em que existem apenas dois níveis de esforço, $e \in \{\underline{e}, \overline{e}\}$ onde $\underline{e}$ é o nível de esforço baixo e $\overline{e}$ é o nível de esforço elevado. Para além disso, vamos admitir que há conjunto finito de possíveis resultados $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Designemos por $\overline{p}_i = p(x_i|\overline{e})$ e por $\underline{p}_i = p(x_i|\underline{e})$. Vamos admitir que $\overline{p}_i > 0$ e $\underline{p}_i > 0$ para todo o i.

2.4.1 Esquema de incentivos se e fosse verificável

Comecemos por analisar o que aconteceria se o nível de esforço fosse verificável. A análise desta situação hipotética é interessante para efeitos comparativos. Desta forma, vamos conseguir averiguar qual é o impacto da não observabilidade do esforço no contrato óptimo, ou seja, qual é impacto da existência de assimetria de informação.

Se e for verificável o delegante pode oferecer um contrato ao agente em que este só recebe compensação se fizer um determinado nível de esforço. Por outras palavras, com este tipo de contrato é trivial satisfazer a condição de compatibilidade de incentivos e, logo, para encontrar o contrato óptimo para o delegante só temos de nos preocupar com a restrição de participação do agente.

O problema do delegante é desenhar um esquema de compensação que maximize o seu lucro esperado, tendo em conta que o agente só aceita o contrato se, com o contrato, obtiver uma utilidade esperada superior à utilidade de reserva $\underline{U}$. Designemos por $w_1, w_2, \cdots, w_n$ o salário quando os resultados são $x_1, x_2, \cdots, x_n$, respectivamente. O problema do delegante é:

$$\max_{e, w_1, w_2, \cdots, w_n} \sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) \left[x_i - w_i \right]$$

sujeito à restrição de participação:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) u(w_i) - g(e) \geq \underline{U},$$

onde $e \in \{\underline{e}, \overline{e}\}$.

É conveniente dividir este problema em dois passos. Em primeiro lugar, para cada escolha de e que possa ser especificada no contrato, qual é o esquema de compensação que induz o nível de esforço e com custo mínimo, ou seja, que minimiza o salário esperado? Em segundo lugar, qual é o nível de esforço óptimo? Qual é o nível de esforço que maximiza o lucro esperado?

Esquema de compensação óptimo para induzir e

O esquema de compensação óptimo para induzir o nível de esforço e é a solução do seguinte problema:

$$\min_{w_1, w_2, \cdots, w_n} \sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) w_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) u(w_i) - g(e) \geq \underline{U}.$$

Intuitivamente, a restrição de participação vai ser activa na solução do problema. De facto, se a restrição não fosse activa no óptimo, isso significava que o delegante podia baixar a compensação do agente continuando este a aceitar o contrato. Mas isso implicava que o delegante originalmente não estava a minimizar o salário esperado.

Designemos por λ o multiplicador de Lagrange. A função lagrangeana do problema anterior é:

$$L(w_1, w_2, \cdots, w_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) w_i + \lambda \left(\underline{U} - \sum_{i=1}^{n} p(x_i|e) u(w_i) + g(e) \right).$$

As condições de Kuhn-Tucker deste problema são:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_i} = p(x_i|e) - \lambda p(x_i|e)u'(w_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \underline{U} - \sum_{i=1}^{n} p(x_i|e)u(w_i) + g(e) \leq 0;\ \lambda \geq 0;\ \lambda.\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

A condição $\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0$ é equivalente a:

$$\lambda = \frac{1}{u'(w_i)}$$

Como $u'(w_i) > 0$ (a utilidade marginal é crescente) podemos de imediato concluir que $\lambda > 0$, o que por sua vez implica, pela condição de complementaridade, $\lambda.\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, que $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Isto mostra formalmente que a restrição de participação tem de ser activa.

A condição anterior também implica que u' tem de ser o mesmo para todo o i. Mas, se o agente for estritamente avesso ao risco ($u'' < 0$), a única forma de ter a mesma utilidade marginal para todo o i é se w_i não depender de i, ou seja, se w for constante. Por conseguinte, o esquema de compensação óptimo para induzir o agente a fazer esforço igual a e^* é:

$$w_i = \begin{cases} k, \text{ se } e = e^* \\ -P, \text{ se } e \neq e^* \end{cases}$$

onde k é o salário constante tal que, se o agente fizer o nível de esforço e^* a sua utilidade é igual à utilidade de reserva:

$$u(k) - g(e^*) = \underline{U}, \tag{2.1}$$

e P é uma penalização suficientemente elevada para garantir que o agente nunca quer escolher um nível de esforço diferente de e^*.

O facto do salário óptimo não deve depender de x, é bastante intuitivo. Como o agente é avesso ao risco e o delegante é neutro em relação ao risco, é óptimo ser o delegante a suportar todo o risco (para o delegante só importa qual é o salário esperado que tem de pagar, mas entre salários esperados iguais o agente prefere estritamente aquele esquema de compensação que tiver menor variabilidade).

