ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N^{o}1

1. Sejam P, Q e R, proposições. Prove que as seguintes proposições são verdadeiras:

   (a) $(P \vee F) \Leftrightarrow P$;

   (b) $(P \wedge V) \Leftrightarrow P$;

   (c) $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$;

   (d) $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$;

   (e) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$;

   (f) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$;

   (g) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee ((\sim P) \wedge (\sim Q))]$;

   (h) $(\sim (P \Leftrightarrow Q)) \Leftrightarrow [(P \wedge (\sim) Q) \vee ((\sim P) \wedge Q)]$;

   (i) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim P) \Leftrightarrow (\sim Q))$;

   (j) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [\sim [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim (Q \Rightarrow P))]]$;

   (k) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim Q) \Rightarrow (\sim P))$;

   (l) $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow (P \wedge Q)$;

   (m) $(P \vee Q) \Leftrightarrow ((\sim P) \Rightarrow Q)$;

   (n) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow [\sim (P \Rightarrow (\sim Q))]$.

2. Prove que as proposições $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ são equivalentes.

3. Escreva uma proposição equivalente à seguinte usando apenas as operações "$\sim$" e "$\vee$":

$$(A \Rightarrow B) \wedge ((\sim A) \Rightarrow C).$$

4. Para cada uma das proposições seguintes, escreva uma proposição equivalente na qual todos os quantificadores apareçam à esquerda:

   (a) $\forall x, [P(x) \Rightarrow \exists y, Q(y)]$;

   (b) $[\forall x, P(x)] \Rightarrow [\exists y, Q(y)]$;

   (c) $[\exists x, P(x)] \Rightarrow [\forall y, Q(y)]$.

5. Mostre que

$$[(\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (\forall x, A(x)] \Rightarrow (\forall x, B(x)).$$

6. Prove as seguintes proposições:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, 1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, 1+8+27+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.