ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha Nº12

1. Considere duas funções integraveis $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
   (a) Mostre que a função $x \mapsto f(x)g(x)$ é integravel no intervalo $[a, b]$.
   (b) Prove que é válida a desigualdade de Cauchy-Schwartz:
   $$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx.$$

2. Sejam: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e $g : [a, b] \mapsto [0, +\infty[$, uma função integravel.
   (a) Mostre que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$
   (b) O resultado ainda é válido se g tomar valores positivos e negativos? Justifique.

3. Considere uma função contínua $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$.
   Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite pelo menos uma raíz no intervalo $]a, b[$.

4. Considere a função $F :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por
   $$F(x) = \int_1^x e^{\frac{t^2+1}{t}} \frac{1}{t} dt.$$
   Mostre que para todo $x > 0$ se verifica $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

5. Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por
   $$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt.$$
   (a) Calcule $\varphi(2)$;
   (b) Mostre que φ é diferenciavel e calcule $\varphi'(x) \quad x > 0$;
   (c) Estude φ quanto ao crescimento e mostre que existe um único ponto $c > 0$ que verifica $\varphi(c) = 0$.

6. Sejam $u, v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, funções contínuas, $a, b \in \mathbb{R}$ constantes e suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica a igualdade

$$\int_a^x u(t)dt = \int_b^x v(t)dt.$$

Mostre que $u = v$ e que $\int_a^b u(t)dt = 0$.

7. Seja $\varphi : \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$ e seja

$$\psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Estude o sinal de ψ.

   (b) Mostre que ψ é derivavel e calcule ψ'.

   (c) Mostre que ψ é estritamente decrescente no intervalo $] - \infty, 0[$.

   (d) Mostre que ψ tem um mínimo global e verifica

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \psi(x) \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} \varphi(x).$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e seja $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, a função definida por

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

   (a) Determine $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

   (b) Prove que g é constante em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se e só se f for constante.

   (c) Prove que o contradomínio de g está contido no contradomínio de f.

   (d) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, dê um exemplo de uma função f contínua em $\mathbb{R}$, sem limite quando $x \to +\infty$, tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \alpha$.

9. Uma função $f : [-a, a] \mapsto \mathbb{R}$ diz-se **ímpar** se verificar

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \in [-a, a],$$

diz-se **par** se verificar

$$f(-x) = f(x), \qquad \forall x \in [-a, a],$$

   (a) Mostre que, se f for integravel, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \qquad \text{se } f \text{ for par;}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad \text{se } f \text{ for ímpar.}$$

(b) Calcule os seguintes integrais:

   i. $\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{1+x^8} dx$;

   ii. $\int_{-1}^{1} |x| dx$;

   iii. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

10. Supondo que f e g são funções contínuas, prove as seguintes igualdades:

    (a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$;

    (b) $\int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t g(x)f(t-x)dx$;

    (c) $\int_0^1 \frac{1}{\arccos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

11. Determine o sinal do integral $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.