

Programação Matemática - 2010/2011

Ficha de exercícios nº 1

Exercício 1 *Resolva o seguinte problema de optimização por metas:*

$$\begin{aligned} \min Z &= \{s_1^+; s_2^-; s_3^- + s_3^+\} \\ \text{s.a. } x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 20 \\ 4x_1 - x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_3^- - s_3^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 2 *Considere o seguinte problema de optimização por metas:*

$$\begin{aligned} \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 s_2^+ + P_3 s_3^- + P_4 (s_4^+ + s_4^-) \\ \text{s.a. } 2x_1 + x_2 &\leq 200 \\ 8x_1 + 5x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 400 \\ x_1 - x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 10 \\ x_2 + s_3^- - s_3^+ &= 140 \\ x_1 + s_4^- - s_4^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+, s_4^-, s_4^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva o problema.

b) Indique uma alteração das metas que dê origem a soluções alternativas. Justifique.

Exercício 3 *Determine o conjunto ideal do seguinte problema de optimização por metas e resolva-o:*

$$\begin{aligned} \min Z &= \{s_1^-; s_2^-\} \\ \text{s.a. } x_1 &\leq 60 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 6x_1 + 9x_2 &\leq 540 \\ x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 30 \\ x_1 + s_2^- - s_2^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 4 A direcção de uma empresa constatou que a mão-de-obra empregada está subaproveitada em 80 horas semanais. Para aproveitar essa mão-de-obra decidiu iniciar a produção de dois novos produtos, P1 e P2, que darão um lucro por tonelada de 8 u.m. e 12 u.m., respectivamente, e consumirão respectivamente 5 e 2 horas de mão-de-obra por tonelada produzida. A direcção pretende iniciar a produção garantindo um lucro não inferior a 280 u.m. e uma produção de pelo menos 10 toneladas de cada produto.

Analise a situação e elabore um relatório a enviar à direcção com os dados e sugestões que considere úteis.

Exercício 5 Uma empresa dispõe de 5×10^5 u.m. para gastar na campanha publicitária de lançamento de um novo produto. Pretende usar na campanha cartazes e spots televisivos sobre os quais tem a seguinte informação:

	custos (u.m.)	impacto (nº de pessoas)
spots (20 sg)	4×10^3	8×10^4
cartazes	20	1500

A empresa pretende (por ordem decrescente de importância):

- não exceder o orçamento
- editar pelo menos 20,000 cartazes
- atingir com os spots televisivos pelo menos 1 milhão e 500 mil potenciais clientes

a) Proponha uma campanha publicitária. Justifique.

b) Nas condições pretendidas, qual é o número máximo de potenciais compradores que é possível atingir com cada veículo publicitário? Justifique.

Exercício 6 Uma empresa pode produzir dois produtos, P1 e P2, de acordo com as seguintes condições:

Consumo por ton produzida	P1	P2
mp1 (ton)	30	40
mp2 (ton)	80	70
electricidade (Kw)	500	680
lucro por ton produzida	400	580

Sabendo que a empresa dispõe de 2400 ton de mp1 e de 5600 ton de mp2, e que pretende maximizar o lucro e minimizar o consumo de electricidade, faça uma análise detalhada da situação para ser apresentada à direcção da empresa.

Exercício 7 Uma empresa pode produzir dois produtos, $P1$ e $P2$, com base em duas matérias primas $mp1$ e $mp2$. O consumo de matérias primas (ton) por unidade produzida e as disponibilidades são os seguintes:

	P1	P2	disponibilidade (ton)
mp1	3	5	45
mp2	2	1	20

A empresa tem vindo a adoptar o plano de produção que maximiza a produção total, garantindo que a produção de $P1$ representa, pelo menos, 40% do total. É previsível que no futuro próximo a empresa venha a receber subsídios de 1 u.m. e 3 u.m. por unidade produzida de $P1$ e $P2$, respectivamente. A empresa considera importante otimizar o montante dos subsídios a receber. Assim, pretende estudar eventuais alterações ao plano de produção actual e respectivas consequências na produção global. Pretende ainda, avaliar o impacto no montante a receber da norma que tem vindo a ser adoptada relativamente à produção de $P1$.

Analise a situação e elabore um relatório com os dados, comentários e sugestões que considere importantes para apoiar uma decisão.

Exercício 8 Uma empresa pode passar a produzir dois produtos ($P1$ e $P2$) utilizando três tipos de matéria prima ($mp1$, $mp2$ e $mp3$) e mão-de-obra (mo). As estimativas do consumo unitário dos recursos e da receita por tonelada produzida são os seguintes:

	P1	P2
mp1 (u.m.)	1	2
mp2 (u.m.)	2	1
mp3 (u.m.)	1	5
mo (horas)	1	1
receita (u.m.)	20	50

As matérias primas $mp1$ e $mp2$ são nacionais mas $mp3$ é importada e tem de ser paga em divisas. Existem actualmente em armazém 50 u.m. de cada uma das matérias primas nacionais e dispõe-se de 30 horas de mão-de-obra. Não se dispõe de $mp3$ devendo ser estabelecido um contrato de importação de montante adequado ao plano de produção a implementar.