Seja Φ a inversa da função de utilidade u. Ou seja, $\Phi(u)$ indica-nos o salário necessário para atingir a utilidade u. O salário constante que resolve o problema anterior é aquele para o qual a condição de participação é satisfeita em igualdade (condição 2.1). Em termos de Φ obtemos:

$$u(k) - g(e^*) = \underline{U} \Leftrightarrow u(k) = \underline{U} + g(e^*) \Leftrightarrow k = \Phi(\underline{U} + g(e)).$$

Por palavras, para levar o agente a aceitar o contrato é necessário oferecer-lhe um salário que o compense por $\underline{U}$ e pela desutilidade do esforço $g(e)$. Como g é crescente com e, para levar o agente a fazer níveis de esforço mais elevados tem de se lhe oferecer uma compensação mais elevada.

Repare-se que, no caso particular do agente ser neutro ao risco, a utilidade marginal é constante com w (u' não depende de w) e, por conseguinte qualquer esquema de compensação que ofereça um salário esperado igual a $\Phi(\underline{U} + g(e))$ satisfaz as condições de optimalidade. Neste caso o contrato óptimo não é único.

Nível de esforço óptimo

O nível de esforço óptimo é aquele para o qual o delegante obtém o maior lucro líquido esperado. Este problema não é trivial porque níveis de esforço mais elevado implicam maior probabilidade de obter valores mais elevados de x, mas a compensação que tem de ser oferecida ao agente também é maior. O problema do delegante é:

$$\max_{e} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(x_i|e)x_i}_{\text{lucro bruto esperado}} \quad - \quad \underbrace{\Phi(\underline{U} + g(e))}_{\text{compensação do agente}}$$

O nível de esforço elevado, $\overline{e}$, é óptimo se e só se:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{p}_i - \underline{p}_i\right) x_i}_{\text{lucro bruto esperado adicional}} \quad \geq \quad \underbrace{[\Phi(\underline{U} + g(\overline{e})) - \Phi(\underline{U} + g(\underline{e}))]}_{\text{salário adicional}}.$$

O benefício de aumentar o nível de esforço de $\underline{e}$ para $\overline{e}$ é que isso faz aumentar a probabilidade de se obterem bons resultados e, logo, faz aumentar o lucro bruto esperado. No entanto, levar o agente a fazer um nível de esforço mais elevado também tem um custo adicional: é necessário pagar um salário mais elevado ao agente para o compensar pela desutilidade adicional do esforço. O nível de esforço elevado só é óptimo se o benefício adicional for superior ao custo adicional.

2.4.2 Esquema de incentivos quando e não é verificável

Já sabemos qual é o esquema de incentivos óptimo e qual é o nível de esforço óptimo quando há informação simétrica. Vamos agora analisar o problema do delegante quando e não é verificável. Tal como anteriormente, vamos decompor o problema do delegante em dois passos. Primeiro, para cada nível de esforço e determinamos o contrato de compensação que induz o agente a escolher aquele nível de esforço e que tem custo mínimo. De seguida, determinamos o nível de esforço que maximiza o lucro esperado do delegante.

Esquema de compensação óptimo para induzir $\underline{e}$

Para induzir o agente a escolher o nível de esforço baixo basta oferecer-lhe uma compensação constante, ou seja, que não depende de x. Se w for constante, o agente escolherá sempre $\underline{e}$, uma vez que $\overline{e}$ tem uma desutilidade superior. Por outras palavras, com salário fixo a condição de compatibilidade de incentivos é satisfeita:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i u(w) - g(\underline{e}) > \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i u(w) - g(\overline{e}),$$

como w não depende de x, $u(w)$ pode passar para fora do somatório, logo a condição anterior é equivalente a:

$$u(w) \sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i - g(\underline{e}) > u(w) \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i - g(\overline{e}) \quad \Leftrightarrow \quad g(\overline{e}) - g(\underline{e}) > 0,$$

o que verdadeiro, dada a hipótese de que g é estritamente crescente.

Repare-se que, para induzir o agente a escolher $\underline{e}$ o delegante basta oferecer um salário constante que dê ao agente uma utilidade igual à utilidade de reserva:

$$u(w) - g(\underline{e}) = \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad w = \Phi(\underline{U} + g(\underline{e})).$$

Ora este salário é precisamente o mesmo que o delegante tinha de oferecer se o esforço fosse verificável. Isto permite-nos já concluir que, se o nível de esforço óptimo for $\underline{e}$, a não observabilidade do esforço não tem custos. Obtemos precisamente a mesma solução do que quando o esforço é verificável.

Esquema de compensação óptimo para induzir $\overline{e}$

Do caso anterior, já sabemos que um salário constante não serve para induzir um nível de esforço elevado. Com salário constante, o agente tem incentivo a escolher $\underline{e}$. Por conseguinte, para induzir o agente a fazer $\overline{e}$ o salário vai ter que depender do resultado.

