II. TEORIA DA GESTÃO DE CARTEIRAS

A. SELECÇÃO DE ACTIVOS FINANCEIROS EM AMBIENTE DE RISCO [SAFAR]

Fronteira Eficiente | A Utilidade como Critério de Selecção

Outros Modelos de Selecção | Diversificação Internacional

Bibliografia:

Bodie, Kane e Marcus, capítulos 6, 7, 8.

Elton, Gruber, Bown, e Goetzmann, capítulos 1, 4, 5, 6 e 12.

Afonso, Barros, Calado, Borges, Garcia e Relvas, capítulo 2.

Pires, capítulos 3, 4 e 5.

Fronteira Eficiente

:: Escolha num contexto de CERTEZA

Todos os problemas implicam a necessidade de se tomar decisões.

Tarefas:

- Determinar as diferentes alternativas;
- Adoptar um critério de escolha;
- Determinar a solução do problema.

Quando não existe incerteza:

- Os agentes económicos conhecem os valores que as variáveis irão assumir no futuro;
- Exemplo típico: Escolha intertemporal.

:: Escolha num contexto de INCERTEZA

- Muitos activos financeiros não têm uma rentabilidade certa;

- "Quem prefere 100 euros de certeza ou jogar um jogo em que com 50% de probabilidade recebe 200 euros e com 50% de probabilidade não recebe nada?"

  Aversão ao risco, prémio de risco

- O mercado de activos reflecte este comportamento: as pessoas só estão dispostas a deter activos com mais risco se a sua rentabilidade for mais elevada!!

- **Ideia MARKOWITZ:as informações relevantes sobre os títulos podem ser resumidas através de três medidas: a rentabilidade média, o desvio-padrão da rentabilidade e a correlação com os outros retornos dos activos.**

RENTABILIDADE *versus* RISCO

→ Valores Históricos

→ Valores Futuros

:: RENTABILIDADE HISTÓRICA (POR PERÍODO)

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

mais-valia (%) **dividendos (%)**

RENTABILIDADE *versus* RISCO (VALORES HISTÓRICOS)

:: RENTABILIDADE HISTÓRICA

$$\overline{R}^{A} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_t}{T}$$ Aritmética

$$\overline{R}^{G} = (\Pi_{t=1}^{T}(1+R_t)^{1/T}) - 1$$ Geométrica

:: RISCO (medido DESVIO-PADRÃO) HISTÓRICO

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \overline{R})^2}{T}$$

RENTABILIDADE *versus* RISCO (VALORES ESPERADOS)

:: RENTABILIDADE ESPERADA (3 estados Natureza)

Estado Natureza	P_{t+1}	R_{t+1}	Prob.
Boas Condições Mercado	14	0.4	0.2
Condições Médias	11	0.1	0.4
Más Condições Mercado	10.5	0.05	0.4

$$E\left[R_{t+1}\right]=$$
$$=0.2*0.4+0.4*0.1+0.4*0.05$$
$$=0.14$$

$$Var\left[R_{t+1}\right]=$$
$$=0.2*(0.4-0.14)^2$$
$$+0.4*(0.1-0.14)^2$$
$$+0.4*(0.05-0.14)^2=0.05$$

RENTABILIDADE *versus* RISCO (VALORES ESPERADOS)

:: RENTABILIDADE ESPERADA ACTIVO *i* (M estados Natureza)

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}} = E[R_i] = \sum_{j=1}^{M} p^j R_i^j$$, **M estados Natureza**

Propriedades:

- $E[R_a + R_b] = E[R_a] + E[R_b]$
- $E[cR_a] = cE[R_a]$
- Se $p^j = \frac{1}{M}$ então $E[R_i] = \frac{\sum_{j=1}^{M} R_i^j}{M}$

RENTABILIDADE *versus* RISCO (VALORES ESPERADOS)

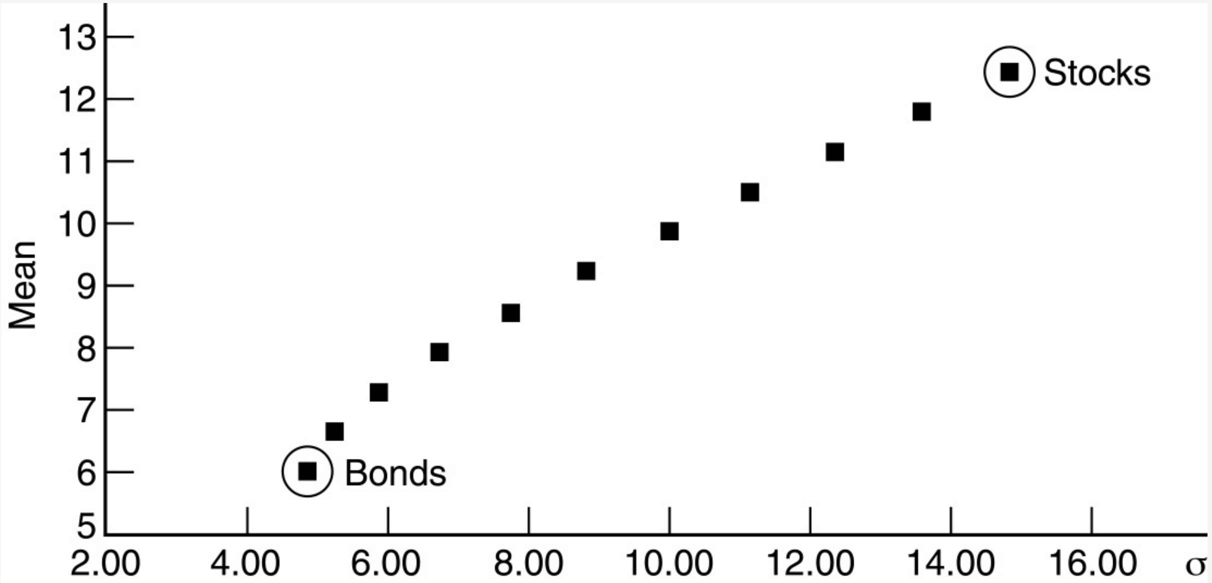
:: VARIÂNCIA DA RENTABILIDADE DO ACTIVO *i* (M estados Natureza)

$$\sigma_i^2 = Var[R_i] = E[R_i \text{-} \overline{R}_i]^2 = \sum_{j=1}^{M} p^j \left[R_i^j \text{-} E[R_i] \right]^2$$ **, M estados Natureza**

Propriedades:

- $Var[R_a \pm R_b] = Var[R_a] + Var[R_b] \pm 2\operatorname{cov}[R_a, R_b]$
- $Var[cR_a] = c^2 Var[R_a]$
- $Var[c + R_a] = Var[R_a]$
- $Var[c] = 0$
- Se $p^j = \dfrac{1}{M}$ então $Var[R_i] = \sum_{j=1}^{M} \dfrac{\left(R_i^j - \overline{R}_i\right)^2}{M}$.

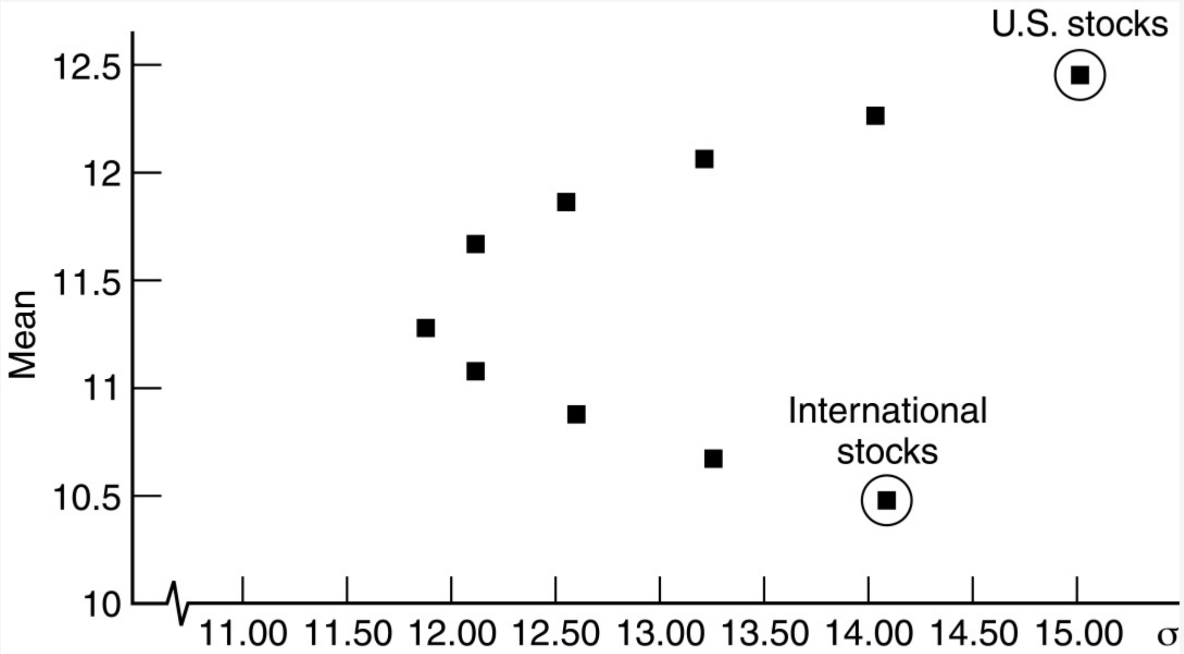
:: *Trade-off* Risco Rentabilidade para diferentes activos financeiros



•**Equity premium** – rentabilidade esperada das acções descontada da taxa de juro sem risco.

–Cuidado… outros factores além risco podem estar na base do *equity premium*.

:: *Trade-off* Risco Rentabilidade para diferentes activos financeiros



Mas, o investidor não tem de concentrar toda a sua riqueza num activo…

	Estados Natureza			
Activos	1	2	3	4
A	100	100	100	100
B	200	0	200	0
C	0	200	0	200
prob	0.25	0.25	0.25	0.25

Activos B e C mais arriscados do que A. Mas, dada a correlação (-1) entre o retorno dos activos (B e C), detendo o activo B e C na mesma proporção temos uma carteira sem risco!

→ **Efeito diversificação**

:: COVARIÂNCIA

$$Cov[R_i, R_k] = E[R_i - \bar{R}_i][R_k - \bar{R}_k]$$

$$= \sum_{j=1}^{M} p^j \left[R_i^j - E[R_i]\right]\left[R_k^j - E[R_k]\right] \quad , \quad \textbf{M estados Natureza}$$

$$= E[R_i R_k] - E[R_i]E[R_k]$$

Propriedades:

$$Cov[R_i, c] = 0$$

Se $p^j = \dfrac{1}{M}$ então $Cov[R_a, R_b] = \sum_{j=1}^{M} \dfrac{\left(R_a^j - \bar{R}_a\right)\left(R_b^j - \bar{R}_b\right)}{M}$.

Uma das limitações da covariância, bem como da variância, é que são sensíveis às unidades em que são expressas (por exemplo, se são expressa em dólares ou em euros). O **coeficiente de correlação linear** capta a mesma ideia da covariância, mas não depende das unidades de medida.

:: COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

$$\varrho_{i,j} = \varrho[R_{it}, R_{jt}] = \frac{Cov[R_{it}, R_{jt}]}{\sigma_i \sigma_j}$$

$$-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$$

1: As duas rendibilidades variam sempre no mesmo sentido e existe uma relação linear exacta entre as suas variações;

0: Não existe correlação linear entre as duas variáveis

-1: As duas rendibilidades variam sempre em sentidos opostos e existe uma relação linear exacta entre as suas variações

RENTABILIDADE E RISCO DE UMA CARTEIRA

:: Rentabilidade de uma Carteira

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R}_i \quad \Longleftrightarrow \quad E[R_P] = \sum_{i=1}^{N} x_i E[R_i]$$

- **R_{pt}:** rentabilidade da carteira (portfolio);
- **N:** número de activos que compõem a carteira;
- **R_{it}:** rentabilidade do activo ***i***;
- **x_i**: fracção (ou proporção) do activo ***i*** na composição da carteira, a verificar $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$

$x_i > 0$: posição **longa** no activo ***i***;

$x_i = 0$: sem qualquer aplicação no activo ***i***;

$x_i < 0$: posição **curta** no activo ***i***;

:: Risco de uma Carteira

$$\sigma_p^2 = Var[R_p] = E[R_p - \overline{R}_p]^2 = \sum_{j=1}^{M} p^j \left[R_p^j - \overline{R}_p \right]^2$$, **M estados Natureza**

Formas alternativas:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

σ_i : desvio padrão da taxa de rentabilidade do activo i;

σ_j : desvio padrão da taxa de rentabilidade do activo j;

σ_{ij} : covariância entre a taxa de rentabilidade do activo i e o activo j;

(nota: quando i=j vem $\sigma_i \sigma_i = \sigma_i^2$)

:: Casos Particulares

1. Todos os activos são independentes (σ_{ij} =0)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2$$

A variância da carteira é igual à variância dos títulos que compõem a carteira.

2. Todos os activos são independentes (σ_{ij} =0) e a proporção investida em cada em é igual ($x_i = 1/N$)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{N}}$$

Média das variâncias dos activos que compõem a carteira

À medida que o N aumenta a variância da carteira diminui, tendendo no limite para zero.

