II.C. Modelos de Equilíbrio para Activos Financeiros

CAPM | APT

(**OBS**: Em economia a noção de equilíbrio caracteriza situações em que os investidores não desejam alterar os seus comportamentos.)

Bibliografia:

Bodie, Kane e Marcus, capítulos 9 e 11.

Elton, Gruber, Bown, e Goetzmann, capítulos 13, 14, 15 e 16.

Afonso, Barros, Calado, Borges, Garcia e Relvas, capítulos 5 e 6.

Pires, capítulos 7 e 8.

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

APT : ARBITRAGE PRICING THEORY

Desenvolvido por Stephen Ross (1976)

1ª **Ausência Oportunidades Arbitragem – invest nulo, sem risco, rentab positiva**

→ Lei do Preço Único: em equilíbrio dois activos com as mesmas características têm de ter o mesmo preço.

2ª As rendibilidades dos activos seja da forma (***L-factor model***):

$$R_i = a_i + b_{i1}I_i + b_{i2}I_2 + \ldots + b_{iL}I_L + e_i$$

onde

- a_i : valor esperado da rentabilidade do activo i se todos os índices forem zero;
- I_j : Índice j;
- b_{ij} : medida da sensibilidade da rentabilidade do activo i face alterações do factor j;
- e_i : variável aleatória com valor esperado nulo e variância σ^2_{ei}

3ª **Nº elevado de activos na economia para se construírem carteiras de arbitragem**

Hipóteses:

- $\mathrm{E}\left[e_i e_j\right] = 0$, para $j = 1,\ldots,N$ e $i = 1,\ldots,N\left(j \neq \mathrm{i}\right)$.
- $\mathrm{E}\left[e_i\left(I_j - \bar{I}_j\right)\right] = 0$, para $i = 1,\ldots,N$ e $\mathrm{j} = 1,\ldots,L$.

Modelo multi-índice!!!

Contribuição APT: Mostrar condições suficientes para o modelo de índice ser um modelo de equilíbrio!

APT

$$\overline{R}_i = R_F + b_{i1}\left(\overline{R}_1 - R_F\right) + \ldots + b_{iL}\left(\overline{R}_L - R_F\right)$$

Demonstração utilizando modelo com dois índices:

Seja a rentabilidade do activo *i* dada por

$$R_i = a_i + b_{i1}I_i + b_{i2}I_2 + e_i \ , \qquad \text{com } E\left[e_i e_j\right] \approx 0.$$

Na presença de um portfolio diversificado, o risco residual tende para zero e apenas o risco sistemático é relevante. Neste modelo, os termos que afectam o risco sistemático são b_{i1} e b_{i2}, que medem a sensibilidade da rentabilidade do activo i aos factores I_1 e I_2.

⇨ O investidor na sua decisão de investimento considera apenas $E[R_i]$, b_{i1} e b_{i2}.

Equação Geral do Plano

$$\overline{R}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

onde λ_1 e λ_2 são os retornos por suportar o risco associado a I_1 e I_2, respectivamente.

Casos Particulares:

1. $b_{i1} = b_{i2} = 0 \quad \Rightarrow \lambda_0 = R_F \longrightarrow$ Preço do tempo – compensação por adiar o consumo de 1 unidade monetária durante 1 período de tempo

Aplicar equação ao Índice 2
2. $b_{i1} = 0$ e $b_{i2} = 1 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \overline{R}_2 - R_F \longrightarrow$ Preço do risco do factor 2 – rentabilidade esperada adicional de 1 carteira com risco unitário do factor 2.

Aplicar equação ao Índice 1
3. $b_{i1} = 1$ e $b_{i2} = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \overline{R}_1 - R_F$

$$\overline{R}_i = R_f + b_{i1}\underbrace{(\overline{R}_1 - R_f)}_{\lambda_1} + b_{i2}\underbrace{(\overline{R}_2 - R_f)}_{\lambda_2}$$

Generalização J índices:

$$R_i = a_i + b_{i1} I_1 + b_{i2} I_2 + \ldots + b_{iL} I_L + e_i$$

tem-se

$$\overline{R}_i = R_f + b_{i1}(\overline{R}_1 - R_f) + \ldots + b_{iJ}(\overline{R}_J - R_f)$$

Assuma-se a existência de três activos com as seguintes características:

Activos	$E[R_i]$	b_{i1}	b_{i2}
A	15%	1.0	0.6
B	14%	0.5	1.0
C	10%	0.3	0.2

Como temos três pontos no espaço ($E[Ri]$, b_{i1}, b_{i2}) conseguimos definir um plano nesse espaço:

$$\overline{R}_i = 7.75 + 5b_{i1} + 3.75b_{i2}$$

Qualquer portfolio nesta economia também se encontra neste plano. Caso contrário, existiria uma oportunidade arbitragem.