O agente só tem incentivo a escolher $\overline{e}$ se a sua utilidade esperada for superior aquela que obtem se escolher $\underline{e}$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i u(w_i) - g(\overline{e}) \geq \sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i u(w_i) - g(\underline{e}).$$

Esta é a *condição de compatibilidade de incentivos*, ou seja, o esquema de compensação tem de ser de tal forma que dá ao agente *incentivo* para escolher o nível de esforço $\overline{e}$. A condição anterior pode escrever-se:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right]u(w_i)}_{\text{utilidade esperada adicional}} \quad \geq \quad \underbrace{g(\overline{e}) - g(\underline{e})}_{\text{desutilidade adicional do esforço}}.$$

O contrato óptimo para induzir $\overline{e}$ é a solução de:

$$\min_{w_1,w_2,\cdots,w_n}\sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i w_i$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i u(w_i) - g(\overline{e}) &\geq \underline{U}\\ \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right]u(w_i) &\geq g(\overline{e}) - g(\underline{e}).\end{aligned}$$

A função lagrangeana deste problema é:

$$\begin{aligned}L(w_1, w_2, \cdots, w_n, \lambda, \mu) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i w_i + \lambda\left[\underline{U} - \sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i u(w_i) + g(\overline{e})\right] + \\ & \mu\left[g(\overline{e}) - g(\underline{e}) - \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right]u(w_i)\right]\end{aligned}$$

Derivando em ordem a w_i obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \overline{p}_i - \lambda\overline{p}_i u'(w_i) - \mu\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right]u'(w_i) = 0 \qquad \text{para todo o } i = 1, \cdots, n.$$

Também neste caso é fácil mostrar que $\lambda > 0$ (o que implica que a restrição de participação é satisfeita no óptimo). De facto, a condição anterior pode escrever-se da seguinte forma:

$$\frac{\overline{p}_i}{u'(w_i)} = \lambda\overline{p}_i + \mu\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right] \text{ para todo o } i. \tag{2.2}$$

Adicionando as n condições obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{p}_i}{u'(w_i)} = \sum_{i=1}^{n}\lambda\overline{p}_i + \sum_{i=1}^{n}\mu\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right] = \lambda > 0$$

onde usámos o facto de $\overline{p}_i > 0$, $u'(w_i) > 0$ e $\sum_{i=1}^n \overline{p}_i = \sum_{i=1}^n \underline{p}_i = 1$.

Já sabemos que a restrição de participação é satisfeita no óptimo. Mas quais são as propriedades do contrato óptimo? Para podermos responder a esta pergunta vamos analisar melhor as condições de optimalidade. Se dividirmos a condição (2.2) por $\overline{p}_i$ obtemos:

$$\frac{1}{u'(w_i)} = \lambda + \mu \left[1 - \frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}\right] \text{ para todo o } i = 1, \cdots, n. \tag{2.3}$$

No caso em que o agente é estritamente avesso ao risco[2], é fácil mostrar que o multiplicador μ não pode ser igual a zero, porquê? Se $\mu = 0$ o lado direito da condição (2.3) seria igual a λ para todo i, o que implicaria que o lado esquerdo da equação teria de ser constante. Mas, para um agente estritamente avesso ao risco, a única forma de termos a utilidade marginal constante é se w_i também for constante. Contudo, com salário constante, a condição de compatibilidade de incentivos não é satisfeita (o lado esquerdo da condição seria nulo, enquanto que o lado direito seria estritamente positivo). Por conseguinte $\mu > 0$, o que implica que a condição de compatibilidade de incentivos também é satisfeita em igualdade no óptimo.

Como $\mu > 0$ a compensação varia com i. A forma como w_i varia com i depende do rácio $\frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}$. Este rácio chama-se o *rácio de verosimilhança*.

Quanto mais pequeno for este rácio maior é $\overline{p}_i$ relativamente a $\underline{p}_i$ e, logo, x_i é um sinal mais forte de que $e = \overline{e}$. Intuitivamente, quanto menor for $\frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}$ relativamente maior deve ser w_i. Isto é precisamente o que acontece! Quanto menor for $\frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}$ maior é $(1 - \frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i})$ e, por conseguinte maior é o lado direito da equação. Mas, para que a igualdade se verifique, isso implica que menor terá que ser $u'(w_i)$. Como a utilidade marginal é decrescente, para que a utilidade marginal decresça w_i tem que aumentar.

Uma pergunta interessante é: será que o esquema de compensação é necessariamente crescente? o esquema de compensação $u(w_i)$ só é crescente se $\frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}$ for decrescente com i. Esta propriedade é designada por monotonicidade do rácio de verosimilhança (*monotonous likelihood ratio property* ou MLRP). Esta propriedade é bastante forte. Em particular, dominância estocástica de primeira ordem não implica que o rácio de verosimilhança seja decrescente como o exemplo seguinte ilustra:

[2]Se o agente for neutro ao risco, a condição de compatibilidade de incentivos não precisa de ser activa no óptimo (ou seja, μ pode ser igual a 0). Mesmo que $\mu = 0$ a condição (2.3) verifica-se seja qual for o esquema de compensação, porque a utilidade marginal é constante. Neste caso, qualquer esquema de compensação que satisfaça em igualdade a condição de participação e que satisfaça (não necessariamente em igualdade) a condição de compatibilidade de incentivos, é óptimo para induzir $\overline{e}$.

