# Cap. 1 – Programação Linear (PL)

## Objectivos – aprender a formular problemas em programação linear e a resolvê-los recorrendo ao *Solver*/*Excel* e graficamente.

## Definições

### Modelo de PL (exemplo protótipo)

$i = 1,2,...,m$ recursos ou outras imposições do modelo (fábricas)

$j = 1,2,...,n$ actividades (produtos)

#### Parâmetros do Modelo:

$c_j$ ($j = 1,2,...,n$) coeficientes da FO (lucro unitário associado ao produto $j$)

$b_i$ ($i = 1,2,...,m$) 2º membro ou termo independente (capacidade disponível da fábrica *i*)

$a_{ij}$ ($j = 1,2,...,n$; $i = 1,2,...,m$) coeficiente técnico (capacidade gasta da fábrica *i* por cada unidade a fabricar do produto $j$)

Definindo $x_j$ como o nível da actividade $j$ ($j=1,\ldots,n$) (unidades a produzir do produto $j$), e designando por $Z$ a medida do desempenho total (lucro) a formalização em programação linear é:

#### Forma Standard:

$$Z^* = Max\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{função objectivo (FO)}$$

s.a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,...,m \qquad \text{restrições funcionais} \\ x_j \ge 0 & j = 1,...,n \qquad \text{restrições de sinal} \end{cases}$$

A ***solução*** de um problema de PL é um vector de $\mathbb{R}^n$ que representa o valor das variáveis.

Uma solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal) designa-se por ***Solução Admissível*** (SA). Uma ***Solução*** diz-se ***Não Admissível*** (SNA) se não verifica pelo menos uma das restrições.

O conjunto de todas as soluções admissíveis designa-se por ***Região Admissível*** (RA).

***Solução Óptima*** (SO) é uma solução admissível que origina o valor mais favorável para a função objectivo (FO).

Designam-se por ***soluções óptimas alternativas*** as diferentes soluções óptimas de um mesmo problema, caso existam.

***Valor Óptimo*** (*Z**) é o valor da função objectivo numa solução óptima.

## Hipóteses da PL

**(H1)** Proporcionalidade (num contexto de análise de actividades): $\cancel{x_j^2}$

A contribuição de cada actividade (*j*) para o valor da função objectivo *Z* é proporcional ao nível da actividade ($c_j x_j$).

A contribuição de cada actividade para o primeiro membro de cada restrição funcional é proporcional ao nível da actividade ($a_{ij} x_j$).

**(H2)** Aditividade (num contexto de análise de actividades): $\cancel{x_j x_k}$

Num modelo de PL cada função é a soma das contribuições individuais das respectivas actividades.

**(H3)** Divisibilidade: $\forall j,\ x_j \in \mathbb{R}$.

**(H4)** Certeza: Num modelo de PL todos os parâmetros são constantes conhecidas.

## Propriedades da PL

Propriedade 1: A região admissível de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo.

Propriedade 2: Se a região admissível de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução óptima.

Propriedade 3: Se um problema de PL tem óptimo, então pelo menos um dos pontos extremos da região admissível é solução óptima.

Propriedade 4: Dado um problema de PL com óptimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objectivo, então esse ponto extremo é solução óptima.

## Resolução Gráfica de Problemas de PL

Exige-se a resolução gráfica de problemas com apenas duas variáveis de decisão.

**1º)** Representar a região admissível (RA)

a. identificar o semi-plano correspondente a cada uma das restrições de sinal impostas;
b. representar o semi-plano correspondente a cada uma das restrições funcionais (desenhar a recta associada e identificar o semi-plano associado à respectiva inequação / equação);
c. definir a RA como sendo o resultado da intersecção de todos os semi-planos identificados. Se $\mathrm{RA} = \varnothing$ o problema é impossível, caso contrário prosseguir.

**2º)** Identificar, caso exista, o(s) ponto(s) óptimo(s):

a. representar uma recta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a $Z$) e identificar o sentido de optimização
b. identificar o(s) pontos(s) da RA a que corresponde o melhor valor de $Z$ (ou seja, identificar a SO), ou concluir que o problema tem valor óptimo ilimitado (não tem solução óptima).

Um PL está na ***forma aumentada*** se todas as variáveis são não negativas e todas as restrições funcionais estão expressas por equações, introduzindo, se necessário, variáveis não negativas, designadas por ***variáveis auxiliares*** (***variáveis desvio*** ou ***variáveis de folga***).

Uma ***solução aumentada*** é uma solução do problema aumentado.

Propriedade 5: Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

## Passagem de Modelos de PL à Forma Aumentada de Maximização

**(i)** $Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow Max(-Z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \qquad (Min\ Z = -Máx(-Z))$

**(ii)** Restrição de tipo '$\leq$': $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \ \wedge \ x_{n+i} \geq 0$

**(iii)** Restrição de tipo '$\geq$': $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k \ \wedge \ x_{n+k} \geq 0$

**(iv)** Variável não positiva: $x_j \leq 0 \Leftrightarrow x'_j = -x_j \geq 0$

**(v)** Variável livre: $x_j$ livre $\Rightarrow x_j = x'_j - x''_j$, com $\begin{cases} x'_j = Máx\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = Máx\{0; -x_j\} \geq 0 \end{cases}$

## Soluções Básicas Admissíveis

Dado o problema aumentado com $m$ equações e $\ell$ ($>m$) variáveis, se se atribuir o valor zero a $\ell - m$ variáveis – ***Variáveis Não Básicas*** (VNB) – e se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes $m$ variáveis – ***Variáveis Básicas*** (VB) – obtém-se uma ***Solução Básica*** (SB).