Exemplo oportunidade arbitragem

Qualquer portfolio constítuido por estes três activos apresenta rentabilidade esperada e risco dados por

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$b_{P1} = \sum_{i=1}^{N} w_i b_{i1} \quad ; \quad b_{P2} = \sum_{i=1}^{N} w_i b_{i2}$$

Modelo do tipo multi-indice

Seja **D** um novo portfolio no plano anteriormente definido, com $w_A^D = w_B^D = w_C^D = \frac{1}{3}$.

$$\overline{R}_D = 13\% \; ; \quad b_{D1} = 0.6 \quad \text{e} \quad b_{D2} = 0.6.$$

Seja **E** um outro portfolio fora do plano anteriormente definido, com

$$\overline{R}_E = 14\% \; ; \quad b_{E1} = 0.6 \quad \text{e} \quad b_{E2} = 0.6.$$

Risco de **E** = Risco de **D**

Rentabilidade esperada **E** > Rentabilidade Esperada **D**

OPORTUNIDADE ARBITRAGEM!

II.C. APT

Exemplos de factores utilizados por gestores de fundos:

- Taxa de Inflação;
- Taxa de rentabilidade de longo prazo;
- Spread rentabilidade das obrigações do tesouro vs empresas
- Taxas juro;
- Produção industrial;
- Preços Petróleo;
- Rendibilidade Mercado

Aplicações:

Optimização de *portfolio* (ou seja, seleccionar o *portfolio* com a maior rentabilidade esperada dado o nível de risco);

- Permitir ajustar a sensibilidade do nosso portfolio aos diversos factores, dadas as expectativas dos factores.
- Estimar o custo de capital das empresas.

Pontos fortes do APT:

- Tem como premissa a "Ausência de Oportunidades Arbitragem";
- Não é necessário identificar a carteira de mercado.

Pontos fracos do APT:

- Qual o melhor modelo de índices múltiplos a utilizar?
- Qual o sinal e a magnitude dos b's?

Modelos Normativos versus Positivos

:: Modelos Normativos

- Prescritivos: "dizem o que se deve fazer";

- No nosso caso, o modelo de Markowitz diz aos investidores qual o portfolio que devem escolher.

:: Modelos Positivos

- Descritivos: "dizem o que vai acontecer";

- No nosso caso obtem-se o Capital Asset Pricing Model (CAPM), que é um modelo que descreve os preços em equilíbrio se todos os investidores investem de acordo com o modelo Markowitz-Tobin.

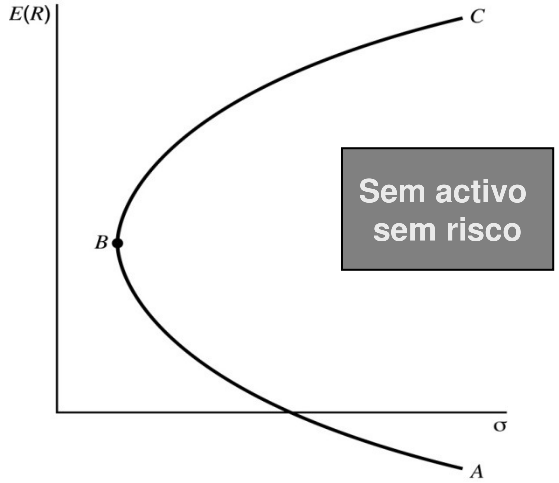
- O CAPM foi inicialmente derivado por William Sharpe (prémio nobel 1990) em 1964 @ Journal of Finance