A empresa pretende maximizar a receita a obter com os novos produtos e, para evitar riscos cambiais, minimizar os pagamentos em divisas. A anterior direcção tinha planeado produzir 20 tons de $P1$ e 10 tons de $P2$. A nova direcção considera que este plano gera uma receita insuficiente.

Faça um estudo que lhe permita enviar uma nota à nova direcção, com dados e sugestões úteis para a reformulação do plano no sentido pretendido.

Exercício 9 Resolva o seguinte problema de otimização por metas:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 s_2^- + P_3 s_3^- \\
 \text{s.a} \quad & \begin{array}{rccccccc}
 & & x_2 & & +s_1^- - s_1^+ & & = & 5 \\
 -x_1 & -x_2 & & & & +s_2^- - s_2^+ & & = & 4 \\
 & & x_3 & & & & +s_3^- - s_3^+ & = & 3 \\
 & & x_2 & & & & & \leq & 2 \\
 & & x_3 & & & & & \leq & 3 \\
 x_1, x_2, x_3, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ & \geq & 0 & & & & & &
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Exercício 10 Considere o seguinte problema de otimização por metas:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 (s_2^- + s_2^+) + P_3 s_3^- \\
 \text{s.a} \quad & \begin{array}{rccccccc}
 x_1 - x_2 & & +s_1^- - s_1^+ & & & & = & 0 \\
 3x_1 + 5x_2 & & & & +s_2^- - s_2^+ & & = & 15 \\
 x_1 & & & & & & +s_3^- - s_3^+ & = & 4 \\
 x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ & \geq & 0 & & & & & &
 \end{array}
 \end{aligned}$$

- Resolva-o graficamente.
- Resolva-o pelo método de simplex.

Exercício 11 Uma fábrica de pequena dimensão localizada no norte do país produz conservas de peixe que vende no mercado interno e externo. Actualmente, o mercado interno, que está limitado a lojas gourmet, absorve apenas 5% da produção total anual. Como, ao contrário de outros, o sector da indústria conserveira nacional se encontra em crescimento, a administração pretende aumentar os níveis de produção da fábrica no próximo ano. A fábrica produz actualmente 50 mil latas de sardinha e 30 mil latas de atum por ano. A conserva de sardinha é vendida ao preço médio de 4 e 5 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. A receita média da conserva de atum é de 2 e 3 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. Para estabelecer o plano de produção para o próximo ano, a administração da fábrica estabeleceu as seguintes metas, por ordem decrescente de importância:

- Aumentar a receita total anual em pelo menos 10%.
- Limitar a produção anual de conserva de sardinha e de atum a 55 mil e 35 mil latas, respectivamente.
- Aumentar a produção anual em pelo menos 2 mil latas para o mercado interno e não permitir um aumento de produção anual para o mercado externo de mais de mil latas.

Formalize, como um problema de otimização por metas, o problema cuja solução permitirá à administração da fábrica estabelecer o plano de produção para o próximo ano, indicando o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

Exercício 12 *Uma empresa produz dois tipos de televisores: Plasma e LCD. De acordo com a experiência, a produção de cada um dos dois tipos requer, em média, 1 hora de trabalho. A capacidade normal de produção da fábrica da empresa é de 40 horas semanais. Devido à crise económica a empresa estima que as vendas médias semanais não ultrapassem as 24 e as 30 unidades de televisores Plasma e LCD, respectivamente. O lucro de um televisor Plasma é de 80 u.m. e de um televisor LCD é de 40 u.m.*

O administrador da empresa estabeleceu as seguintes metas, por ordem decrescente de importância:

- 1. Evitar a subutilização da capacidade normal de produção.*
- 2. Vender o maior número possível de televisores de acordo com a proporção de lucro de cada um dos dois tipos.*
- 3. Reduzir ao mínimo possível a sobreutilização da fábrica.*

Formalize, como um modelo de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá à administração da empresa estabelecer o seu plano de produção de televisores. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

Exercício 13 *Uma empresa de refrigerantes vai instalar uma unidade fabril em Angola. Actualmente a fábrica, localizada em Portugal, produz 75 milhões de litros de refrigerante por ano, dos quais 70% são vendidos em Portugal, sendo o restante exportado. Angola absorve 40% das exportações. O refrigerante é vendido em recipientes com capacidade para 0,33 litros: garrafas de vidro ou plástico e latas. Em média o enchimento de 250 garrafas consome uma unidade energética. Uma unidade energética é também necessária para encher 350 latas. Para a produção anual na unidade fabril de Angola, a empresa estabeleceu os seguintes objectivos, por ordem decrescente de prioridade:*

- (1) Produzir pelo menos 50% da quantidade procurada e não ter excedente no fim do ano.*
- (2) O rácio de produção de refrigerante em latas para garrafas de vidro ser pelo menos de 2 para 1.*
- (3) Não ultrapassar as 30 mil unidades de consumo energético.*

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá planear a produção de refrigerantes na unidade fabril de Angola. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.