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

:: Casos Particulares

3. A proporção investida em cada em é igual ($x_i = 1/N$)

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sigma_{ij}$$

$$= \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i^2}{N}}_{\text{Média das variâncias}} + \frac{N-1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{N(N-1)}\sigma_{ij}}_{\text{Média das covariâncias}}$$

:: Casos Particulares

3. A proporção investida em cada em é igual ($x_i = 1/N$)

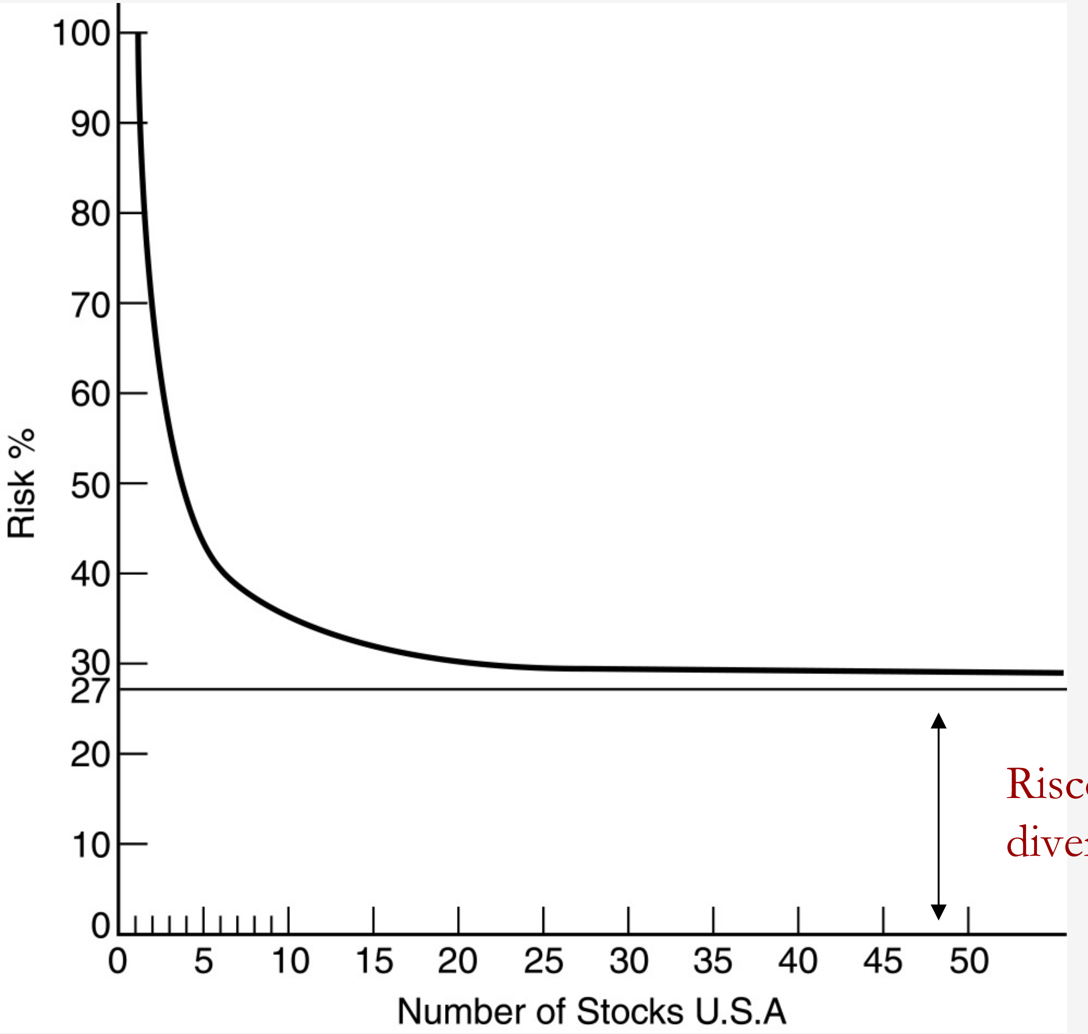
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sigma_{ij}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow N\to\infty \\ 0}}{\frac{1}{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i^2}{N}}_{\text{Média das variâncias}} + \underset{\substack{\downarrow N\to\infty \\ 1}}{\frac{N-1}{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{N(N-1)}\sigma_{ij}}_{\text{Média das covariâncias}}$$

$\sigma_p^2 \xrightarrow[N\to\infty]{}$ Média das covariâncias dos títulos compõem carteira

O risco individual dos títulos pode ser diversificado, mas a contribuição para o risco total do termo das covariâncias não pode ser diversificada!

II. SAFAR | Fronteira Eficiente



Risco não
diversificável

Fronteira Eficiente

Fronteira Markowitz

2 activos

Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto

Activo A: $\overline{R}_A$, σ_A

Activo B: $\overline{R}_B$, σ_B com $\overline{R}_A \geqslant \overline{R}_B$ e $\sigma_A \geq \sigma_B$

Seja P um portfolio constítuido pelos activos A e B.

$$\overline{R}_P = w_A \overline{R}_A + w_B \overline{R}_B$$

$$\sigma_P = (w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{AB})^{0.5}$$

$$= (w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \varrho_{AB})^{0.5}$$

w_A: proporção de riqueza investida no activo A, onde $0 \leq w_A \leq 1$

w_B: proporção de riqueza investida no activo B, onde **$0 \leq w_B \leq 1$** e $w_A + w_B = 1$.

Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto, *ρ*=+1

$$\overline{R}_P = w_A \overline{R}_A + w_B \overline{R}_B$$

$$\sigma_P = w_A \sigma_A + w_B \sigma_B$$

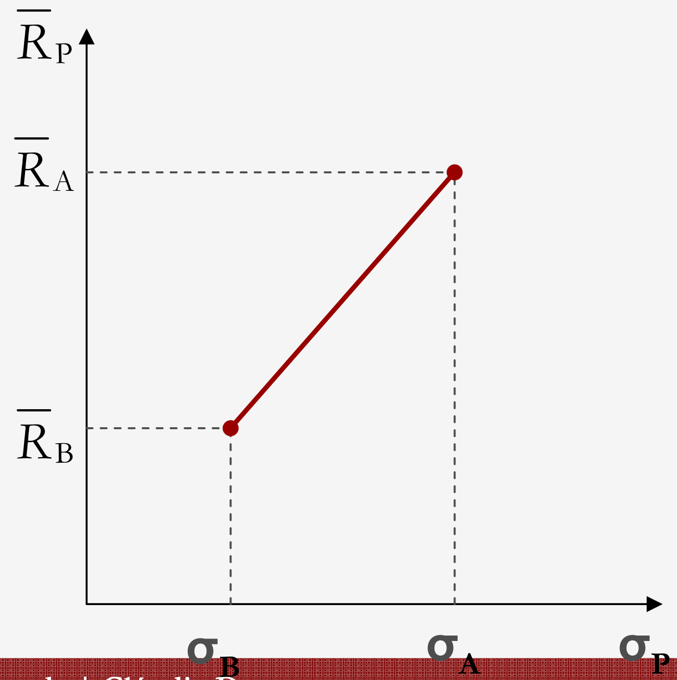
$$\Rightarrow$$

$$\overline{R}_P = -\frac{\sigma_B \overline{R}_A - \sigma_A \overline{R}_B}{\sigma_A - \sigma_B} + \frac{\overline{R}_A - \overline{R}_B}{\sigma_A - \sigma_B}\sigma_P$$

$$\overline{R}_B \leq \overline{R}_P \leq \overline{R}_A \quad \text{e} \quad \sigma_B \leq \sigma_P \leq \sigma_A .$$

:: A rentabilidade do portfolio é uma média ponderada das rentabilidades dos títulos que compõem o portfolio.

:: O desvio padrão do portfolio é uma média ponderada dos desvios padrão dos títulos que compõem o portfolio. – Não existe diversificação!



Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto, ρ= - 1

$$\overline{R}_P = w_A \overline{R}_A + w_B \overline{R}_B$$

$$\sigma_P = abs(w_A \sigma_A - w_B \sigma_B)$$

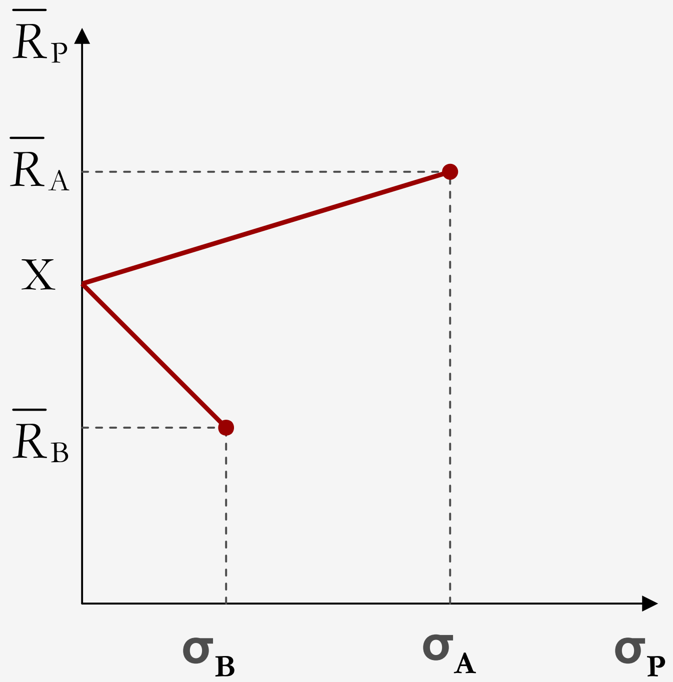
:: A rentabilidade do portfolio é uma média ponderada das rentabilidades dos títulos que compõem o portfolio.

:: O desvio padrão do portfolio NÃO é uma média ponderada dos desvios padrão dos títulos que compõem o portfolio, e…

$$\sigma_P^{\rho=-1} = w_A \sigma_A - w_B \sigma_B < w_A \sigma_A + w_B \sigma_B = \sigma_P^{\rho=1}$$

EFEITO DIVERSIFICAÇÃO!

Fronteira Eficiente – Dois activos, sem vendas a descoberto, $\rho = -1$



É possível combinar os activos numa carteira sem risco (X)!

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto, ρ= - 1

Considerando $w_A = 1 - w_B, 0 \leq w_A \leq 1$ e $0 \leq w_B \leq 1$ obtém - se

$$\overline{R}_P = \begin{cases} \dfrac{\sigma_B \overline{R}_A + \sigma_A \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B} + \dfrac{\overline{R}_A - \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_P, & R_P \geq \dfrac{\sigma_B \overline{R}_A + \sigma_A \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B} \\ \dfrac{\sigma_B \overline{R}_A + \sigma_A \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B} - \dfrac{\overline{R}_A - \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_P, & R_P \leq \dfrac{\sigma_B \overline{R}_A + \sigma_A \overline{R}_B}{\sigma_A + \sigma_B} \end{cases}.$$

Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto, ρ= 0

$$\overline{R}_P = w_A \overline{R}_A + w_B \overline{R}_B$$

$$\sigma_P = (w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2)^{0.5}$$

Hipérbole no espaço ($\overline{R}_P$,σ_P)

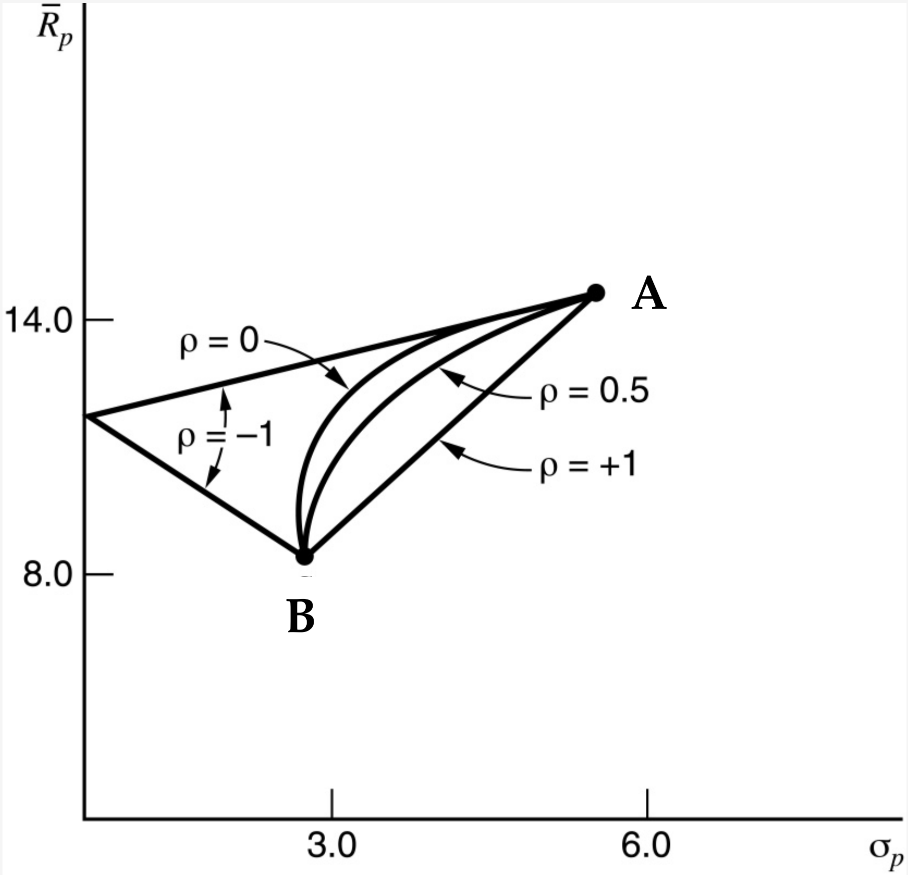
:: A rentabilidade do portfolio é uma média ponderada das rentabilidades dos títulos que compõem o portfolio.