:: HIPÓTESES CAPM

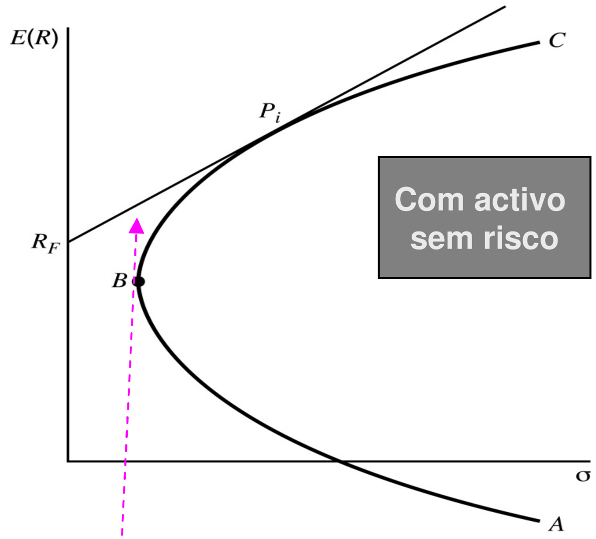
1. Ausência de custos de transacção;
2. Os activos são infinitamente divisíveis;
3. Ausência de impostos sobre o rendimento (sobre +valias, dividendos, juros);
4. Os investimentos individuais não têm impacto sobre o preço dos activos;
5. Os investidores tomam as suas decisões tendo apenas em atenção a rentabilidade esperada e a variância do seu investimento [R~N ou utilidade quadrática];
6. São permitidas vendas a descoberto (*short-selling*);
7. É possível emprestar e pedir emprestado à taxa de juro sem risco;
8. Os investidores são avessos ao risco;
9. Os investidores têm expectativas homogéneas relativamente
   i. Ao horizonte de investimento e
   ii. Às rentabilidades esperadas, variâncias e covariâncias;

   → Conjunto de carteiras eficientes com risco é o mesmo para todos os investidores
10. Todos os activos são transaccionados.

:: The Capital Market Line and The Mutual Fund Theorem



BC: fronteira eficiente;



Fronteira eficiente

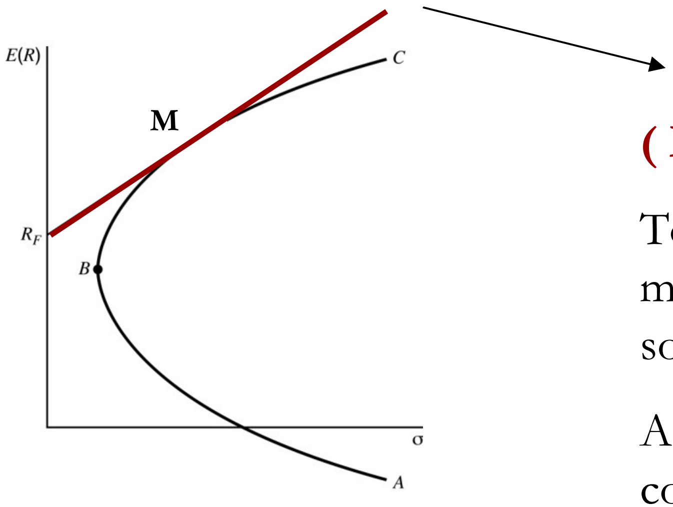
P_i portfolio activos com risco que o agente *i* deseja deter

Se os agentes têm expectativas homogéneas, o portfolio P_i vai ser detido por todos os agentes na economia - é a única carteira de activos de risco eficiente!

⇨ **P_i** é o **portfolio de mercado (M=P_i) – composto por todos os activos que existem no mercado nas proporções em que existem – equilíbrio!**

Mutual Fund Theorem:

A combinação óptimo de activos com risco pode ser determinada sem o conhecimento das preferências do investidor relativamente ao risco. Todos os agentes detêm combinações do portfolio de mercado (M)



CAPITAL MARKET LINE

(Linha de mercado de capitais)

Todos os investidores detêm portfolios na linha de mercado de capitais e todos os portfolios eficientes estão sob a linha de mercado de capitais.

As preferências só influenciam a forma como o investidor combina a carteira M com o activo sem risco.

