ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha Nº3

1. Considere uma família de conjuntos $\{A_i \subset \mathbb{R}, i \in I\}$.

   (a) Prove que se todos os A_i forem fechados, então o conjunto $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ é fechado.

   (b) Apresente um exemplo em que todos os A_i são fechados mas $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ não é fechado.

2. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine o respectivo interior, exterior, fronteira e fecho.

   (a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2n+1} < |x| < \frac{1}{2n}\right\}$;

   (b) $[0, 1[\cup \{2\}$;

   (c) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x = n + \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$.

   (d) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x =\in \mathbb{R} : \sin(x + \frac{1}{n}) \geq 0\right\}$.

3. Quando possível, dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

   (a) Um conjunto finito, no vazio e aberto;

   (b) Um conjunto fechado não limitado;

   (c) Um conjunto igual à sua fronteira;

   (d) Um conjunto finito mas não majorado;

   (e) Um conjunto cujo exterior é um intervalo limitado.

4. Represente os seguintes conjuntos sobre a recta real:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 2) \geq 0\}$;

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(1 + x^2) > 0\}$;

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq ||x| - 2|\}$;

   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x} < |x - 2|\right\}$;

5. para cada um dos seguintes conjuntos indique aqueles que são majorados, minorados ou limitados. Indique ainda (se existirem) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada conjunto.

(a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$;

(b) $\{x\in\mathbb{R} : x-1\geq x\}$;

(c) $\{x\in\mathbb{R} : x^2<9\}$;

(d) $\{x\in\mathbb{R} : |x-1|\geq |x|\}$;

(e) $\{x\in\mathbb{R} : |x-3|\leq 5\}$;

(f) $\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3}>\frac{x}{x-2}\right\}$;

(g) $[1,2]\cap\mathbb{Q}$;

(h) $\left\{x=n^{(-1)^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$;

(i) $\left\{x=n^{(-1)^m} : n,m\in\mathbb{N}\right\}$;

(j) $\left\{x=\frac{1}{n}+\frac{1}{m} : n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$.