:: O desvio padrão do portfolio NÃO é uma média ponderada dos desvios padrão dos títulos que compõem o portfolio.

$$\sigma_P^{\varrho=-1} < (w_A^2 \sigma_A^2 - w_B^2 \sigma_B^2)^2 < \sigma_P^{\varrho=1}$$

EFEITO DIVERSIFICAÇÃO!

Curvas de oportunidades de investimento / curavas de combinação



Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Combinação de dois activos, sem vendas a descoberto, $0 < \rho < 1$

$$\overline{R}_P = w_A \overline{R}_A + w_B \overline{R}_B$$

$$\sigma_P = (w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB})^{0.5}$$

Hipérbole no espaço ($\overline{R}_P, \sigma_P$)

Carteira de Variância Mínima (w^{MV})

Substituindo $w_B = 1 - w_A$, temos

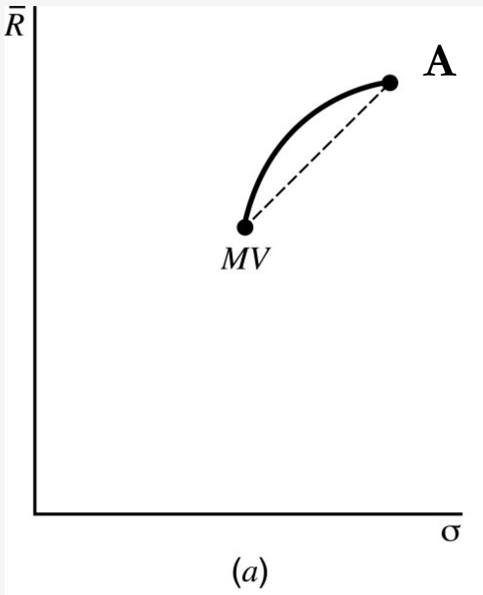
$$\sigma_P = [w_A^2 \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \sigma_B^2 + 2 w_A (1 - w_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}]^{0.5}$$

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial \rho_{AB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_A^{MV} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

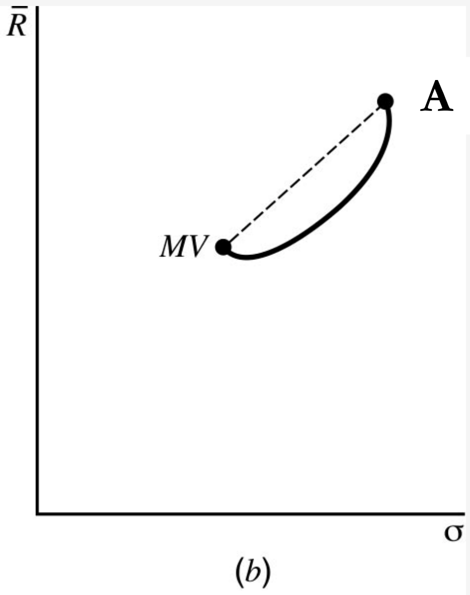
Várias combinações Risco/Rentabilidade

A: Carteira A

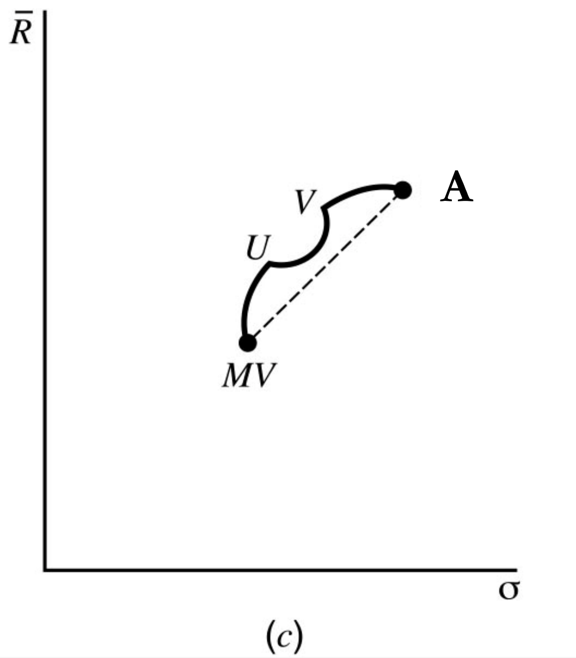
MV: Carteira Variância Mínima



Possível



Impossível



Impossível

Fronteira Eficiente

Fronteira Markowitz

3 activos

II. SAFAR | Exemplo 3 activos

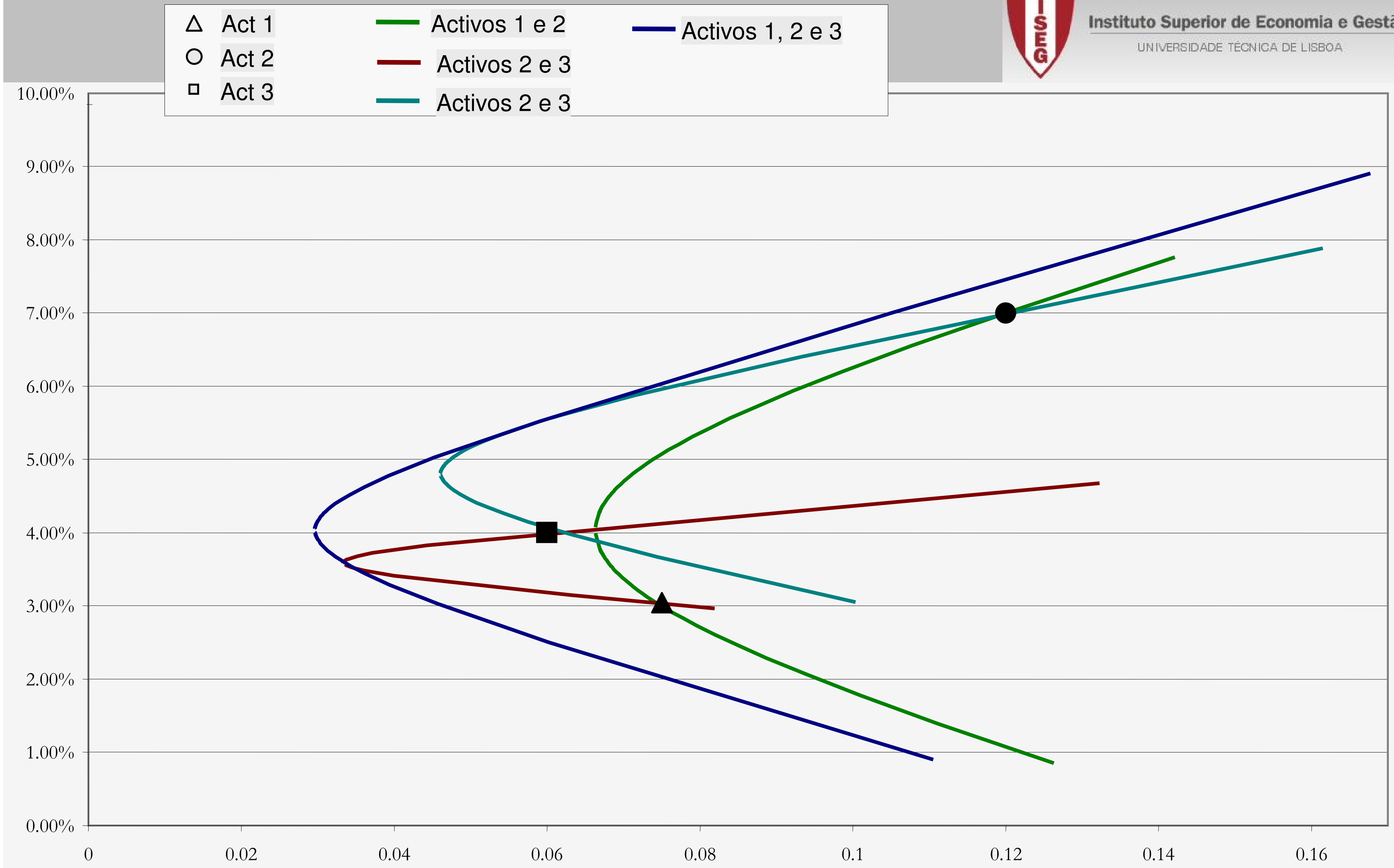
Activos	E[R]	σ
1	3%	0.075
2	7%	0.12
3	4%	0.06

Matriz Coeficientes de Correlação

1	0.1	-0.5
0.1	1	-0.3
-0.5	-0.3	1

Matriz Variância-Covariância

0.005625	0.0009	-0.00225
0.0009	0.0144	-0.00216
-0.00225	-0.00216	0.0036


Act 1
Act 2
Act 3
Activos 1 e 2
Activos 2 e 3
Activos 2 e 3
Activos 1, 2 e 3
10.00%
9.00%
8.00%
7.00%
6.00%
5.00%
4.00%
3.00%
2.00%
1.00%
0.00%
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16

Fronteira Eficiente

Fronteira Markowitz

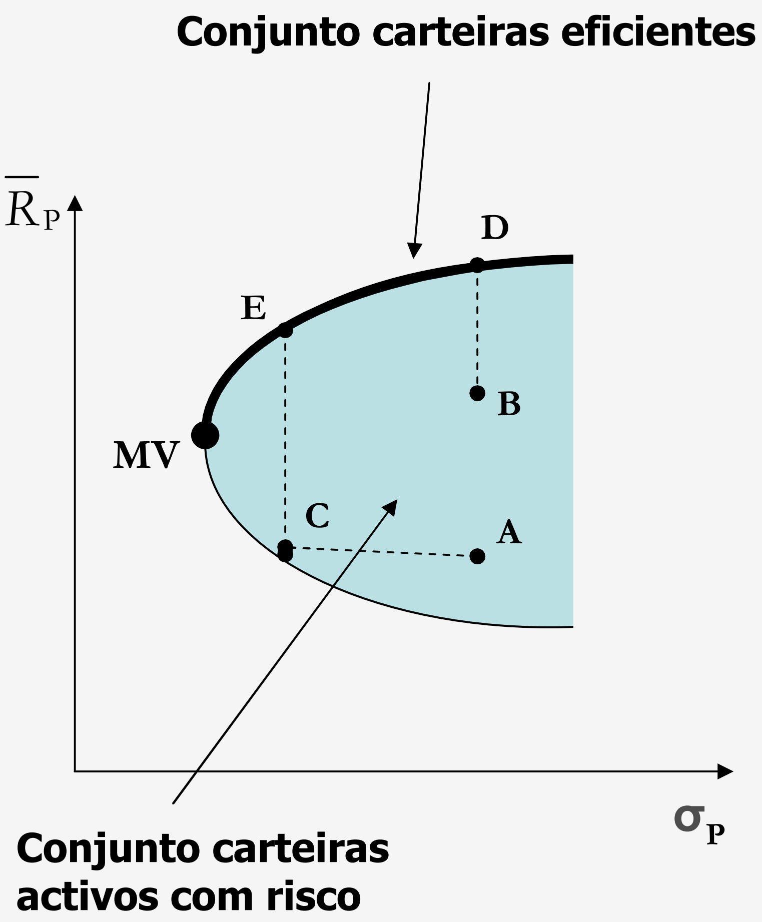
N activos

FRONTEIRA EFICIENTE

Hipóteses:

- ✓ Existem N activos;
- ✓ As carteiras possíveis na economia podem ser constítuidas por um activo, dois activos ou até N activos.

FRONTEIRA EFICIENTE



Os investidores têm preferência por rentabilidade mais elevada e risco mais reduzido

Os investidores detêm apenas os portfolios que:

- oferecem a maior rentabilidade para um dado nível de risco, ou
- oferecem o menor risco para uma determinada rentabilidade.

Os restantes portfolios não irão ser considerados nas decisões de investimento:

NÃO SÃO EFICIENTES!!