A expressão analítica que descreve a LINHA DE MERCADOS DE CAPITAIS é

$$\boxed{R_P = R_f + \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}\sigma_P}$$

$\frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$: market price of risk

(Expected Return) = (Price of time)+(Price of risk)*(Amount of risk)

- Esta relação estabelece a rentabilidade de um portfolio eficiente;
- Porém, não descreve as rentabilidades em equilíbrio de portfolios não eficientes ou de títulos individuais.

Derivação analítica do CAPM

Aquando da derivação da fronteira eficiente sem restrições a *short-selling*, investir e pedir dinheiro emprestado à taxa de juro sem risco, o investidor ***i*** resolve o seguinte problema:

$$\max_{w^i} \frac{\overline{R}_{P_i} - R_f}{\sigma_P}$$

$$\text{s.a.} \quad \overline{R}_P = \sum_{k=1}^{N} w_k^i \overline{R}_k$$

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^{N} \left(w_k^i\right)^2 \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} w_k^i w_j^i \sigma_{kj}$$

As condições de primeira ordem podem ser escritas como:

Dem: Livro Elton, Gruber pag 300

$$\left(\overline{R}_{P_i} - R_f\right)\left(w_1^i \sigma_{1k} + w_2^i \sigma_{2k} + \ldots + w_N^i \sigma_{Nk}\right) = \left(\overline{R}_k - R_f\right)\sigma_{P_i}^2$$

para ***k=1, 2, … , N***.

Se os agentes na economia têm expectativas homogéneas

- ⇨ seleccionam o mesmo portfolio e
- ⇨ em equilíbrio, esse portfolio é o portfolio em que a fracção riqueza investida no activo *i* é a fracção da capitalização bolsista do activo *i* na capitalização global do mercado.

Assim, a rentabilidade do mercado pode ser ser escrita como

$$R_M = \sum_{i=j}^{N} w_j R_j \qquad \text{e} \qquad \overline{R}_M = \sum_{i=j}^{N} w_j \overline{R}_j$$

Como,

$$\operatorname{cov}(R_k, R_M) = E\left[\left(R_k - \overline{R}_k\right)\left(R_M - \overline{R}_M\right)\right] = E\left[\left(R_k - \overline{R}_k\right)\left(\sum_{j=1}^{N} w_j (R_j - \overline{R}_j)\right)\right] =$$

$$= E\left[w_1\left(R_k - \overline{R}_k\right)\left(R_1 - \overline{R}_1\right) + \ldots + w_N\left(R_k - \overline{R}_k\right)\left(R_N - \overline{R}_N\right)\right] = \sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{jk}$$

Logo, a condição de primeira ordem para a determinação da fronteira eficiente pode ser escrita como

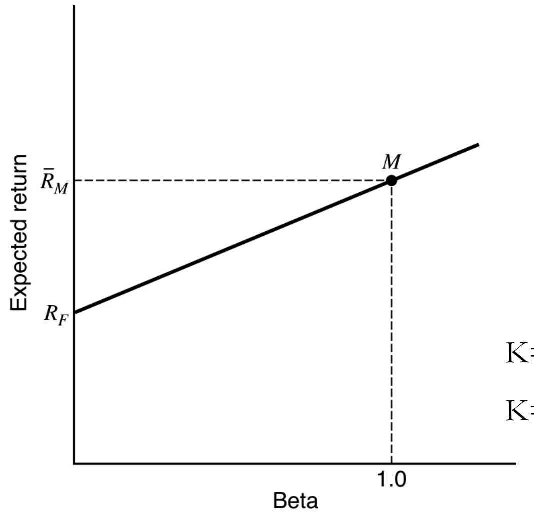
$$\left(\bar{R}_M - R_f\right)\mathrm{cov}(R_k, R_M) = \left(\bar{R}_k - R_f\right)\sigma_M^2$$

Ou ainda,

$$\frac{\bar{R}_M - R_f}{\sigma_M^2}\mathrm{cov}\left(R_k, R_M\right) = \bar{R}_k - R_f \Leftrightarrow \bar{R}_k = R_f + \frac{\mathrm{cov}\left(R_k, R_M\right)}{\sigma_M^2}\left(\bar{R}_M - R_f\right).$$

