ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N^{o}15

1. Calcule os seguintes limites, caso existam

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\cos\frac{x}{n}+x^2} dx$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$, em que

$$f_n(x) = \begin{cases} xn^2, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ 2n - xn^2, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{2}{n}\right]. \end{cases}$$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n(1-x)^n \sin x dx$.

2. Sendo $f_n(x) = nxe^{-x^2}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

3. Seja $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções convergindo uniformemente para a função integravel $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx = 0.$$