- Existem k=1,…, N activos com rentabilidades esperadas

$$\mu_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

e matriz variância-covariância

$$\sum_{N\times N} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1N} \\ & & \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

- O vector de ponderadores

$$\omega_{N\times 1} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ . \\ . \\ . \\ \omega_N \end{bmatrix}$$

e um vector de 1's

$$1_{N\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Queremos resolver o seguinte problema:

$$\min_{\omega_k} \omega' \Sigma \omega \quad = \sigma_p^2$$

$$\text{s.t. } \omega' \mu = \mu_p \text{ and } \omega' 1 = 1$$

- O lagrangeano:

$$L = \omega' \Sigma \omega + 2\lambda \left(\mu_p - \omega' \mu\right) + 2\delta\left(1 - \omega' 1\right)$$

- Condições de primeira ordem: $\dfrac{\partial L}{\partial \omega} = 0$

- A solução do problema:

$$\omega = \Sigma^{-1} \frac{\mu(C\mu_P - B) + 1(A - B\mu_P)}{AC - B^2}$$

onde

$$A = \mu' \Sigma^{-1} \mu$$
$$B = \mu' \Sigma^{-1} 1$$
$$C = 1' \Sigma^{-1} 1$$

Carteira de variância mínima (MVP)

- The Markowitz frontier can be written as

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{C} + (\mu_P - B/C)^2 \frac{C}{D} \qquad D = AC - B^2$$

The MVP conditions:

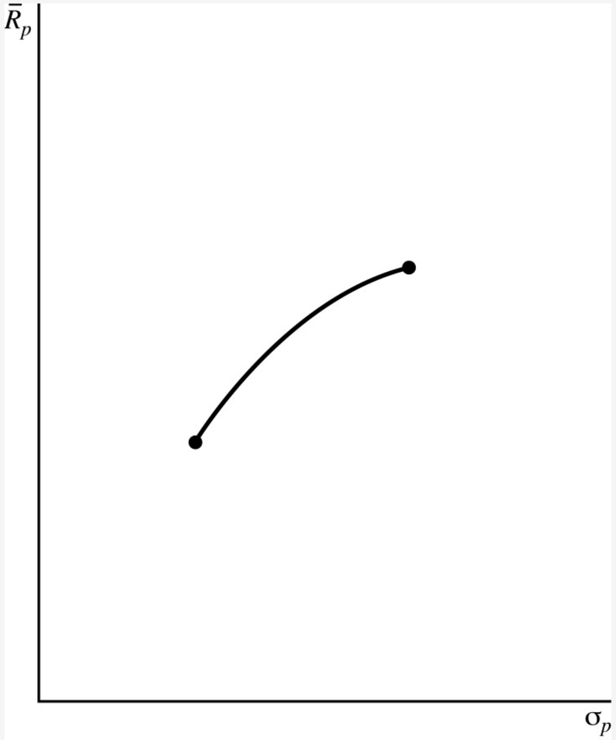
$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \mu_p} = 2(\mu_p - B/C)\frac{C}{D} = 0$$

The MVP

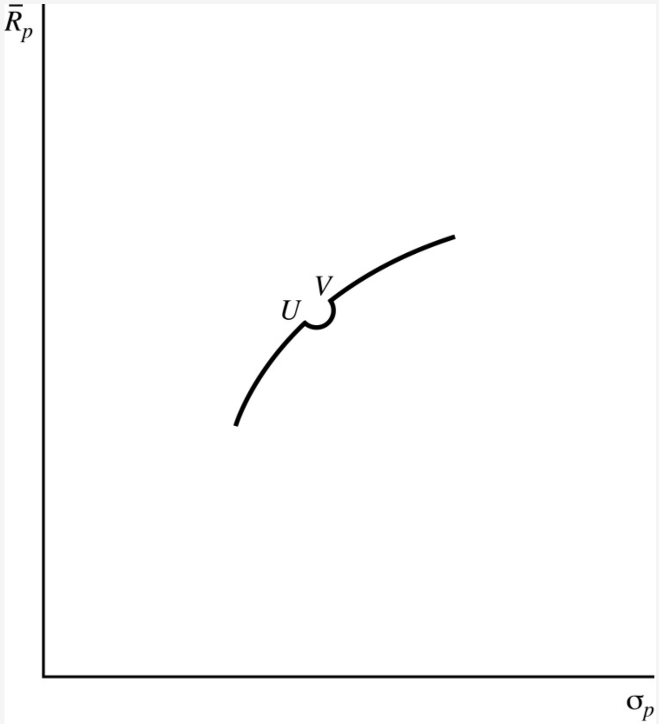
$$\mu_{MVP} = \frac{B}{C}$$

$$\sigma_{MVP} = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

FRONTEIRA EFICIENTE

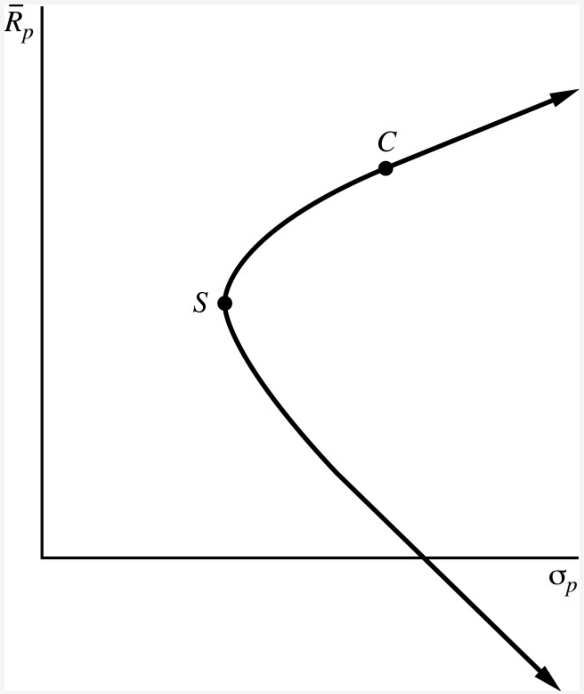


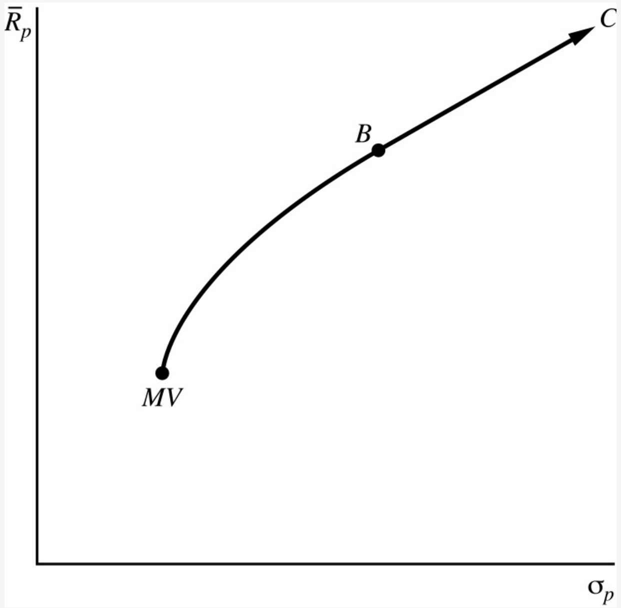
Possível



Impossível

EFICIÊNCIA com *SHORT-SELLING*





Diferentes combinações Rentabilidade/Risco

Conjunto Eficiente

Fronteira Eficiente

N activos

1 activo sem risco

FRONTEIRA EFICIENTE com um ACTIVO SEM RISCO

Seja **F** um activo sem risco, de rentabilidade $\mathbf{R_F}$ (e desvio padrão zero!)

Seja **P** um portfolio constituído pelo activo F e por um activo com risco com rentabilidade esperada $\mathbf{\overline{R}_A}$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{A}$.

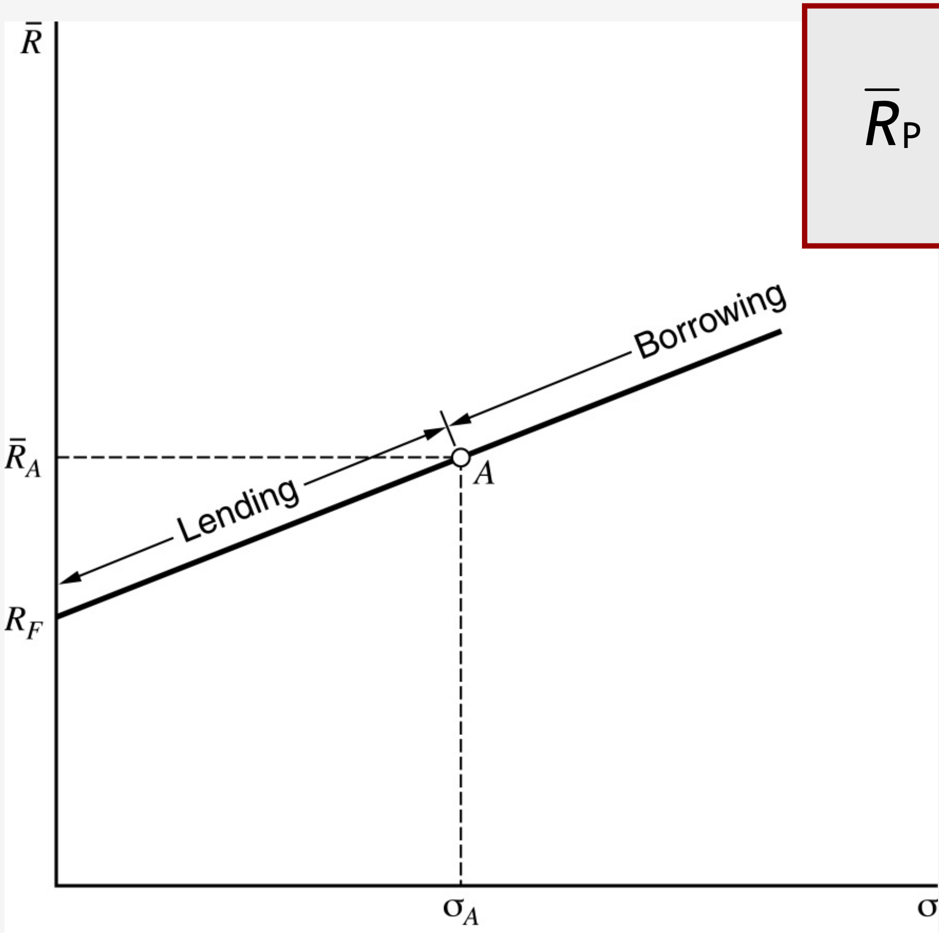
A rentabilidades esperada e variância da carteira são:

$$\begin{cases} \overline{R}_P = w_A \overline{R}_P + w_F R_F \\ \sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_F^2 \sigma_F^2 + 2 w_A w_F \sigma_A \sigma_F \varrho_{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{R}_P = w_A \overline{R}_P + w_F R_F \\ \sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 \end{cases}$$

Diferentes combinações risco rentabilidade

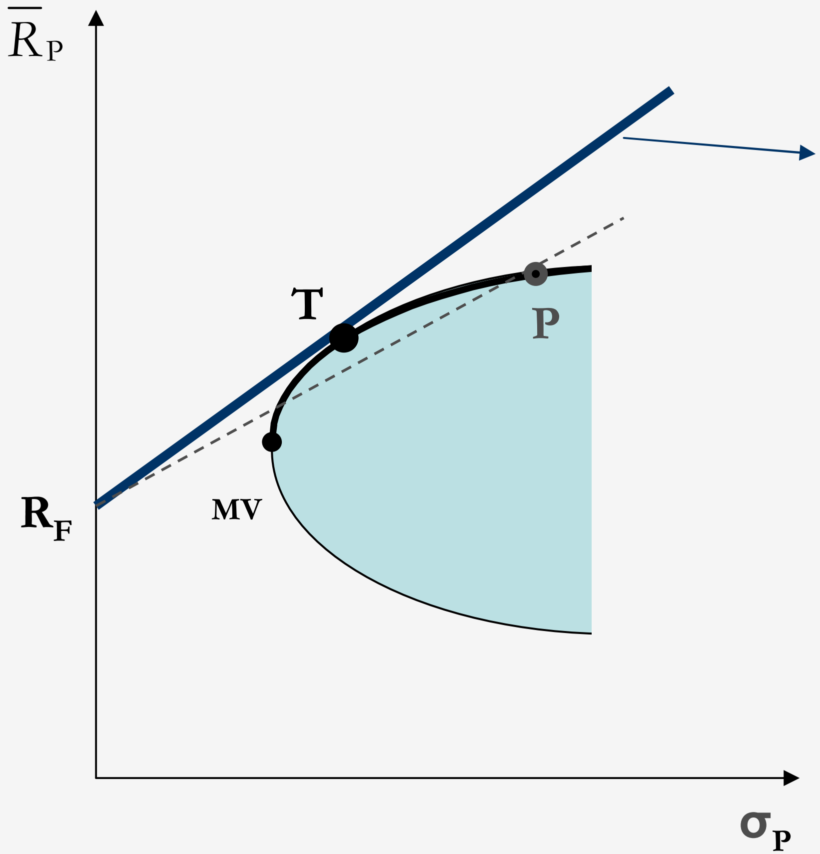
$$\boxed{\overline{R}_P = R_F + \frac{\overline{R}_A - R_F}{\sigma_A} \sigma_P}$$

O conjunto de oportunidades de investimento é linear, quando existe activo sem risco – não interessa a correlação



$$\bar{R}_P = R_F + \frac{\bar{R}_A - R_F}{\sigma_A}\sigma_P$$

FRONTEIRA EFICIENTE com um ACTIVO SEM RISCO



Declive é Índice de Sharpe: $\dfrac{\overline{R}_T - R_f}{\sigma_T}$

DERIVAÇÃO PONTO TANGÊNCIA T

Aquando da derivação da fronteira eficiente sem restrições a *short-selling* e a investir e pedir dinheiro emprestado à taxa de juro sem risco o investidor resolve o seguinte problema:

$$\max_{w} \Theta = \frac{\overline{R}_P - R_f}{\sigma_P}$$

$$\text{s.a.} \quad \overline{R}_P = \sum_{k=1}^{N} w_k \overline{R}_k$$

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^{N} w_k^2 \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} w_k w_j \sigma_{kj}$$

Condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial w_k} = 0 \qquad \text{para } \boldsymbol{k=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N}.$$

As condições de primeira ordem podem ser reescritas como:

$$\left(\overline{R}_P - R_f\right)\left(w_1\sigma_{1k} + w_2\sigma_{2k} + \ldots + w_N\sigma_{Nk}\right) = \left(\overline{R}_k - R_f\right)\sigma_P^2 \qquad \text{para } \boldsymbol{k=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N}.$$

Definindo

$$\lambda = \frac{\overline{R}_P - R_f}{\sigma_P^2} \qquad \text{e} \qquad Z_k = \lambda w_k$$

As condições de primeira ordem podem ser reescritas como:

$$Z_1\sigma_{1k} + Z_2\sigma_{2k} + \ldots + Z_N\sigma_{Nk} = \overline{R}_k - R_f$$

para ***k=1, 2, … , N***.

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{R}_1 - R_f \\ \overline{R}_2 - R_f \\ \vdots \\ \overline{R}_N - R_f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{R}_1 - R_f \\ \overline{R}_2 - R_f \\ \vdots \\ \overline{R}_N - R_f \end{pmatrix}$$

Como

$$w_k = \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^{N} Z_k} \qquad \text{para } \boldsymbol{k=1, 2, \ldots, N}.$$

podemos caracterizar a rentabilidade esperada e o desvio-padrão da rentabilidade do mercado.

