Mestrado em Matemática Financeira

Cálculo Estocástico

Exame modelo

2009/2010

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade onde está definido um movimento Browniano B. Considere o processo X definido por $X_t := B_{2t} - B_t$, com $t \geq 0$..

(a) Determine a média e a variância de X_t. Será X um processo Gaussiano? E será um movimento Browniano? Justifique.

(b) Considere agora que, para além de B, temos um outro movimento Browniano: o processo W, que é independente de B. Mostre o processo Y definido por $Y_t := \frac{B_t + W_t}{\sqrt{2}}$ é um movimento Browniano.

2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade onde está definido um movimento Browniano B Considere o processo M, definido por $M_t = B_t^3 - 3tB_t$.

(a) Mostre de forma directa que M é uma martingala (sugestão: use a igualdade $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ com $a = B_t$ e $b = B_{t+s} - B_t$).

(b) Mostre que M é uma martingala usando a fórmula de Itô para representar M_t usando um integral estocástico.

3. Seja X um processo estocástico que satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= \sqrt{1 + X_t}\, dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

Assuma que os integrais de Itô são martingalas.

(a) Determine a média e a variância de X_t.

(b) Seja $m(u,t) := E\left[e^{uX_t}\right]$ a função geradora de momentos de X_t. Mostre que $m(u,t)$ satisfaz a EDP

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{u^2}{2}\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{u^2}{2} m.$$

4. Considere o problema de valores na fronteira no domínio $[0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \mu x \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= rF, \qquad\qquad 0 \leq t \leq T \\ F(T,x) &= x^2, \end{aligned}$$

onde se assume que μ, σ e r são constantes positivas.

(a) Determine uma representação estocástica para a solução deste problema

(b) Determine explicitamente a solução do problema $F(t,x)$.

5. Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (exemplo conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \quad \text{ e } \quad dB_t = r\, B_t\, dt, \text{ com } B_0 = 1,$$

onde W é um movimento Browniano. Considere um direito contingente (derivado) da forma $\chi = \Phi(S_T) = S_T^3$.

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t e $Y_t := S_t^3$, sob a medida Q (medida de martingala).

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) = S_T^3$.

6. Seja B um movimento Browniano. Considere o processo X definido por

$$X_t := \exp\left(\int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t [f(s)]^2\, ds\right), \quad 0 \le t \le T.$$

onde f é uma função determinística tal que $\int_0^T [f(s)]^2\, ds < \infty$. Mostre que o processo Z definido por $Z_t := X_t f(t)$ pertence à classe de processos $L^2_{a,T}$ (i.e., é um processo adaptado de quadrado integrável).