Como $\beta_k = \dfrac{\mathrm{cov}\left(R_k, R_M\right)}{\sigma_M^2}$ vem

$$\boxed{\bar{R}_k = R_f + \beta_k\left(\bar{R}_M - R_f\right).}$$



K=M – Beta=1

K=f – Beta=0

SECURITY MARKET LINE

(linha de mercado de activos/títulos)

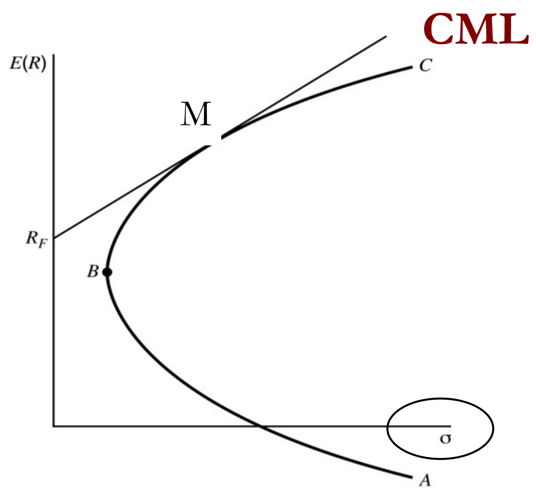
Definindo de diferentes formas o market price of risk e o risco do título podemos reescrever a equação do CAPM como:

$$\overline{R}_i = R_f + \underbrace{\frac{\overline{R}_i - R_f}{\sigma_m}}_{\text{Market price of risk}} \underbrace{\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m}}_{\text{Risco título}} \quad \text{ou} \quad \overline{R}_i = R_f + \underbrace{\frac{\overline{R}_i - R_f}{\sigma_m^2}}_{\text{Market price of risk}} \underbrace{\sigma_{im}}_{\text{Risco título}}$$

Assim, a linha de mercado de títulos, tal como a linha do mercado de capitais, diz-nos que

(Expected Return) = (Price of time) + (Price of risk)*(Amount of risk)

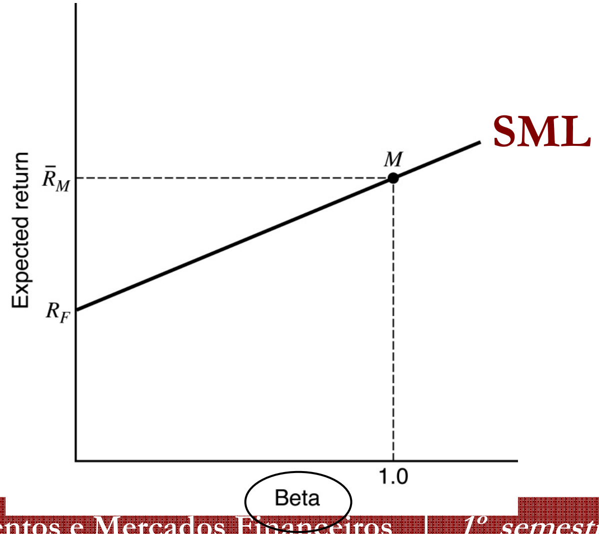
recapitulando…



Portfolios Eficientes estão sobre a CML

Portfolios não eficientes estão abaixo da CML

Quanto maior o declive, maior a compensação exigida por cada unidade de risco adicional – maior aversão ao risco.



Os títulos, em equilíbrio, encontram-se sobre a SML, todos os portfolios, eficientes ou não.

Títulos que não estão em equilíbrio

- subavaliados → acima SML

- sobreavaliados → abaixo SML

EXERCÍCIO

Considere uma economia em que são conhecidos os seguintes elementos relativamente a dois títulos, à carteira de mercado e ao activo sem risco. Assuma que se verificam as hipóteses do modelo CAPM.

Activos	**Rentabilidade**		**Correlações**		
	Rentabilidade Verificada	**Desvio-Padrão**	**Título X**	**Título Y**	**Mercado**
Título X	10%	?	1	0.3	0.375
Título Y	16%	?	-	1	0.5
Mercado	12%	0.02	-	-	1
Activo sem risco	4%	-	-	-	-

a) Um investidor pretende investir em dois activos de forma a obter uma rentabilidade de 14% com o menor risco possível. Que activos deverá combinar? Calcule o peso de cada activo na carteira e interprete os resultados.