A fronteira eficiente é dada por:

$$\overline{R}_P = R_F + \frac{\overline{R}_A - R_F}{\sigma_1}\sigma_P$$

FRONTEIRA EFICIENTE com um ACTIVO SEM RISCO e sem RESTRIÇÕES DE *SHORT-SELLING*

Aplicação:

Activos	E[R]	σ
A	14%	6%
B	8%	3%
C	20%	15%
R_f	5%	0%

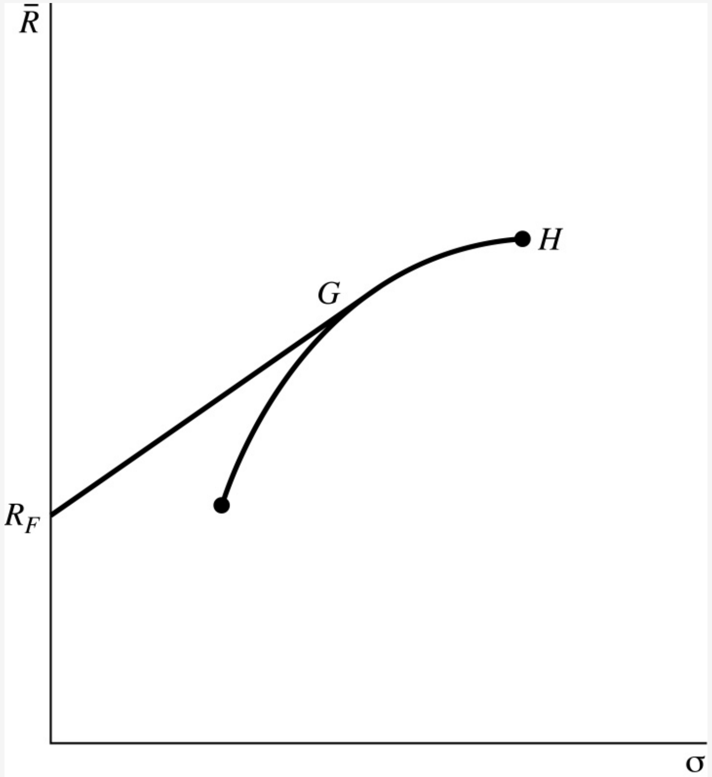
Coeficientes de correlação

	A	B	C
A		0.5	0.2
B			0.4
C			

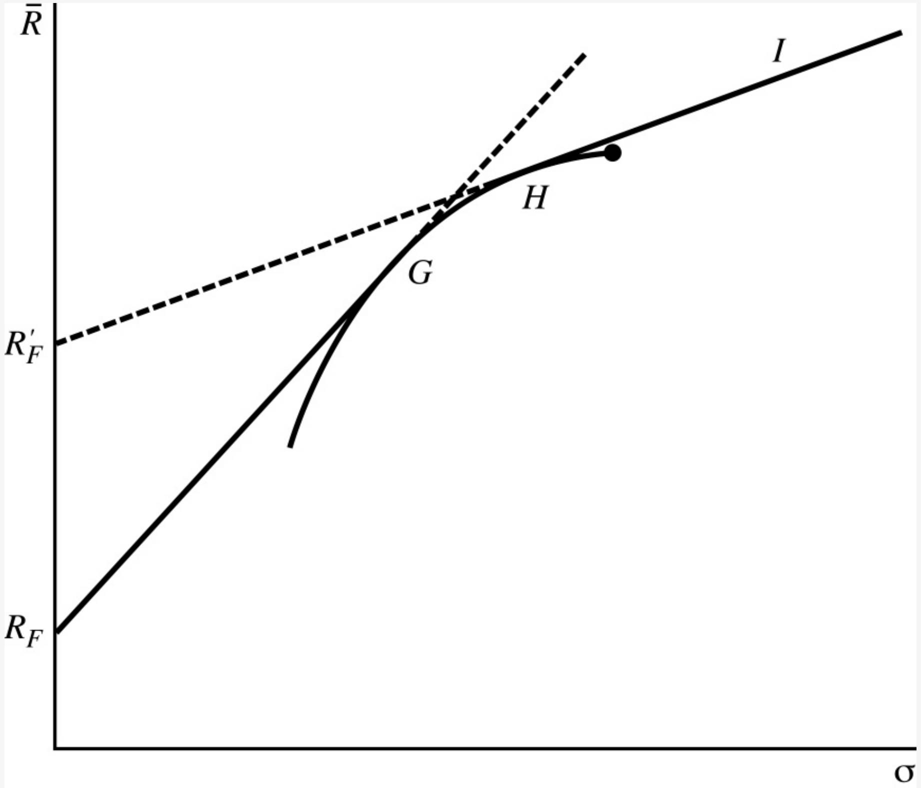
Portfolio P? $w_1 = \frac{14}{18},\quad w_2 = \frac{1}{18}\ \text{and}\ w_3 = \frac{3}{18} \quad \mapsto \quad \overline{R}_P = 14,7\% \quad \text{e} \quad \sigma_P^2 = 33.8$

Fronteira Eficiente? $\overline{R}_P = 5 + \frac{14.7 - 5}{\sqrt{33}}\sigma_P \quad \Leftrightarrow \quad \overline{R}_P = 5 + 1.66\sigma_P$

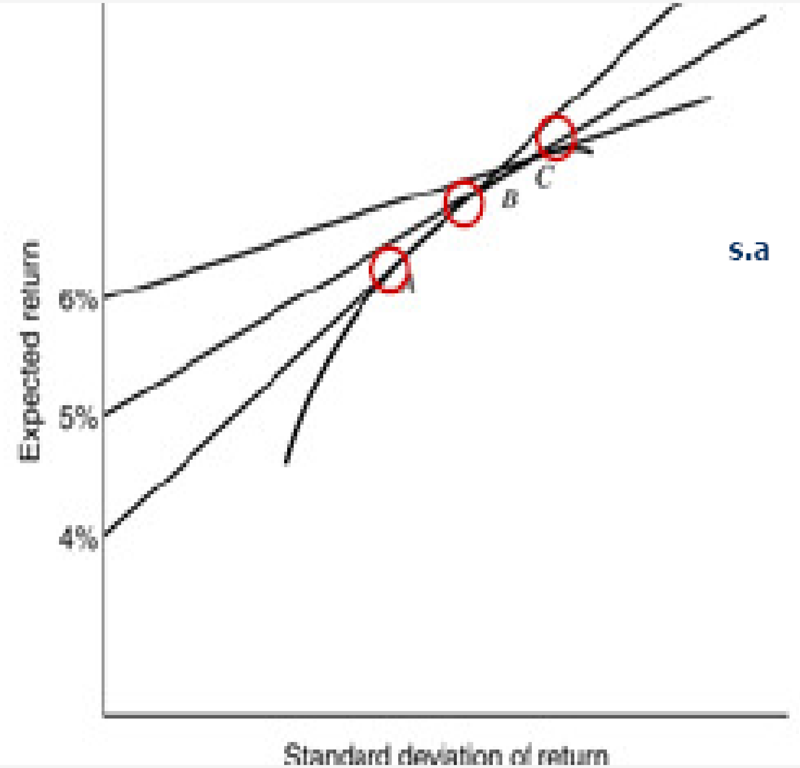
FRONTEIRA EFICIENTE com um ACTIVO SEM RISCO mas SEM A POSSIBILIDADE DE PEDIR EMPRESTADO



FRONTEIRA EFICIENTE com um ACTIVO SEM RISCO mas com TAXAS DIFERENTES PARA DIFERENTES POSIÇÕES NO ACTIVO SEM RISCO



FRONTEIRA EFICIENTE sem ACTIVO SEM RISCO mas com POSSIBILIDADE DE PEDIR EMPRESTADO



Activo sem risco fictício: para cada valor temos uma carteira eficiente

$$\theta = \frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p}$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

A análise média-variância…

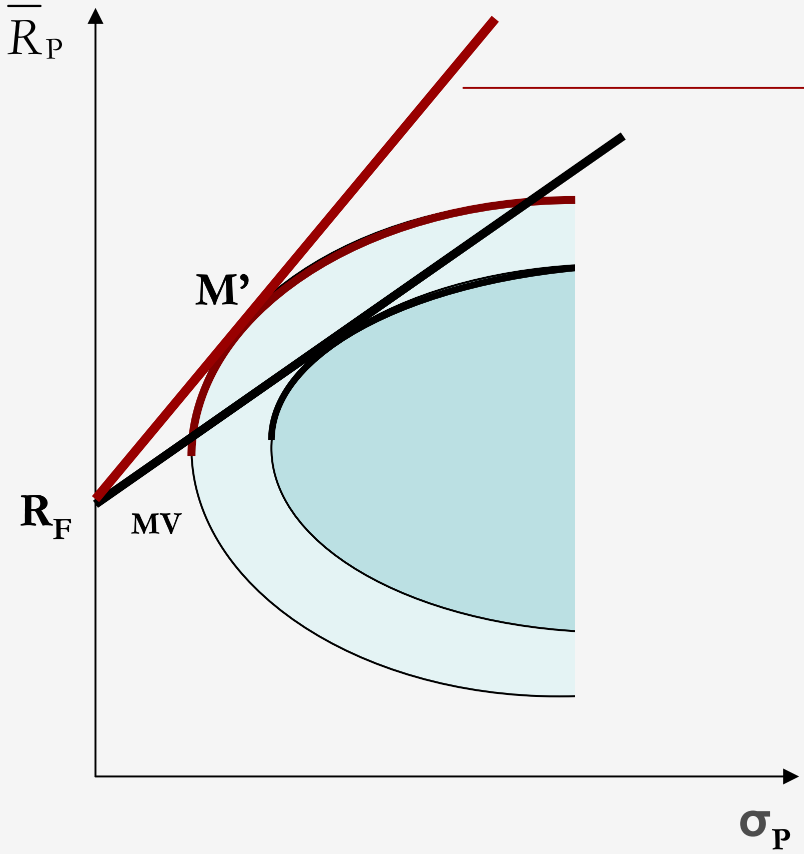
- foi desenvolvida por Harry Markowitz no início da década de 60 (Prémio Nobel economia 1990)
- constitui o pilar da *modern finance*
- é utilizada por fundos de pensões, investidores individuais, bancos, companhias de seguros…
- Existe todo um conjunto de consultores (por exemplo, Wilshire Associates) e empresas de software (e.g. BARRA, Quantal) que implementam esta metodologia.

Barra® is the market leader in delivering innovative, financial risk management solutions worldwide. Since 1975, our products and services have combined advanced technology, superior analytics , research, models and proprietary data to empower investment professionals to make strategic investment decisions.

http://www.barra.com/products/pdfs/CosmosOptimizerDatasheet.pdf

Diversificação internacional

EXPANSÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE!



Nova fronteira eficiente com activo sem risco

M': Nova Carteira de Mercado

Cuidado taxa câmbio!

t	Custo de 1 USD	Valor acções xyz transaccionadas NYSE	Valor em €
0	0.90 €	100 usd	90 €
1	0.81 €	103 usd	83.43 €

Rendibilidade:

$$R_{US} = \frac{103 - 100}{100} = 0.03 \text{ ou } 3\%$$

$$R_P = \frac{83.43 - 90}{90} = -0.073 \text{ ou } -7.3\%$$

Seja $\mathbf{R_E}$ a variação percentual da taxa de cambio. No nosso exemplo

$\mathbf{R_E=(0.9-0.81)/0.9=0.1}$

$$1 + R_P = (1 + R_{US})(1 + R_E)$$

$$1 - 0.073 = (1 + 0.03)(1 - 0.1)$$

$$1 + R_P = (1 + R_{US})(1 + R_E) \Leftrightarrow R_P = R_{US} + R_E + R_{US}R_E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_P \approx R_{US} + R_E}$$

Usando esta aproximação temos que a rentabilidade esperada e o desvio padrão são dados por:

$$\overline{R}_P = \overline{R}_{US} + \overline{R}_E$$

$$\sigma_P = \left(\sigma_{\mathrm{US}}^2 + \sigma_{\mathrm{E}}^2 + 2\sigma_{\mathrm{US,e}}\right)^{0.5}$$

W O R L D E Q U I T Y M A R K E T S

Area or Country	Percent of Total[a]
Austria	0.1%
Belgium	0.4%
Denmark	0.4%
Finland	1.6%
France	5.5%
Germany	4.3%
Ireland	0.2%
Italy	2.1%
Netherlands	2.5%
Norway	0.2%
Portugal	0.2%
Spain	1.3%
Sweden	1.6%
Switzerland	2.8%
U.K.	9.7%
Europe	**32.8%**
Australia	1.1%
Hong Kong	1.0%
Japan	12.6%
Malaysia	0.5%
New Zealand	0.1%
Singapore	0.4%
Pacific	**15.5%**
Canada	2.1%
United States	49.5%
North America	**51.6%**
Total	**100.0%**

Source: From *Morgan Stanley Capital International Perspectives,* June 2000.

[a]Since the Morgan Stanley index does not include all shares traded in a market the proportions are approximate.

MAJOR BONDS MARKETS

Area or Country	Percent of Total
United States	47.0%
Euroland	22.9%
Japan	18.3%
United Kingdom	3.0%
Canada	1.7%
Switzerland	0.9%
Denmark	0.8%
Australia	0.6%
Sweden	0.6%
Norway	0.2%
New Zealand	0.1%
Asia	2.3%
Latin America	0.8%
Eastern Europe/Middle East/Africa	0.7%
Total	**100.0%**

Source: From Salomon Brothers.

