Correcção do Exame de 15/06/2010 - EDCE - ÉPOCA NORMAL - versão provisória

1. i) Para cada t fixo, o processo Y_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável pois é uma função de t e de B_t, e B_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável.Logo Y_t é adaptado.

ii) $E\left[|Y_t|\right] \leq e^{\frac{t}{2}} E\left[|\sin(B_t)|\right] \leq e^{\frac{T}{2}} < \infty$

iii) Seja $Y_t = f(t, B_t)$ com $f(t,x) = e^{\frac{t}{2}} \sin(x)$. Esta função é de classe $C^{1,2}$. Então, pela fórmula de Itô, temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt + e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt \\ &= e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Logo, como $Y_0 = 0$, temos

$$Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s.$$

Como $e^{\frac{s}{2}} \cos(B_t) \in L^2_{a,T}$ pois o processo Y_t é adaptado e $E\left[\int_0^T \left(e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\right)^2 ds\right] \leq E\left[\int_0^T e^s \cos^2(B_s)\, ds\right] \leq Te^T < \infty$, o integral estocástico indefinido $Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s$.é uma martingala (propriedade essencial do integral estocástico indefefinido).

2. (a). Seja $Y_t = f(B_t) = B_t^3$. É claro que $f(x) = x^3$. Aplicando a fórmula de Itô (note-se que f é claramente de classe C^2), temos

$$dY_t = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt.$$

Portanto

$$Y_T = B_T^3 = 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $Z_t = tB_t$, ou seja, $Z_t = g(t, B_t)$ com $g(t,x) = tx$, temos:

$$dZ_t = B_t dt + t dB_t,$$

ou seja

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

Como $Z_0 = 0$, temos

$$Z_T = TB_T = \int_0^T B_s ds + \int_0^T s dB_s$$

e

$$\int_0^T B_s ds = TB_T - \int_0^T s dB_s$$

Logo

$$\begin{aligned} B_T^3 &= 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3TB_T - 3\int_0^T t dB_t \\ &= \int_0^T 3B_t^2 dB_t + \int_0^T 3T dBt - \int_0^T 3t dB_t \\ &= \int_0^T 3(B_t^2 + T - t) dB_t. \end{aligned}$$

e portanto $u_t = 3(B_t^2 + T - t)$.

2 (b) $Y_t = f(X_t)$ com $f(x) = x^\beta$, que é claramente de classe C^2. Pela fórmula de Itô temos

$$\begin{aligned} dY_t &= \beta X_t^{\beta-1}(dX_t) + \beta(\beta-1) X_t^{\beta-2}(dX_t)^2 \\ &= \beta X_t^{\beta-1}(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) + \beta(\beta-1) X_t^{\beta-2}\sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \left(\beta\mu + \beta(\beta-1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Pelo que a EDE é

$$dY_t = \left(\beta\mu + \beta(\beta-1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t.$$

3. (a) Podemos representar $Y_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t) X_t$, onde $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s$. Ou seja, $Y_t = f(t, X_t)$ com $f(t,x) = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t)x$. É óbvio que f é de classe $C^{1,2}$ e pela fórmula de Itô, como $dX_t = \frac{1}{T-t} dB_t$, temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(-\frac{a}{T} + \frac{b}{T} - X_t\right) dt + (T-t) dX_t \\ &= \frac{1}{T-t}\left(b - \left(a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t) X_t\right)\right) dt + \frac{T-t}{T-t} dB_t \\ &= \frac{b - Y_t}{T-t} dt + dB_t. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{b - Y_t}{T-t} dt + dB_t, \\ Y_0 &= a. \end{aligned}$$

3 (b) Como $\frac{1}{T-s} \in L^2_{a,T}$, o integral estocástico $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s$ está bem definido e o seu valor esperado é zero. Logo

$$E[Y_t] = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T}.$$

E, pela isometria de Itô temos

$$\begin{aligned}
Var\left[Y_t\right] &= E\left[Y_t^2\right]-\left(E\left[Y_t\right]\right)^2 \\
&= (T-t)^2 E\left[\left(\int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s\right)^2\right] \\
&= (T-t)^2 \int_0^t \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds \\
&= (T-t)^2 \left(\frac{1}{T-t}-\frac{1}{T}\right).
\end{aligned}$$

4 (a) Se $f(t,x)$ for uma função contínua em x que satisfaz a condição de Lipschitz e a condição de crescimento linear, podemos aplicar o teorema de existência e unicidade e garantir que existe uma solução única para a EDE (isto poque a função $\sigma\left(t,x\right)=c(t)x$ satisfaz a condição de Lipschitz e é linear em x).

