ANÁLISE MATEMÁTICA I

Alguns exercícios e exemplos das aulas

1. Escreva os seguintes conjuntos sob a forma de intervalos
   (a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{k}-1, 1+\frac{(-1)^k}{k}\right]$;
   (b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{k}-1, 1+\frac{(-1)^k}{k}\right]$.
2. Mostre que intervalos abertos são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ e intervalos fechados são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$.
3. Dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, diga quais são abertos e quais são fechados.
   (a) $\mathbb{N}$;
   (b) $\left\{x=\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$;
   (c) $\left\{x=\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$;
   (d) $\emptyset$;
   (e) $\mathbb{R}$.
4. Considere uma família de conjuntos $\{A_i\subset\mathbb{R}, i\in I\}$.
   (a) Prove que se todos os A_i forem abertos, então o conjunto $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ é aberto.
   (b) Apresente um exemplo em que todos os A_i são abertos mas $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ não é aberto.
5. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine o interior, o exterior, a fronteira e o fecho.
   (a) $[0,1[\cup]1,2[\cup\{-1\}$;
   (b) $\mathbb{N}$;
   (c) $\mathbb{Q}$;
   (d) $\emptyset$;
   (e) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$;
   (f) $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{2i+1}}, \frac{1}{2^{2i}}\right]$.
6. para cada um dos seguintes conjuntos indique aqueles que são majorados, minorados ou limitados. Indique ainda (se existirem) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada conjunto.

(a) $]1,2[\cup\{2^{-n} : n\in\mathbb{N}\}$;
(b) $]1,2[\cup\{2^{-n} : n\in\mathbb{Z}\}$;
(c) $\emptyset$;
(d) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$;
(e) $[0,\pi]\cap\mathbb{Q}$.

7. Indique para cada uma das seguintes sucessões se ela é limitada, majorada ou minorada, crescente, decrescente ou monótona.

   (a) $a_n = n$;
   (b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$;
   (c) $a_n = \frac{n+(-1)^n+n^2}{2n^2}$;
   (d) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n}{2n}$.

8. Prove cada uma das seguintes igualdades usando a definição de limite:

   (a) $\lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$;
   (b) $\lim n = +\infty$;
   (c) $\lim \frac{n^2+(-1)^n}{2n} = +\infty$.

9. Calcule os seguintes limites, caso existam:

   (a) $\lim \frac{2^{n+5}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$;
   (b) $\lim \frac{n^2-\sqrt{n^2+1}+1}{n^2-1}$;
   (c) $\lim \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;
   (d) $\lim \left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$.

10. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{x^2-2x}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Determine os pontos de continuidade de f.

11. Estude a seguinte função quanto à continuidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\sin\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ a, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

12. Prove que a equação $e^x = x$ admite solução real.

13. Prove que um polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raíz real.

14. Diga quais das seguintes funções tem máximo e mínimo:

    (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;
    (b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
    (c) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

15. Calcule as derivadas das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \sin x^2$;
    (b) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x}$;
    (c) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}}$;
    (d) $f(x) = \frac{e^x+\sqrt{1+x^2}}{x^2+\sin x}$.

16. Prove as seguintes igualdades:

    (a) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \forall x > 0$;
    (b) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]0,1[$;
    (c) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]0,1[$;
    (d) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

17. Para cada uma das seguintes funções, determine a função derivada e indique o respectivo domínio.

    (a) $f(x) = x|x|$;
    (b) $f(x) = e^{-|x|}$;
    (c) $f(x) = \ln|x|$;
    (d) $f(x) = e^{x-|x|}$;
    (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$
    (f) $f(x) = \begin{cases} x \sin \ln x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$
    (g) $f(x) = \sqrt{x \sin x} \cos x$.

18. Calcule os seguintes limites, caso existam:

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$;
    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;
    (c) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
    (d) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}, \qquad (a>0,\ b>0)$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x+e^x)$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)\ln\ln x$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

19. Determine os intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (caso existam) para as funções

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = x\ln x$;

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

20. Determine as primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = x^3$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$;

(d) $f(x) = \sin x\cos x$;

(e) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

(f) $f(x) = \frac{x^2+1}{(1-x)^2}$;

(g) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$;

(h) $f(x) = \frac{e^x}{2+e^{2x}}$;

(i) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

(j) $f(x) = \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$;

(k) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

(l) $f(x) = \cos^3 x$;

(m) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

(n) $f(x) = \frac{1}{x(4-\ln^2 x)}$.

21. Determine as primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = xe^x$;

(b) $f(x) = \sin x e^x$;

(c) $f(x) = \sin^n x, \qquad (n\in\mathbb{N})$;

(d) $f(x) = \ln x$;

(e) $f(x) = x^n\ln x, \qquad (n\in\mathbb{N})$;

(f) $f(x) = \ln^n x, \qquad (n\in\mathbb{N})$;

(g) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

(h) $f(x) = x^2 \text{arctg}\, x$;

(i) $f(x) = \frac{x^7+5x^2+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$;

(j) $f(x) = \frac{1}{((x+1)^2+4)^2}$.

22. Determine as primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$;

(c) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$.

23. Determine as primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$;

(d) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$;

(e) $f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$;

(f) $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$;

(g) $f(x) = x(\text{arctg}\, x)^2$;

(h) $f(x) = x\text{tg}^2(2x)$.

24. Calcule os seguintes integrais

(a) $\int_0^3 (x-1)(x-3)dx$;

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$;

(c) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$;

(d) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

25. Calcule as seguintes àreas

(a) A àrea do conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq x\}$;

(b) A àrea da região limitada pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$, com $0 \leq x \leq \pi$.

26. Calcule os seguintes integrais impróprios, caso existam:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$;

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$;

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x)^2}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

27. Determine a natureza dos seguintes integrais

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$;

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx$;

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x-1)^2}{\sqrt{x}+x^2} dx$;

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$.