O RISCO DOS TÍTULOS ESTRANGEIROS

	Australia	Austria	Belgium	Canada	France	Germany	Hong Kong	Italy	Japan	Netherlands	Spain	Sweden	Switzerland	United Kingdom	United States
Australia															
Austria	0.279														
Belgium	0.304	0.459													
Canada	0.608	0.316	0.299												
France	0.400	0.505	0.677	0.465											
Germany	0.393	0.671	0.612	0.454	0.749										
Hong Kong	0.501	0.350	0.225	0.572	0.387	0.395									
Italy	0.248	0.358	0.396	0.361	0.487	0.495	0.231								
Japan	0.430	0.245	0.317	0.355	0.415	0.307	0.289	0.330							
Netherlands	0.480	0.578	0.738	0.514	0.758	0.740	0.424	0.429	0.432						
Spain	0.460	0.422	0.523	0.455	0.681	0.606	0.415	0.575	0.482	0.599					
Sweden	0.490	0.364	0.348	0.486	0.600	0.639	0.393	0.480	0.461	0.577	0.693				
Switzerland	0.363	0.530	0.610	0.410	0.598	0.537	0.327	0.304	0.465	0.697	0.567	0.494			
United Kingdom	0.543	0.519	0.577	0.460	0.642	0.594	0.437	0.313	0.474	0.722	0.602	0.523	0.494		
United States	0.505	0.281	0.504	0.709	0.534	0.489	0.491	0.301	0.348	0.592	0.530	0.466	0.523	0.646	
Average Correlation Coefficient				0.475											

Coeficiente de Correlação entre índices de acções internacionais medidos em *usd*.

O RISCO PARA UM INVESTIDOR NOS EUA

Stocks	Domestic Risk	Exchange Risk	Total Risk
Australia	13.94	8.66	17.92
Austria	24.80	10.59	24.50
Belgium	16.15	10.21	15.86
Canada	15.02	4.40	17.13
France	18.87	10.61	17.76
Germany	20.41	10.55	20.13
Hong Kong	29.75	0.43	29.79
Italy	24.55	11.13	25.29
Japan	22.04	12.46	25.70
Netherlands	16.04	10.59	15.50
Spain	22.99	11.18	23.27
Sweden	24.87	11.18	24.21
Switzerland	17.99	11.61	17.65
U.K.	14.45	10.10	15.59
United States	13.59	0.00	13.59
Equally Weighted Index (Non-U.S.)	21.57	10.03	23.43
Value-Weighted Index (Non-U.S.)			16.70

Utilidade como Critério de Escolha

:: *Utilidade* **num Contexto de Incerteza**

$$U(w) = E[v(w)] = \sum_{i=1}^{M} p_i u(w_i)$$

$u(w)$ funcao utilidade;

M estados da natureza,

com probabilidade ocorrencia p_i cada;

w_i riqueza no estado da natureza i.

:: Exemplo

Dois Investimentos

Investment *A*		Investment *B*	
Outcome	Probability of Outcome	Outcome	Probability of Outcome
15	1/3	20	1/3
10	1/3	12	1/3
5	1/3	4	1/3

Dois Agentes

$$\text{Agente 1}: \qquad u(w) = e^{-0.1w}$$

$$\text{Agente 2}: \qquad v(w) = \ln(w)$$

Agente 1

$$U^A = E[u(w)] = \frac{1}{3}\ln(15) + \frac{1}{3}\ln(10) + \frac{1}{3}\ln(5) \approx 2.21$$

$$U^B = E[u(w)] = \frac{1}{3}\ln(20) + \frac{1}{3}\ln(12) + \frac{1}{3}\ln(4) \approx 2.29$$

O agente 1 prefere o investimento B.

Agente 2

$$V^A = E[v(w)] = \frac{1}{3}e^{-0.1*15} + \frac{1}{3}e^{-0.1*10} + \frac{1}{3}e^{-0.1*5} \approx 0.40$$

$$V^B = E[v(w)] = \frac{1}{3}e^{-0.1*20} + \frac{1}{3}e^{-0.1*12} + \frac{1}{3}e^{-0.1*4} \approx 0.37$$

O agente 2 prefere o investimento A.

Propriedades Económicas das Funções Utilidade:

1. **Monotonicidade**: As funções utilidade são consistentes com o facto dos agentes económicos ficarem melhor quando o seu nível riqueza aumenta, isto é,

$$\frac{\partial u(w)}{\partial w} > 0$$

2. **Atitude perante o Risco**: Esta propriedade caracteriza o comportamento dos agentes face ao risco. Podem ser catalogados como: Avessos, Neutros ou Amantes do Risco

Jogo Justo [*fair game*]: O valor esperado do jogo é igual ao seu custo

Condição	Definição	Implicação	
Agente Avesso face ao Risco	Rejeita jogo justo	$u''(w) < 0$	Côncava
Agente Neutro face ao Risco	Indiferente a um jogo justo	$u''(w) = 0$	Linear
Agente Amante do Risco	Aceita jogo justo	$u''(w) > 0$	Convexa

Propriedades Económicas das Funções Utilidade:

3. **Alteração das preferências do agente face a alterações do seu nível de riqueza:** Esta propriedade reflecte as alterações no montante investido nos activos com risco face a alterações no seu nível de riqueza.

   Para fazer esta caracterização considere-se:

COEFICIENTE DE AVERSÃO ABSOLUTA AO RISCO

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Propriedades Económicas das Funções Utilidade:

4. **Alteração das preferências do agente face a alterações do seu nível de riqueza:** Esta propriedade reflecte a alteração na percentagem de riqueza investida em activos com risco face a alterações do nível de riqueza.

   Para fazer esta caracterização considere-se:

COEFICIENTE DE AVERSÃO RELATIVA AO RISCO

$$R(w) = -w \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Utilidade Esperada versus Critério Média Variância

A utilidade esperada pode ser definida em termos da média e variância dos retornos quando:

- A utilidade é quadrática; $u(w) = w - bw^2$
- Os retornos estão distribuídos de acordo com uma distribuição Normal
- Como aproximação de 2ª ordem (Taylor) da "verdadeira" utilidade

Nessas situações a utilidade esperada pode ser expressa como uma função que depende do valor esperado e da variância dos retornos:

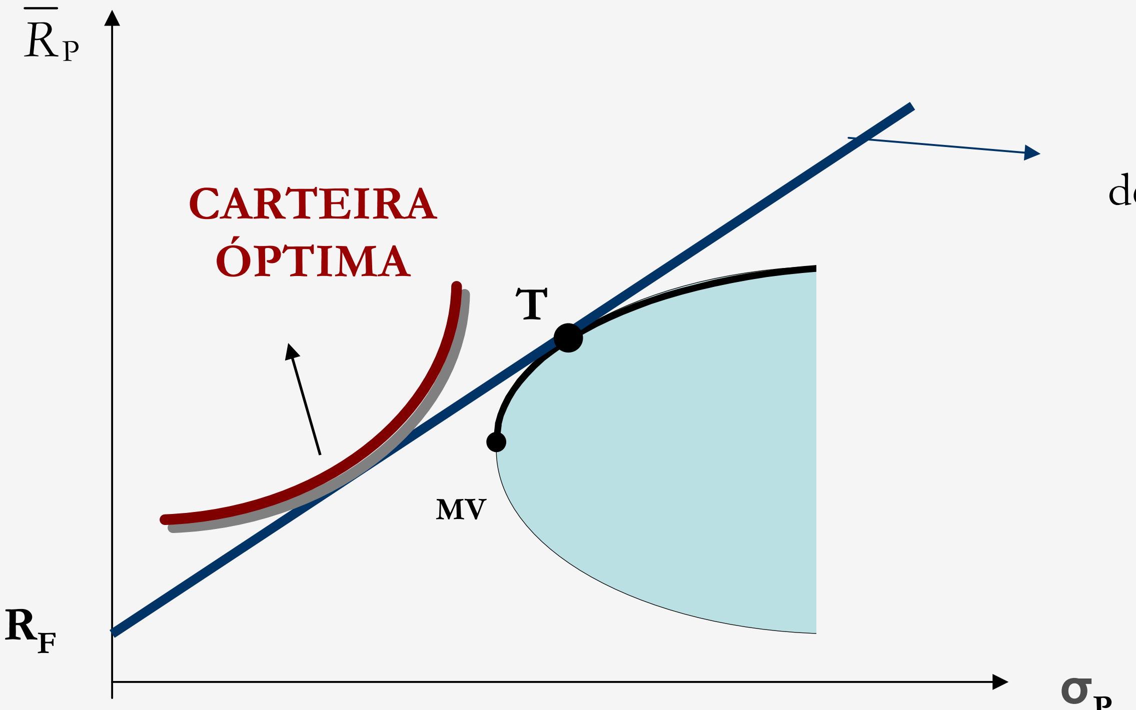
$$E[u(w)] = \sum_{i=1}^{M} p_i u(w_i)$$

$$= f[E(w), \sigma_w], \qquad \text{com} \quad \frac{\partial f}{\partial E(w)} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_w} < 0.$$

Função utilidade (média-variância):

$$U(R_p) = E(R_p) - \gamma Var(R_p)/2,$$

onde γ é o coeficiente de aversão ao risco: e.g. γ=4



declive: $\dfrac{\overline{R}_T - R_f}{\sigma_T}$

- Para determinar a carteira óptima

  $\max_w U(R_P) = (x_T\, E(R_T) + (1- x_T)\, R_f) - \gamma\ x_T^2\, \sigma_T^2/2$

  x_T = peso do activo T na carteira óptima

- Utilizando as condições de primeira ordem (derivar em ordem a x_T e igualar a zero), obtém-se a composição da carteira óptima

$$x_P = \frac{E[R_T] - r_f}{\gamma \sigma_T^{\ 2}}$$

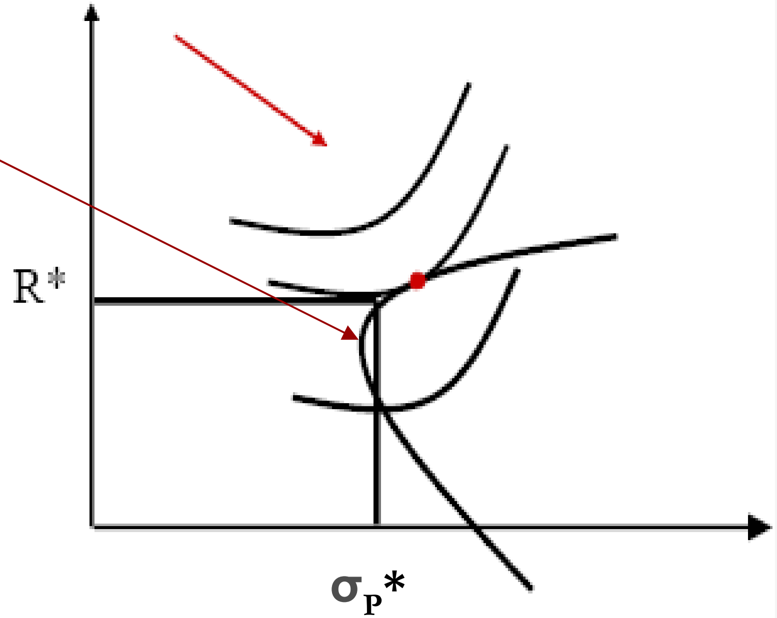
Resumindo…

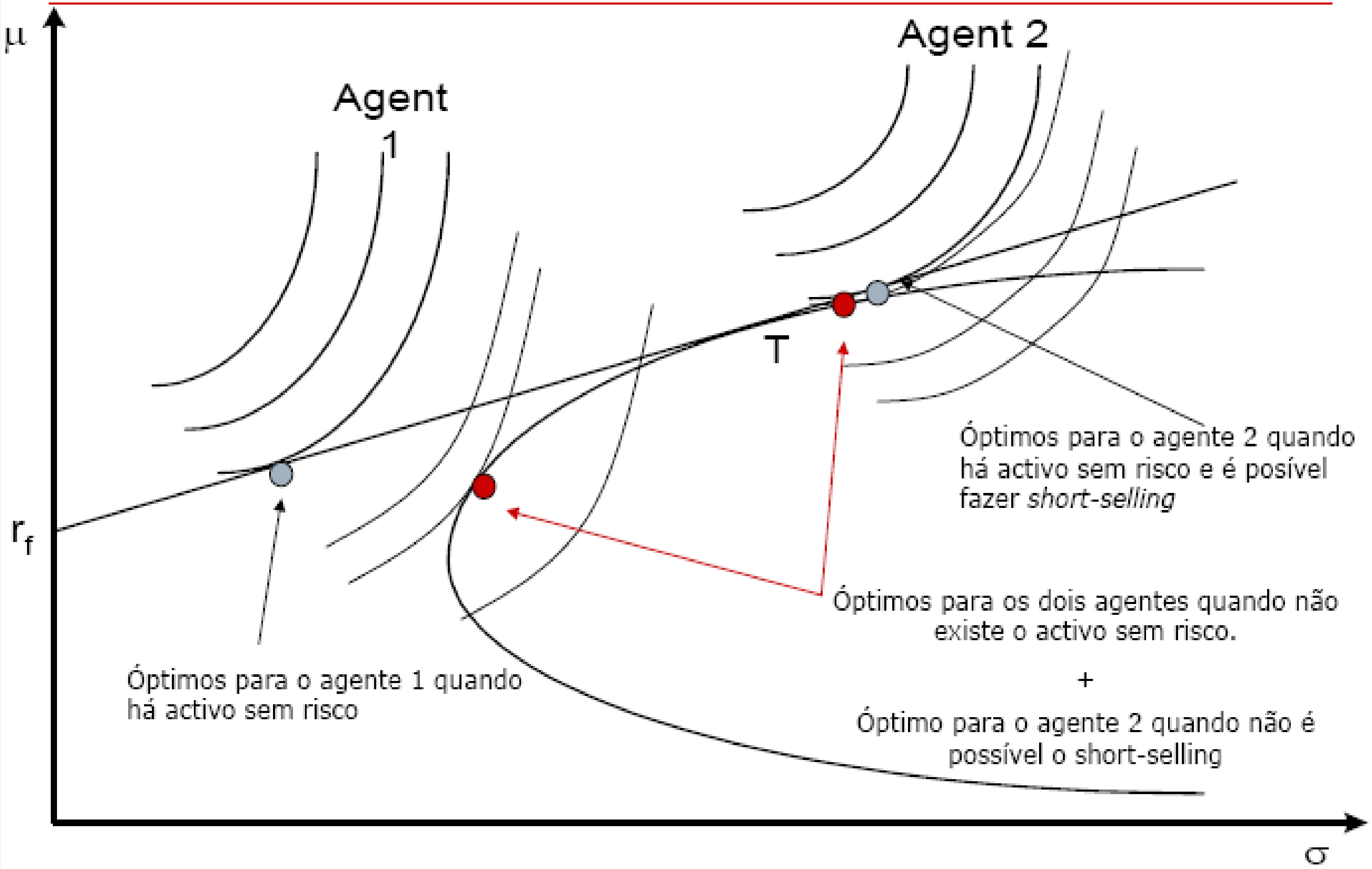
Carteira Óptima: é a carteira que dadas as condições do mercado e as preferências do agente maximiza o seu nível de satisfação (maximiza a sua utilidade).