Exemplo 2.1 Com três resultados possíveis x_1, x_2 e x_3 é fácil encontrar exemplos em que o rácio de verosimilhança não é decrescente. Na tabela seguinte estão indicadas as probabilidades $\overline{p}_i$ e $\underline{p}_i$:

	x_1	x_2	x_3
$\overline{e}$	0.3	0.2	0.5
$\underline{e}$	0.4	0.4	0.2

Neste exemplo, a função de distribuição com esforço elevado domina estocasticamente (dominância estocástica de primeira ordem) a função distribuição com esforço baixo, ou seja, com esforço mais elevado a probabilidade de ter um resultado inferior ou igual a um dado valor é menor ou igual do que quando o esforço é baixo. Contudo, o rácio de verosimilhança começa por crescer e depois decrescer. Neste exemplo, devemos[3] ter $w_3 > w_1 > w_2$.♦

Apesar de o esquema de compensação poder não ser sempre crescente, é impossível que $w(x)$ seja sempre decrescente se o delegante quiser induzir $e = \overline{e}$. De facto, para ser óptimo termos w_i decrescente com i teríamos de ter $\frac{\underline{p}_i}{\overline{p}_i}$ crescente com i. Contudo isto implicaria que a função de distribuição com esforço baixo domina estocasticamente a função de distribuição com esforço elevado. Para além disso, se w_i é decrescente com i, $x_i - w_i$ é crescente com i. Destes dois factos podemos concluir que:

$$E\left[x - w(x)|\underline{e}\right] > E\left[x - w(x)|\overline{e}\right],$$

o que implica que o delegante prefere induzir $e = \underline{e}$, o que é uma contradição!

Qual é o salário esperado mínimo para induzir o agente a escolher $\overline{e}$? Intuitivamente, se o agente for estritamente avesso ao risco, o salário esperado para o levar a fazer $\overline{e}$ é superior aquele que ele exigia no cenário em que e é verificável. Porquê? porque agora o salário é variável e o agente não gosta da variabilidade no salário. Por isso, o delegante vai ter que compensar o agente pelo risco existente no esquema de compensação, vai ter de lhe pagar um salário esperado superior para o compensar pelo risco. Vejamos isto formalmente. Designemos por $w^*(x_i)$ o esquema de compensação óptimo. Como a condição de participação é satisfeita em igualdade sabemos que:

$$E\left[u(w^*(x_i)|\overline{e}\right] - g(\overline{e}) = \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad E\left[u(w^*(x_i)|\overline{e}\right] = \underline{U} + g(\overline{e}).$$

[3] Se o agente puder destruir o output antes do delegante o observar, x_2 nunca seria observado com este esquema de compensação.

Como a função de utilidade é estritamente côncava sabemos que $E\left[u(w^*(x_i)|\overline{e}\right] < u\left(E(w^*(x_i)|\overline{e})\right)$, o que implica que

$$u(E(w^*(x_i)|\overline{e})) > \underline{U} + g(\overline{e}) \quad \Leftrightarrow \quad E(w^*(x_i)|\overline{e}) > \Phi(\underline{U} + g(\overline{e})).$$

Isto mostra que o delegante tem de pagar um salário esperado superior ao que teria de pagar no caso de e ser verificável. Repare-se que $\Phi(\underline{U} + g(\overline{e}))$ é o salário constante que daria ao agente a mesma utilidade que ele obtém com o esquema de compensação com risco $w^*(x_i)$, ou seja, é o equivalente certo. O leitor atento já deve ter reparado que o salário esperado adicional com assimetria de informação é precisamente igual ao prémio de risco exigido pelo agente:

$$E(w^*(x_i)|\overline{e}) - \Phi(\underline{U} + g(\overline{e})) > 0$$

Nível óptimo de esforço

O nível de esforço óptimo depende da comparação do lucro bruto esperado adicional quando o nível de esforço aumenta de $\underline{e}$ para $\overline{e}$, com a diferença no salário esperado para induzir o agente a aumentar o nível de esforço:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right] x_i}_{\text{lucro bruto esperado adicional}} \quad \geq \quad \underbrace{[E(w^*(x_i)|\overline{e}) - \Phi(\underline{U} + g(\underline{e}))]}_{\text{salário esperado adicional}}. \tag{2.4}$$

O salário esperado adicional pode escrever-se da seguinte forma (basta somar e subtrair $\Phi(\underline{U} + g(\overline{e}))$):

$$\underbrace{E(w^*(x_i)|\overline{e}) - \Phi(\underline{U} + g(\overline{e}))}_{\text{prémio de risco}} \quad + \quad \underbrace{\Phi(\underline{U} + g(\overline{e})) - \Phi(\underline{U} + g(\underline{e}))}_{\text{compensação pela desutilidade adicional}} \quad .$$

O que mostra que para o delegante, é mais caro induzir o agente a fazer um nível de esforço elevado quando e não é verificável. A diferença é o prémio de risco.