Uma ***Solução Básica*** diz-se ***Admissível*** (SBA) se todas as variáveis respeitarem as restrições de sinal. Caso pelo menos uma variável não respeite as restrições de sinal a solução denomina-se ***Solução Básica Não Admissível*** (SBNA).

A cada solução básica admissível corresponde um só ponto extremo da região admissível (RA), também designado por ***solução de canto admissível***. Cada ponto extremo da RA tem associada pelo menos uma SBA.

Duas ***soluções básicas*** dizem-se ***adjacentes*** se os respectivos conjuntos de variáveis básicas apenas diferem por uma variável (e, consequentemente, os respectivos conjuntos de variáveis não básicas apenas diferem por uma variável). Graficamente, em $\mathbb{R}^2$, duas soluções de canto admissíveis são adjacentes se pertencerem ao mesmo segmento de recta na fronteira da RA.

# Dualidade e Análise de Sensibilidade

**Objectivos** – aprender a interpretar economicamente as soluções dos problemas, incluindo preços-sombra, e a efectuar estudos de sensibilidade a alguns parâmetros.

Correspondência entre um par de problemas duais (primal/dual)

| PRIMAL (DUAL) | DUAL (PRIMAL) |
|---|---|
| Maximizar<br>$Max\ Z$ $(Max\ W)$ | Minimizar<br>$Min\ W$ $(Min\ Z)$ |
| 1 restrição | 1 variável de decisão |
| $i$-ésima restrição de tipo "≤" | $y_i \geq 0$ $(x_i \geq 0)$ |
| $i$-ésima restrição de tipo "≥" | $y_i \leq 0$ $(x_i \leq 0)$ |
| $i$-ésima restrição de tipo "=" | $y_i$ livre $(x_i$ livre$)$ |
| Termos independentes<br>$b_i\ i=1,\ldots,m$ $(c_j\ j=1,\ldots,n)$ | Coeficientes da função objectivo<br>$W= b_1 y_1 +\ldots+ b_m y_m$ $(Z= c_1 x_1 +\ldots+ c_n x_n)$ |
| Coeficientes da função objectivo<br>$Z= c_1 x_1 +\ldots+ c_n x_n$ $(W= b_1 y_1 +\ldots+ b_m y_m)$ | Termos independentes<br>$c_j\ j=1,\ldots,n$ $(b_i\ i=1,\ldots,m)$ |
| 1 variável de decisão | 1 restrição |
| $x_j \geq 0$ $(y_j \geq 0)$ | $j$-ésima restrição de tipo "≥" |
| $x_j \leq 0$ $(y_j \leq 0)$ | $j$-ésima restrição de tipo "≤" |
| $x_j$ livre $(y_j$ livre$)$ | $j$-ésima restrição de tipo "=" |
| Matriz de coeficientes técnicos<br>$A$ $(A^T)$ | Matriz de coeficientes técnicos<br>$A^T$ $(A)$ |

O ***i*-ésimo preço-sombra** $(y_i)$ representa a proporção de variação no valor óptimo em função do acréscimo no *i*-ésimo segundo membro.

Relação entre as variáveis de um par de problemas duais

| nº | Primal | Dual |
|---|---|---|
| $n$ | Variável de decisão | Restrição (variável desvio) |
| $m$ | Restrição (variável desvio) | Variável de decisão |

## Propriedades da Dualidade

**Propriedade 4:** O dual do dual é o primal.

**Propriedade 5:** Teorema Fraco (dado um problema primal de maximização)

Se $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ é SA primal e $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_m)$ é SA do dual então, $Z' = c_1x'_1 + c_2x'_2 + \ldots + c_nx'_n \leq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \ldots + b_my'_m = W'$.

**Propriedade 6:** Se $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ é SA do primal, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ é SA do dual e

$$Z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \ldots + b_my_m^* = W^*$$

então, $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ são soluções óptimas dos respectivos problemas.

**Propriedade 7:** Dado um par de problemas duais, se um tem função objectivo ilimitada o outro é impossível.

**Propriedade 8:** Teorema Forte
Dado um par de problemas duais, se um tem solução óptima então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas são iguais, ou seja, $Z^* = W^*$.

**Propriedade 9:** Os preços-sombra são os valores das variáveis de decisão na solução óptima do dual.

Tabela: Soluções Primal/Dual

| PRIMAL / DUAL | Tem SA | Não tem SA |
|---|---|---|
| Tem SA | Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$ | Primal impossível<br>Dual ilimitado |
| Não tem SA | Primal ilimitado<br>Dual impossível | Primal impossível<br>Dual impossível |

Relações de desvios complementares entre soluções básicas complementares

| Nº de variáveis | Variável Primal | Variável Dual |
|---|---|---|
| $m$ | Básica | Não Básica |
| $\ell - m$ | Não Básica | Básica |