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial R_p}(fronteira\_eficiente) = \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial R_p}(curva\_de\_indiferença)$$

Como já foi demonstrado a teoria da carteira permite reduzir a escolha a um conjunto de carteiras que são designadas de eficientes, carteiras que dominam as restantes.

Portanto, é possível escolher a carteira adequada sem ser necessário ter em atenção todo o conjunto de oportunidades de investimento mas e apenas a fronteira eficiente.




μ
Agent 2
Agent 1
T
r_f
σ
Óptimos para o agente 2 quando há activo sem risco e é posível fazer *short-selling*
Óptimos para os dois agentes quando não existe o activo sem risco.
+
Óptimo para o agente 2 quando não é possível o short-selling
Óptimos para o agente 1 quando há activo sem risco

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Outros Critérios de Escolha

:: Maximizar a Média Geométrica da Rendibilidade

Definição:

Seja R_{ij} a rendibilidade do activo j no estado da natureza i. Existem M estados da natureza sendo a probabilidade de ocorrência de cada um p_i.
A média geométrica da rendibilidade vem dada por:

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{Gj}} = \left(1+R_{1j}\right)^{p_1}\left(1+R_{2j}\right)^{p_2}\cdots\left(1+R_{Mj}\right)^{p_M} - 1$$

$$= \prod_{i=1}^{M}\left(1+R_{ij}\right)^{p_i} - 1$$

Maximizar o valor esperado da riqueza final não equivale a maximizar o valor esperado da utilidade, a menos que seja considerada uma função utilidade logarítmica.

:: Maximizar a Média Geométrica da Rendibilidade

Equivalência entre Maximizar a Média Geométrica da Rendibilidade e a Utilidade Esperada

Maximizar a utilidade esperada da riqueza final, $\max E(\ln w)$, é equivalente a maximizar $E(\ln w - \ln w_0)$. Por outro lado,

$$\max E(\ln w - \ln w_0) = \max E\left[\ln\left(\frac{w}{w_0}\right)\right] = \max E[\ln(1+R)] = \max \sum_{i=1}^{M} p_i \left[\ln(1+R_i)\right]$$

$$= \max \sum_{i=1}^{M} \ln(1+R_i)^{p_i} = \max \ln \prod_{i=1}^{M} (1+R_i)^{p_i} = \max\left[1+\ln \overline{R}_G\right]$$

Como $\max\left[1+\ln \overline{R}_G\right]$ é equivalente a $\max \overline{R}_G$ obtém-se o resultado.

:: ***Safety First*** **–** os agentes não são capazes ou não querem estar sempre a maximizar a utilidade esperada. Preferem regras de decisão simples que observem com particular atenção os maus resultados. Exs.:

Critério de *Roy* – o melhor portfolio é o que tem a menor probabilidade de produzir um return abaixo de determinado nível.

Critério de Kataoka – maximizar o limite inferior de return s.a. probabilidade de returns inferiores a esse limite não sejam maiores que determinado valor.

Critério de Telser – maximizar o return esperado s.a. probabilidade de return inferior ou igual a dado limite não é maior que determinado valor.

:: **Dominância Estocástica –** baseia-se nas probabilidades acumuladas associadas a cada resultado

Pressupostos:

O investidor prefere mais a menos → Dominância estocástica de **1ª ordem**

\+

o investidor é avesso face ao risco

Dominância estocástica de **2ª ordem**

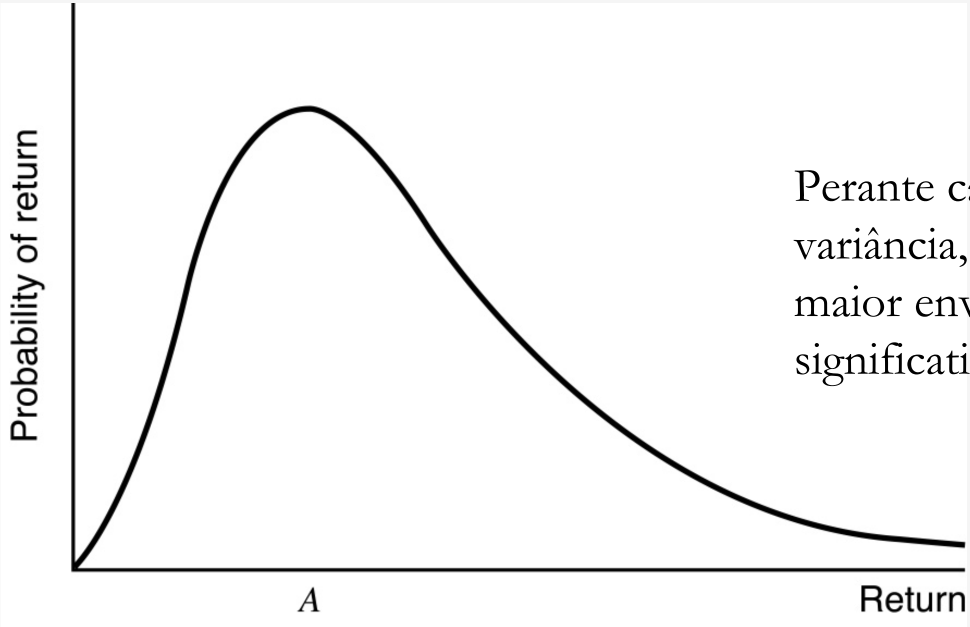
\+

O investidor tem aversão absoluta decrescente

Dominância estocástica de **3ª ordem**

:: Enviesamento

Os investidores não se preocupam apenas com o primeiro (média) e segundo (variância) da distribuição de rendimentos. O terceiro momento, que mede a assimetria, pode revelar-se importante na tomada de decisão de investimento.



Perante carteiras com a mesma média e variância, a preferência é por carteiras com maior enviesamento positivo (probabilidade significativa de elevados returns)

Value-at-Risk

e

Conditional VaR / Expected Shortfall

Medidas de Risco

- Volatilidade Histórica
- Volatilidade Implícita
- Value-at-Risk (VaR)
- Conditional VaR/Expected Shortfall (ES)

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

VIX index

Backpage
Screen Printed

Index DES

Index Description

Page 1/2

Name	CBOE SPX VOLATILITY INDX
Ticker	VIX

<INDEX>

	New York	Local
Trading Hours	09:30-16:15	14:30-21:15

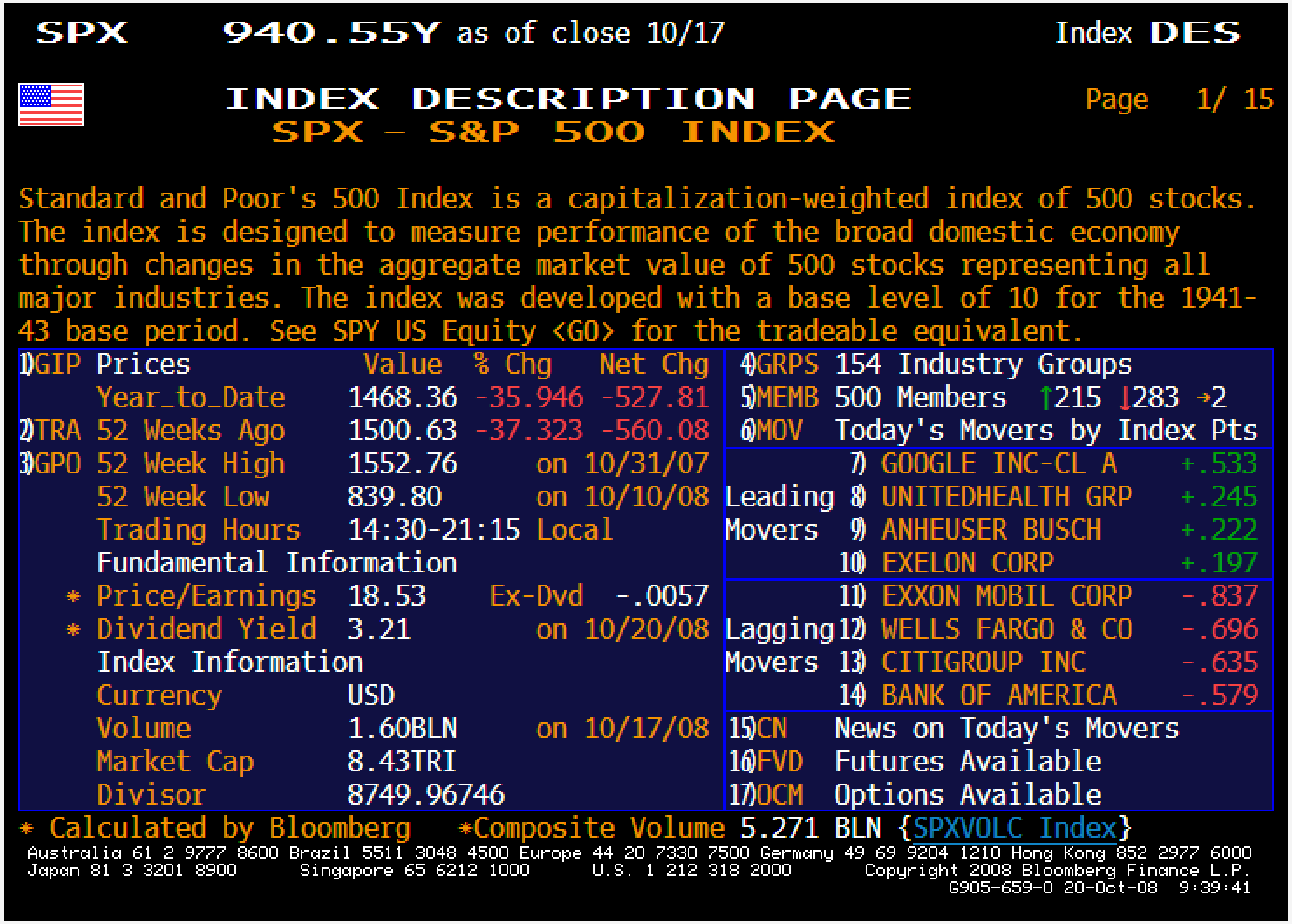
Related Functions	
1) HP	Price Table
2) GP	Px Graph w/Volume
3) GIP	Intraday Price Graph

Last 70.33 @ 10/17

Related Securities			
SPX	<INDEX>	:	SPX INDEX
VXO	<INDEX>	:	OLD VIX INDEX
VRO	<INDEX>	:	VIX SETTLEMENT
UXA	<INDEX>	:	VIX FUTURE

The Chicago Board Options Exchange SPX Volatility Index reflects a market estimate of future volatility, based on the weighted average of the implied volatilities for a wide range of strikes. 1st & 2nd month expirations are used until 8 days from expiration, then the 2nd and 3rd are used.