Se o agente for neutro ao risco, o prémio de risco é nulo e, por conseguinte, a condição para que $\overline{e}$ seja óptimo (2.4) é precisamente a mesma do que no caso em que e é verificável. Por outras palavras, se o agente for neutro ao risco a não observabilidade do esforço não tem implicações no nível de esforço óptimo, nem nos payoffs do delegante e do agente.

Contudo, se o agente for avesso ao risco, a não observabilidade do esforço pode levar a uma perda de eficiência. Repare-se que, se $\underline{e}$ for óptimo quando e é verificável, então o nível de esforço baixo é necessariamente óptimo quando e não é verificável. E já sabemos que, neste caso, o contrato óptimo é precisamente o mesmo. Contudo, se o nível de esforço óptimo quando e é verificável for $\overline{e}$, na presença de risco moral, este pode ou não continuar a ser o nível de esforço óptimo. O nível de esforço $\overline{e}$ pode deixar de ser óptimo porque induzir $\overline{e}$ tem custos mais elevados para o delegante. Para além disso, há uma perda social pelo facto de e não ser observável. O agente obtém a utilidade de reserva em ambos os casos, mas o delegante fica estritamente pior quando e não é observável porque tem de pagar um salário esperado mais elevado

2.4.3 O problema da minimização do custo

Na nossa análise, resolvemos o problema do delegante em dois passos: *(i)* Começamos por perguntar qual é o esquema de incentivos que minimiza o custo de induzir o nível de esforço e, obtendo $C(e)$, o custo esperado mínimo de induzir e. *(ii)* Determinamos o nível de esforço óptimo, ou seja, a solução de $\max_e B(e) - C(e)$.

Vamos olhar para o problema de minimização dos custos de uma forma ligeiramente diferente. Como vimos, o problema para induzir um nível de esforço elevado é:

$$\min_{w_1, w_2, \cdots, w_n} \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i w_i$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i u(w_i) - g(\overline{e}) &\geq \underline{U} \\ \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right] u(w_i) &\geq g(\overline{e}) - g(\underline{e}). \end{aligned}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis de tal forma que, com as novas variáveis, as condições de Kuhn-Tucker do problema sejam necessárias e suficientes, o que nos garante que a solução encontrada é um mínimo global do problema. A ideia é a seguinte, em vez de termos w_i como variáveis de decisão, vamos usar $v_i = u(w_i)$ como variáveis de decisão (é como se o delegante escolhesse a utilidade que quer dar ao agente em cada um dos possíveis estados da natureza). Naturalmente $w_i = \Phi(v_i)$, logo o problema anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_{v_1, v_2, \cdots, v_n} \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i \Phi(v_i)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i v_i - g(\overline{e}) &\geq \underline{U} \\
\sum_{i=1}^{n} \left[\overline{p}_i - \underline{p}_i\right] v_i &\geq g(\overline{e}) - g(\underline{e}).
\end{aligned}$$

Repare-se que, como a função u é côncava, a função inversa Φ é convexa ($\Phi' = \frac{1}{u'} > 0$ e $\Phi' = -\frac{u''}{(u')^2} > 0$. Para além disso, as restrições são lineares em v_i. Logo estamos a minimizar uma função convexa sujeito a restrições lineares, o que implica que as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes. Logo, um ponto que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker é um mínimo global.

2.4.4 De que deve depender o esquema de compensação?

A análise anterior pode generalizar-se para o caso em que existe um vector $\mathbf{x}$ de variáveis verificáveis. Pode acontecer que algumas destas variáveis não entrem directamente na função payoff do delegante, contudo pode fazer sentido incluir as variáveis no esquema de compensação se as variáveis forem «informativas» relativamente a e.

Para ilustrar esta ideia, consideremos o exemplo de um proprietário que contrata um trabalhador para cultivar a sua terra. A produção depende não só do esforço do trabalhador mas também das condições metereológicas. Será que a compensação do trabalhador também deve depender das condições metereológicas? Pode fazer sentido! É bem possível que uma boa produção seja um melhor sinal de que o esforço foi elevado quando as condições metereológicas foram más do que quando foram boas. Ou seja, w_i deve ser mais elevado quando a produção foi boa apesar das condições meterológicas terem sido más.

Que variáveis aleatórias é que devemos incluir no esquema de compensação? A ideia é que só devemos incluir variáveis que tenham informação adicional. Se uma variável aleatória não for informativa não se justifica fazer depender w dessa variável porque estaríamos a aumentar a variabilidade em w (o que é mau porque o agente é avesso ao risco), sem estarmos a melhorar o esquema de compensação em termos de incentivos.

Vamos formalizar estas ideias um pouco mais. Vamos admitir que $\mathbf{x} = (\pi, y)$ e que o objectivo do delegante é maximizar $E[\pi - w]$. Suponhamos que π é uma variável aleatória contínua. Será que w deve depender de y e de π?