Condição de Lipschitz: Existe constante D tal que

$$\left|f\left(t,x\right)-f\left(t,y\right)\right| \leq D\left|x-y\right|,\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ \forall t\in\left[0,T\right].$$

Condição de crescimento linear: Existe constante C tal que

$$\left|f\left(t,x\right)\right| \leq C\left(1+\left|x\right|\right), \forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\left[0,T\right].$$

Exemplo de função que satisfaz estas condições:

$$f\left(t,x\right)=tx.$$

(b) Como $\frac{dY_t}{dt}=tY_t$ é uma EDO separável, a sua solução é

$$\frac{dY_t}{Y_t}=tdt \Longrightarrow \ln\left(Y_t\right)=\frac{t^2}{2} \Longrightarrow Y_t=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Logo

$$X_t=F_tY_t=\exp\left(\int_0^t c\left(s\right)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left[c\left(s\right)\right]^2 ds+\frac{t^2}{2}\right)=\exp\left(Z_t-\frac{1}{2}\int_0^t\left[c\left(s\right)\right]^2 ds+\frac{t^2}{2}\right),$$

onde $Z_t:=\int_0^t c\left(s\right)dB_s$. Pelo que $X_t=g(t,Z_t)$ com $g(t,x)=\exp\left(x-\frac{1}{2}\int_0^t\left[c\left(s\right)\right]^2 ds+\frac{t^2}{2}\right)$. Aplicando a fórmula de Itô a X_t e $g(t,x)$, podemos verificar que

$$dX_t=f\left(t,X_t\right)dt+c\left(t\right)X_t dB_t$$

e também $X_0=1$.

5 (a) A EDE $dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$ é equivalente a

$$\begin{aligned} dS_t &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t, \end{aligned}$$

onde, pelo teorema de Girsanov, $\overline{W}_t := \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t$ é um movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade neutra face ao risco (ou medida de martingala equivalente). Portanto a EDE ou a dinâmica de S_t sob a medida Q é

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = \ln(S_t)$, temos:

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma d\overline{W}_t$$

ou

$$X_t = \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \overline{W}_t.$$

5 (b) Pelo modelo de B-S, temos que

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s} \left[\Phi(S_T) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s} \left[\ln(S_T) \right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} dS_u &= r\, S_u\, du + \sigma\, S_u\, d\overline{W}_u, \\ S_t &= s \end{aligned}$$

Pela alínea (a), temos

$$X_T = \ln(S_T) = \ln(s) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma \left(\overline{W}_T - \overline{W}_t \right).$$

Logo

$$E^Q_{t,s} \left[\ln(S_T) \right] = \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)$$

e

$$F(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right].$$

6. A ideia é fazer uma prova semelhante à da demonstraçao nos slides 8-10 da aula do Cap. 6 - parte 3.

Considerem-se o sprocessos

$$\begin{aligned} Y_t &= (s-t, B_t), \\ Z_t &= \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds. \end{aligned}$$

Aplique-se a fórmula de Itô à função $f(t,y,z) = e^z F(t,x)$. Obtemos

$$\begin{aligned} e^{Z_t} F(Y_t) &= F(s,x) + \\ &+ \int_0^t \left[\left(AF - \frac{\partial F}{\partial t} \right)(s-r, B_r) + \frac{1}{2} B_r^2 F(s-r, B_r) \right] e^{Z_r} dr \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r) e^{Z_r} dB_r, \end{aligned}$$

onde A é o operador infinitesimal associado a B_t, isto é:

$$AF = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Portanto, como F satisfaz a EDP, temos:

$$\begin{aligned} & \left(AF - \frac{\partial F}{\partial r} \right)(s-r, B_r^x) + \frac{1}{2} B_r^2 F(s-r, B_r) \\ = & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s-r, B_r) - \frac{\partial F}{\partial t}(s-r, B_r) + \frac{1}{2} B_r^2 F(s-r, B_r) \\ = & 0 \end{aligned}$$

e então:

$$e^{Z_t} F(Y_t) = F(s,x) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r) e^{Z_r} dB_r.$$

Aplicando o valor esperado e tomando $s = t$, obtemos

$$E_{0,x}\left[e^{Z_t} F(Y_t) \right] = F(t,x)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E_{0,x}\left[e^{Z_t} F(0, B_t) \right] \\ &= E_{0,x}\left[\varphi(B_t) \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds \right) \right]. \end{aligned}$$