S&P 500


SPX 940.55Y as of close 10/17 Index DES

INDEX DESCRIPTION PAGE Page 1/ 15
SPX - S&P 500 INDEX

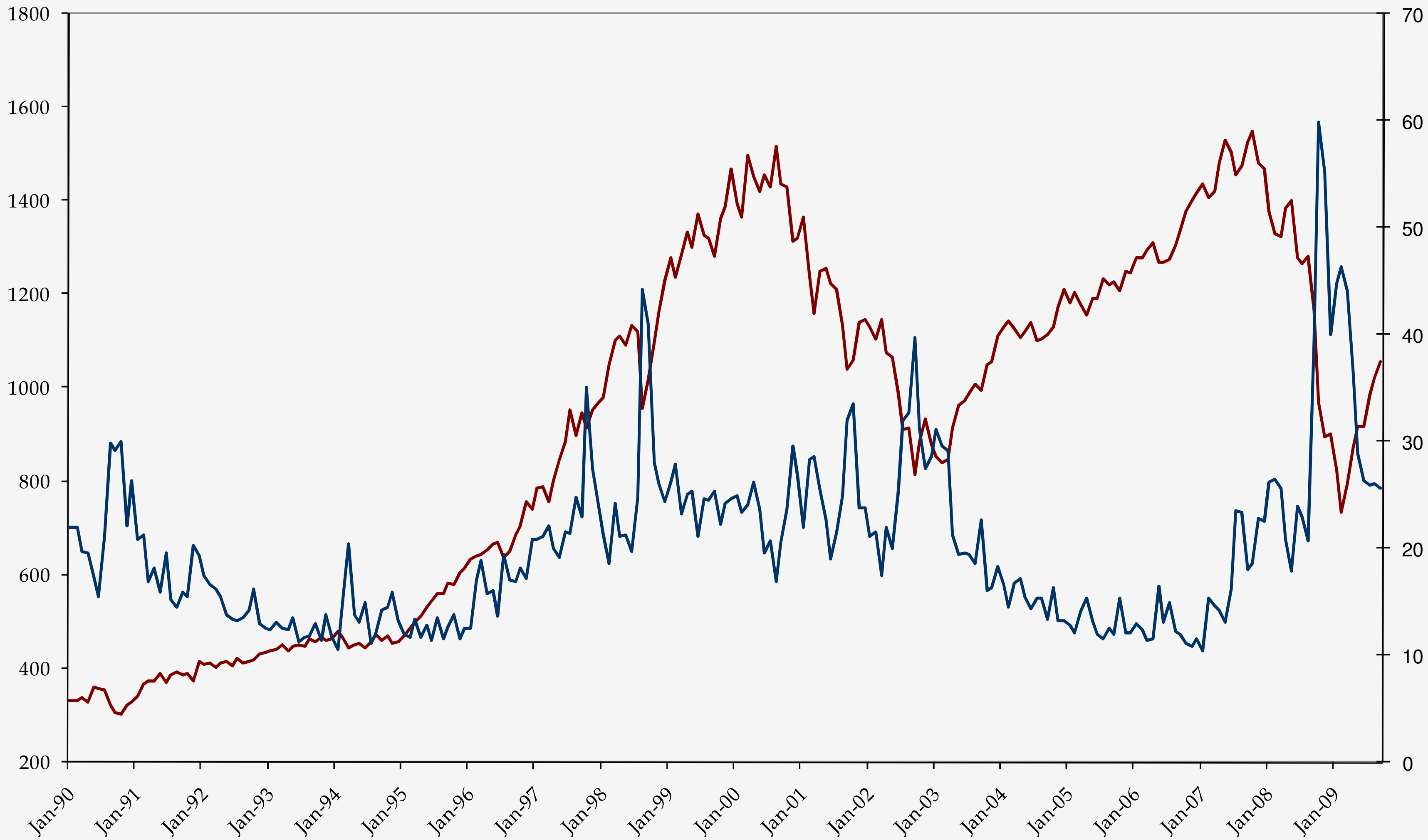
Standard and Poor's 500 Index is a capitalization-weighted index of 500 stocks. The index is designed to measure performance of the broad domestic economy through changes in the aggregate market value of 500 stocks representing all major industries. The index was developed with a base level of 10 for the 1941-43 base period. See SPY US Equity <GO> for the tradeable equivalent.

1)GIP	Prices	Value	% Chg	Net Chg
	Year_to_Date	1468.36	-35.946	-527.81
2)TRA	52 Weeks Ago	1500.63	-37.323	-560.08
3)GPO	52 Week High	1552.76		on 10/31/07
	52 Week Low	839.80		on 10/10/08
	Trading Hours	14:30-21:15 Local		
	Fundamental Information			
	* Price/Earnings	18.53	Ex-Dvd	-.0057
	* Dividend Yield	3.21		on 10/20/08
	Index Information			
	Currency	USD		
	Volume	1.60BLN		on 10/17/08
	Market Cap	8.43TRI		
	Divisor	8749.96746		

4)GRPS	154 Industry Groups		
5)MEMB	500 Members ↑215 ↓283 →2		
6)MOV	Today's Movers by Index Pts		
	7)	GOOGLE INC-CL A	+.533
Leading	8)	UNITEDHEALTH GRP	+.245
Movers	9)	ANHEUSER BUSCH	+.222
	10)	EXELON CORP	+.197
	11)	EXXON MOBIL CORP	-.837
Lagging	12)	WELLS FARGO & CO	-.696
Movers	13)	CITIGROUP INC	-.635
	14)	BANK OF AMERICA	-.579
15)CN	News on Today's Movers		
16)FVD	Futures Available		
17)OCM	Options Available		

* Calculated by Bloomberg *Composite Volume 5.271 BLN {SPXVOLC Index}
Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2008 Bloomberg Finance L.P.
G905-659-0 20-Oct-08 9:39:41

VIX *versus* S&P 500



VaR : Value-at-Risk

History (disponível em www.riskmetrics.com)

" In 1989, Sir Dennis Weatherstone, the new chairman of J.P. Morgan, did not know the total risk of his firm. He asked that a report measuring and explaining those risks be placed on his desk everyday at 4:15pm. Four years later in 1994, J.P. Morgan launched the RiskMetrics methodology, making the substantive research and analysis that satisfied Sir Dennis Weatherstone's request, freely available to all market participants.

RiskMetrics educated a global marketplace and gave institutions around the world the tools to make better, more informed, investment decisions. In 1998, as client demand for the group's risk management expertise far exceeded the firm's internal risk management resources, RiskMetrics Group was spun off from J.P. Morgan."

March 1, 2010 – MSCI Inc, a leading global provider of investment decision support tools, and RiskMetrics Group, Inc, a leading provider of risk management and corporate governance products and services to the global financial community, jointly announced today that they have entered into a definitive merger agreement whereby MSCI will acquire RiskMetrics in a cash and stock transaction …

VaR : Value-at-Risk

RISCO ⇔ PERDA

- Qual a probabilidade da perda acontecer?
- Se tal acontecer, qual a sua magnitude?

As medidas de VaR, ES ou outras da mesma família, tentam responder à segunda pergunta, isto é,

"Dada uma determinada probabilidade de perda, qual o impacto dessa perda?"

VaR : Value-at-Risk

Conceito de VaR

- Estimativa para a **perda máxima** a que estará sujeito o valor de uma carteira…
- …assumindo **condições normais** de funcionamento dos mercados…
- …considerando um certo **nível de confiança** e um **horizonte temporal** de investimento…
- …e tomando em conta os efeitos de **diversificação** presentes na carteira.

VaR : Value-at-Risk

- O VaR é actualmente utilizado por gestores de fundos, correctores, instituições financeiras….
- Exemplo da sua aplicação generalizada: Acordo de Basileia
- Um dos factores de sucesso do VaR é que a RiskMetrics fornece, gratuitamente, a informação necessária para a sua implementação.
- Esta informação pode ser utilizada para, por exemplo, calcular o VaR de acções, obrigações e derivados.
- mais *websites*…. Calculo VaR diários a 95% significância

  http://www.riskgrades.com/retail/index.cgi

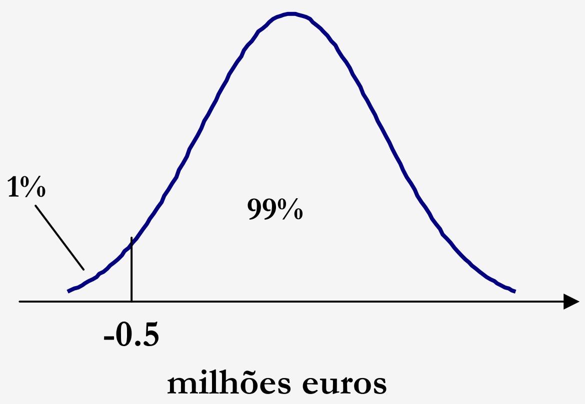
VaR : Value-at-Risk

Dada um determinado nível de confiança e um horizonte temporal de investimento, o **VaR** de um portfolio é a *perda máxima* que se espera.

- Capta um aspecto importante do risco num único número
- É fácil de entender e de comparar
- Não é aditivo – inclui efeito diversificação

VaR : Value-at-Risk

Exemplo: Considere que a variação do valor de mercado amanhã de uma dado *portfolio* é dada pela seguinte distribuição:



Este *portfolio* apresenta um **VaR** diário de meio milhão de euros a 99% confiança

Com probabilidade de 1% a perda diária é superior a meio milhão, ou seja, P(variação Riqueza < -0.5 milhão) =0.01

↔

Com probabilidade de 99% a perda diária é inferior a meio milhão, ou seja, P(variação Riqueza > -0.5 milhão) =0.99

VaR : Value-at-Risk

A matemática do VaR...

É um percentil de ordem *a* de uma distribuição de probabilidades da Taxa de Rendibilidade futura, tal que:

$$P\left(X \leq VaR_{\alpha}\right) = \alpha$$

Como calcular o VaR?

- Método Analítico (Variância/Covariância)
- Método de Simulação Histórica
- Método de Simulação de Monte Carlo

VaR : Value-at-Risk

❖ Método Analítico (Variância/Covariância)

- Obter as taxas de rendibilidade para cada activo;
- Avaliar a carteira a preços de mercado;
- Obter a matriz de variância - covariâncias, de, e entre, cada um dos factores de risco;
- Calcular a variância da carteira;
- Calcular a medida Value at Risk.

VaR : Value-at-Risk

VaR diário com retornos normais...

Se assumirmos que a Taxa de Rendibilidade futura segue uma distribuição normal

$$R \sim N(0,\sigma)$$

Seja

→ α : 1-nível de significância

→ $N^{-1}(\alpha)$: inverso da função distribuição normal

→ W : investimento inicial

$$\boxed{VaR = W \times N^{-1}(\alpha) \times \sigma}$$

VaR : Value-at-Risk

Exemplo: Considere um investimento inicial de 1000 dólares em acções da IBM cujo rentabilidade diária apresenta um desvio padrão de 2%. O VaR diário a 99% de confiança é igual a

VaR $= \$1000 \times N^{-1}(99\%) \times 2\% = \$1000 \times 2.33 \times 2\% = \$\ 46.6$

O VaR a 10 dias a 99% de confiança é

VaR $= \$1000 \times N^{-1}(99\%) \times 2\% \times 10\text{^}0.5 = \$\ 147$

VaR : Value-at-Risk

VaR N dias com retornos normais…

HIPÓTESE: Retornos diários são independentes entre si

$$\mathbf{VaR} = \mathbf{W} \times \mathbf{N}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\sigma} \times \sqrt{N}$$

VaR : Value-at-Risk

Hipóteses Implícitas que são limitações…

→ A variação no valor de mercado do *portfolio* segue uma distribuição normal;

+ apropriada se se considerar horizonte temporal alargado

- potencias problemas para *portfolios* não diversificados ou títulos individuas cujas rentabilidades diárias exibam "fat tails"

→ A variação esperada no valor de mercado do portfolio é zero

+ apropriada se se considerar investimento diário

- potenciais problemas se se considerar um horizonte temporal alargado.

→ No caso de se considerar investimento em dias sucessivos, usualmente considera-se que as rentabilidades diárias são independentes entre si.

VaR : Value-at-Risk

❖ Método de Simulação Histórica

→ **T** : número de observações históricas para a rentabilidade diária (R) de um determinado título.

→ $n = T \times \alpha$.

→ R_n : **n-ésima** pior rentabilidade

$$\boxed{VaR = W \times R_n}$$

Exemplo **CÁLCULO VaR a 99%** **:** Suponha que conhece 500 observações para a rendibilidade diária do título AMAZON, sendo a quinta pior rentabilidade diária observada de -4%. Assim, o VaR diário a 99% de confiança para um investimento inicial de \$1000 é igual a

VaR = \$1000 × 4% = \$ 40

VaR : Value-at-Risk

❖ Método de Simulação de Monte Carlo

- Obter as taxas de rendibilidade para cada factor de risco;
- Obter a matriz de variâncias/covariâncias históricas;
- Gerar n padrões aleatórios de preços com base em processos estocásticos devendo obter-se sucessões normais e cujas volatilidades sejam correctas;
- Avaliar a carteira através do modelo mais adequado;
- Calcular a medida Value at Risk.

Stress Testing

Testar como é que o portfolio se comportaria perante determinadas condições extremas.

Back-Testing

- Testa quão bem a estimativa do VaR se comportou no passado
- Podemos perguntar: Quão frequente foram as perdas a 10 dias superiores à estimativa do VaR a 99%/10 dias?

ES : Expected Shortfall

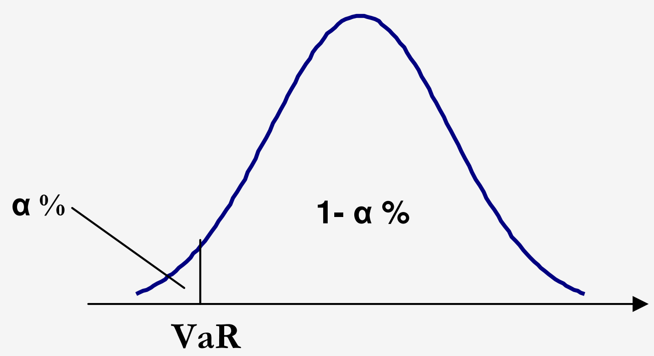
Dada um determinado nível de confiança e um horizonte temporal de investimento, a ES de um portfolio é a *média das perdas superiores ao VaR.*

Complementa o VaR dado que mede as perdas na cauda da distribuição!

ES : Expected Shortfall

A matemática da ES...

Distribuição variação valor do portfolio



$$ES_{\alpha}(X) = E\left[X \mid X < VaR_{\alpha}(X)\right]$$