Considerando $w(\pi, y)$, o esquema de compensação óptimo satisfaz as condições de primeira ordem:

$$\frac{1}{u'(w(\pi, y))} = \lambda + \mu \left[1 - \frac{f(\pi, y|\underline{e})}{f(\pi, y|\overline{e})} \right].$$

Daqui podemos concluir que w deve depender de y a não ser que o rácio de verosimilhança $\frac{f(\pi,y|\underline{e})}{f(\pi,y|\overline{e})}$ seja independente de y (a.e.). Ou seja:

$$\frac{f(\pi, y|\underline{e})}{f(\pi, y|\overline{e})} = h(\pi|e) \text{ a.e.}$$

Por exemplo, se y for uma variável aleatória independente de π e não relacionada com e, sabemos que $f(\pi, y\,|e) = f_1(\pi\,|e) \bullet f_2(y)$. Mas isto implica que:

$$\frac{f(\pi, y|\underline{e})}{f(\pi, y|\overline{e})} = \frac{f_1(\pi|\underline{e}) \bullet f_2(y)}{f_1(\pi|\overline{e}) \bullet f_2(y)} = \frac{f_1(\pi|\underline{e})}{f_1(\pi|\overline{e})}.$$

Logo, o esquema de compensação óptimo não depende de y. Isto faz sentido porque introduzir y no esquema de compensação só faria aumentar a variabilidade de w, mas não ajudaria nada em termos de incentivos porque y não está relacionado com e.

O caso da independência não é o único caso em que w não deve depender de y. Repare-se que $f(\pi, y|e)$ é igual a:

$$f(\pi, y|e) = f_1(\pi|e) \bullet f_2(y|\pi, e).$$

Se f_2 não depender de e também se verifica que o rácio de verosimilhança não depende de y e, logo, w não deve depender de y.

A ideia é que podemos olhar para a probabilidade conjunta $f(\pi, y\,|e)$ como o resultado de dois processos aleatórios. O primeiro, $f_1(\pi|e)$, depende de e. O segundo, $f_2(y|\pi)$, não depende de e, só depende de π. Por conseguinte, y não nos diz nada em relação a e para além daquilo que nós já sabemos através de π. Isto é equivalente a dizer que π é uma *estatística suficiente* para y, em relação a e. Resumindo, se y não for informativo relativamente a e, ou seja, se π for uma estatística suficiente para y relativamente a e, o esquema de incentivos só deve depender de $\pi, w(\pi)$.

2.5 O caso em que nível de esforço e resultados são contínuos

2.5.1 Esquema de incentivos se e fosse verificável

Vamos estudar este caso para podermos estudar o efeito da existência de risco moral. Neste caso o contrato pode especificar o nível de e. O problema do delegante é:

$$\max_{e,w(x)} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} [x - w(x)]\, f(x|e)dx$$

sujeito a:

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))dF(x|e) - g(e) \geq \underline{U}.$$

Tal como vimos nos exemplos acima é possível decompor este problema em dois passos:

1. Para cada valor de e escolhido, qual é o esquema de compensação com custo mínimo?
2. Qual é o nível de esforço óptimo?

Esquema de compensação óptimo para induzir e

Para um dado e, escolher $w(x)$ de forma a maximizar o lucro líquido esperado é equivalente a escolher $w(x)$ de forma a minimizar o custo esperado. Ou seja, no primeiro passo, para cada valor de e, o problema a resolver é:

$$\min_{w(x)} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} w(x)f(x|e)dx$$

sujeito à restrição de participação:

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx - g(e) \geq \underline{U}.$$

Intuitivamente, é de esperar que, no óptimo, a restrição de participação seja activa. Se a restrição fosse verificada em desigualdade, o delegante podia baixar w e continuar a satisfazer a restrição, o que significava que o custo esperado não estava a ser minimizado. Vamos verificar isto formalmente e caracterizar o esquema de incentivos óptimo. A função lagrangiana deste problema é:

$$L = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} w(x)f(x|e)dx + \lambda \left[\underline{U} - \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx + g(e)\right]$$

No óptimo, para cada valor de $x, w(x)$ tem de satisfazer:

$$f(x|e) - \lambda u'(w(x))f(x|e) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u'(w(x))} = \lambda,$$

o que mostra que $\lambda > 0$, uma vez que $u' > 0$ (a utilidade é crescente com w). Mas $\lambda > 0$ implica, pela condição de complementaridade, que a restrição de participação é satisfeita em igualdade. A condição anterior também implica que u' tem de ser o mesmo para todo o x. Mas se o agente for estritamente avesso ao risco ($u'' < 0$) a única forma de ter a mesma utilidade marginal para todo o x é se w não depender de x, ou seja, se w for *constante*. Por conseguinte, tal como na secção anterior, o esquema de compensação óptimo para induzir o agente a fazer esforço igual a e^* é:

$$w(x,e) = \begin{cases} k, \text{ se } e = e^* \\ -P, \text{ se } e \neq e^* \end{cases}$$

onde k é o salário constante tal que, se o agente fizer o nível de esforço e^* a sua utilidade é igual à utilidade de reserva:

$$u(k) - g(e^*) = \underline{U}, \tag{2.5}$$

e P é uma penalização suficientemente elevada para garantir que o agente nunca quer escolher um nível de esforço diferente de e^*.

Nível de esforço óptimo

O nível de esforço óptimo é aquele para o qual o delegante obtem o maior lucro líquido esperado. O problema do delegante é:

$$\max_e \underbrace{\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} xf(x|e)dx}_{\text{benefício do esforço}} - \underbrace{\Phi(\underline{U} + g(e))}_{\text{compensação do agente}}.$$

É fácil mostrar que esta função objectivo é côncava em e, e por conseguinte, a condição de 1^a ordem garante um máximo global. A condição de primeira ordem é:

$$\frac{d\Pi}{de} = \underbrace{\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} xf_e(x|e)dx}_{\text{lucro bruto esperado adicional}} - \underbrace{\Phi'(\bullet)g'(e)}_{\text{salário adicional}} = 0.$$

Ou seja, o nível de esforço óptimo é aquele para o qual o lucro bruto esperado adicional quando e varia é igual ao salário adicional que tem de ser oferecido ao agente para o compensar pela desutilidade marginal do esforço.

2.5.2 Esquema de incentivos se agente for neutro em relação ao risco

Sem perda de generalidade podemos admitir que $u(w) = w$. Neste caso, o nível óptimo de esforço para o delegante é a solução do seguinte problema:

$$\max_{e} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} xf(x|e)dx - \underline{U} - g(e). \tag{2.6}$$

Já sabemos que, quando o agente é neutro ao risco, não importa que a compensação seja variável. Mas isso implica que há forma de dar os incentivos correctos ao gestor: é fazer o seu salário variar da mesma forma que x:

$$w(x) = x - \alpha.$$

Este esquema pode ser interpretado como vender por α a empresa ao gestor e este passar a receber x. Com este esquema de compensação, o agente escolhe o nível de esforço tal que:

$$\max_{e} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} xf(x|e)dx - g(e) - \alpha.$$

Ora a solução deste problema, e^*, é precisamente a mesma da solução do problema (2.6). O valor de α é determinado usando a condição de participação. Como o agente está disposto a aceitar qualquer contrato que lhe dê uma utilidade esperada maior ou igual a $\underline{U}$, o delegante oferece um contrato em que α é dado por:

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} xf(x|e^*)dx - g(e^*) - \alpha = \underline{U}.$$

2.5.3 Esquema de incentivos se agente for avesso ao risco

Este é o caso mais interessante. Aqui não resulta oferecer um esquema de compensação em que o agente suporte todo o risco, porque ele não gosta de variabilidade no salário. Mas também não resulta oferecer-lhe um salário constante, se o delegante quiser induzir um nível de esforço superior a $\underline{e}$, porque senão o agente esforçar-se-ia o menos possível. Por outras palavras, há um *tradeoff* entre partilha de risco e incentivos.

O problema do delegante pode formalizar-se da seguinte forma:

$$\max_{e,w(x)} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} [x - w(x)]\, f(x|e)dx$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx - g(e) &\geq \underline{U} \\ \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx - g(e) &\geq \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e')dx - g(e') \text{ para todo o } e'. \end{aligned}$$

Ou seja, o delegante tem de levar em consideração o comportamento posterior do agente (levar em consideração as condições de participação e de compatibilidade de incentivos). Repare-se que, sendo e uma variável real, há um contínuo de condições de compatibilidade de incentivos, o que torna o problema anterior de difícil resolução.

Uma das formas de resolver o problema anterior é, em vez de usar as condições de compatibilidade de incentivos, usar a condição de 1^a ordem do problema do agente. Por outras palavras, dado $w(x)$ o agente escolhe o nível de esforço de forma a maximizar a sua utilidade esperada:

$$\max_e \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx - g(e).$$

A condição de primeira ordem deste problema é:

$$\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f_e(x|e)dx = g'(e). \tag{2.7}$$

Ou seja, o agente escolhe o nível de esforço que iguala o benefício marginal do esforço (que é igual à variação na utilidade esperada quando e aumenta) à desutilidade marginal do esforço. Repare-se que em geral, esta condição é apenas necessária para termos um máximo.

O que se faz de seguida é substituir as condições de compatibilidade de incentivos no problema do delegante, pela condição de primeira ordem do problema do agente (equação (2.7)). Sejam λ e μ os multiplicadores de Lagrange associados à restrição de participação e à condição de 1^a ordem do problema do agente, respectivamente. A função lagrangeana do delegante pode escrever-se da seguinte forma (escrita de forma a que o multiplicador λ venha não negativo):

$$\begin{aligned} L(e, w(x), \lambda, \mu) &= \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} [x - w(x)]\, f(x|e)dx + \lambda \left[\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f(x|e)dx - g(e) - \underline{U} \right] + \\ &\quad \mu \left[\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f_e(x|e)dx - g'(e) \right] \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem em relação às variáveis de decisão, e e $w(x)$ são:

$$\frac{\partial L}{\partial e} = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} [x - w(x)]\, f_e(x|e)dx + \lambda \underbrace{\left[\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f_e(x|e)dx - g'(e)\right]}_{\text{0 pela condição } 1^a \text{ordem do agente}} +$$

$$\mu \left[\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(w(x))f_{ee}(x|e)dx - g''(e)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w(x)} = -f(x|e) + \lambda u'(w(x))f(x|e) + \mu u\acute{}(w(x))f_e(x|e) = 0 \text{ para todo o } x.$$

As condições de primeira ordem deste problema são muito interessantes do ponto de vista económico. A primeira condição, que define o nível óptimo de e, diz-nos que, no óptimo, o benefício marginal do esforço deve igualar o custo marginal do esforço. A segunda condição, diz-nos muito sobre as propriedades do esquema de incentivos.

Se dividirmos a condição $\frac{\partial L}{\partial w(x)} = 0$ por $f(x|e)$ obtemos:

$$1 = \lambda u'(w(x)) + \mu \left[u'(w(x))\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}\right]$$

e dividindo por $u'(w(x))$

$$\frac{1}{u'(w(x))} = \lambda + \mu \left[\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}\right]. \tag{2.8}$$

Das condições de Kuhn-Tucker sabemos que $\lambda > 0$. Podemos mostrar[4] que $\mu > 0$ desde que $e > \underline{e}$. Por um lado, μ, não pode ser zero porque senão teríamos:

$$\frac{1}{u'(w(x))} = 1,$$

o que só seria verdade (com agente avesso ao risco) se $w(x)$ fosse constante. Mas isso implicaria que o agente se esforçaria o menos possível $e = \underline{e}$. Por outro lado, é possível mostrar que μ não pode ser negativo desde que seja satisfeita a condição de dominância estocástica de primeira ordem, $F_e(x\,|e) < 0$.

Para tirarmos mais conclusões sobre o esquema de compensação, temos que conhecer melhor o comportamento do rácio $\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}$ Vamos admitir que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}\right] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial e}\log f(x|e) \geq 0.$$

[4]Note-se que as condições de Kun-Tucker não colocam qualquer restrição no sinal de μ, uma vez que a restrição a que está associado μ é uma restrição de igualdade.

O que esta propriedade nos diz é que o aumento percentual em $f(x\,|e\,)$ quando aumenta o nível de esforço, é crescente com x. Por outras palavras, os resultados bons (x elevado) são um sinal mais forte de que o nível de esforço foi elevado. Esta propriedade é conhecida na literatura anglo-saxónica por MRLP (monotone likelihood ratio property).

Se verificar a propriedade de o rácio de verosimilhança ser crescente com x, é fácil mostrar que o salário é crescente com x (a melhores resultados correspondem compensações mais elevadas). Se se verificar a MLRP, $\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}$ é crescente com x, o que implica que o lado direito da equação (2.8) é crescente com x. Mas então o lado esquerdo da equação também tem de ser crescente com x, o que por sua vez implica que $u'(w(x))$ tem de ser decrescente com x. Mas, como $u'' < 0$, isso implica que $w(x)$ tem de ser crescente com x.

Quando é que a abordagem da condição de primeira ordem é válida?

Como vimos atrás a ideia de substituir as condições de compatibilidade de incentivos pela condição de primeira ordem do problema do agente tem algumas limitações. Será que há condições que garantem que a abordagem da condição de primeira ordem é correcta. Aqui vamos ver dois conjuntos de condições que garantem a validade da abordagem de primeira ordem. Estas condições não são as únicas que podiam ser usadas.

A primeira condição é a condição de linearidade da função densidade:

$$f(x|e) = ef_1(x) + (1-e)f_0(x) \text{ com } e \in [0,1]\,,$$

onde $f_1(x)$ e $f_0(x)$ são as funções de densidade quando $e = 1$ e $e = 0$, respectivamente. A função objectivo do agente é:

$$\int u(w(x))f(x|e)dx - g(e),$$

o que, da hipótese de linearidade da função de densidade, é equivalente a:

$$e\int u(w(x))f_1(x)dx + (1-e)\int u(w(x))f_0(x)dx - g(e).$$

O que é uma função côncava em e, uma vez que os dois primeiros termos são lineares em e e que $g(e)$ é convexa (logo $-g(e)$ é côncava). Logo, neste caso, a condição de primeira ordem do problema do agente é necessária e suficiente para um máximo e, desta forma, é válida a abordagem da condição de primeira ordem.

Um outro conjunto de condições que garante a validade da abordagem de primeira ordem é a condição do rácio de verosimilhança ser crescente com x e a função de distribuição ser convexa:

$$\lambda F(x|e_1) + (1-\lambda)F(x|e_2) \geq F(x|\lambda e_1 + (1-\lambda)xe_2),$$

o que é equivalente a dizer que a produtividade marginal do esforço é decrescente.

Já sabemos que o facto de o rácio de verosimilhança ser crescente implica que o salário seja crescente, ou seja, $w' > 0$. Vejamos se a utilidade esperada do agente é uma função côncava:

$$\int u(w(x))f(x|e)dx - g(e).$$

Integrando por partes, obtemos:

$$u(w(x))\ F(x|e)\,|_{\underline{x}}^{\overline{x}} - \int u'(w(x))w'(x)F(x|e)dx - g(e) = u(w(x)) \underbrace{- \int \underbrace{u'(w(x))w'(x)}_{+}\underbrace{F(x|e)}_{\text{convexa}}dx}_{\text{côncava}} \underbrace{-g(e)}_{\text{côncava}}$$