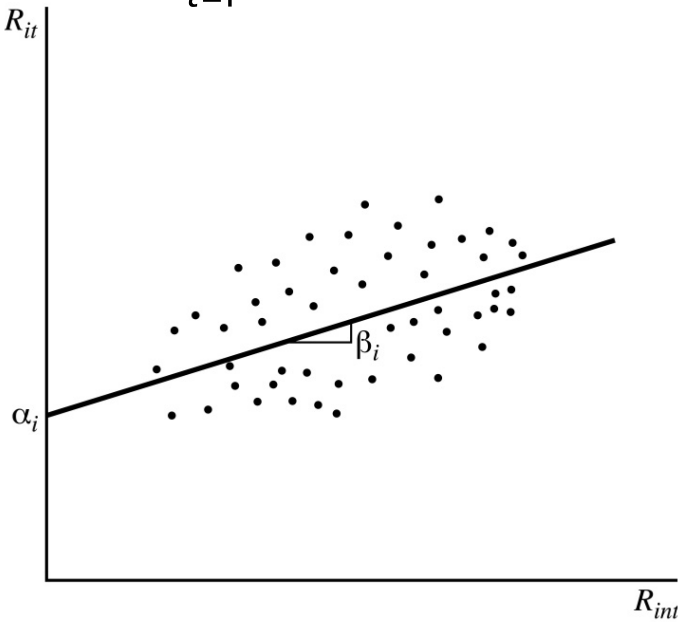
b) Obtenha e represente graficamente a CML e a SML. Identifique os títulos X e Y, nos dois gráficos, sabendo que estão em equilíbrio.

:: Estimação dos Betas

Estimação Betas Históricos

A equação da rentabilidade do activo *i*, que se espera que se verifique em qualquer momento do tempo, é $\mathrm{R_i} = \alpha_i + \beta_i \mathrm{R}_m + e_i$.

$$\min_{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i} \sum_{t=1}^{T} [R_{it} - (\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_{mt})]^2$$



1st order conditions:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left[\left(R_{it} - \overline{R}_i \right) \left(R_{mt} - \overline{R}_m \right) \right]}{\sum_{i=1}^{T} \left(R_{mt} - \overline{R}_m \right)^2}$$

$$\alpha_i = \overline{R}_i - \beta_i \overline{R}_m$$

:: Estimação dos Betas

Exemplo Estimação Betas Históricos utilizando *excel*

Tools / Data Analysis

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0,260942881
R Square	0,068091187
Adjusted R Square	0,05686337
Standard Error	0,04799972
Observations	85

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*Lower 95,0%*	*Upper 95,0%*
Intercept	0,008272732	0,005206842	1,588819658	0,115903	-0,002083466	0,01862893	-0,002083466	0,01862893
X Variable 1	0,314462642	0,127694229	2,462622201	0,015861	0,060483962	0,568441322	0,060483962	0,568441322

:: Estimação dos Betas

Avaliação Betas Históricos

• Os betas de portfolios com muitos activos contêm informação sobre os betas futuros desses mesmos portfolios;

• Os betas dos activos individuais contêm menos informação sobre os seus valores futuros.

Number of Securities in the Portfolio	Correlation Coefficient	Coefficient of Determination
1	0.60	0.36
2	0.73	0.53
4	0.84	0.71
7	0.88	0.77
10	0.92	0.85
20	0.97	0.95
35	0.97	0.95
50	0.98	0.96

Porque é que os betas podem variar de período para período?

✓ Alteração do risco do título;

✓ Em cada período o beta é medido com um erro aleatório e, quanto maior o erro menor o poder de previsão que o beta tem para o período seguinte.

As oscilações no tempo dos betas variam de activo para activo. Alguns aumentam, outros diminuem. Se se considerar um portfolio estas variações cancelam, pelo que se observa uma menor oscilação nos betas dos portfolios do que nos betas dos activos individuais.

Assim, espera-se que os erros incorridos na estimação dos betas dos activos individuais tendam a cancelar quando os activos são combinados e, consequentemente, se incorra em menor risco aquando da estimativa do beta de um portfolio. **A implicação é que os betas dos portfolios são uma melhor estimativa dos seus valores futuros, comparativamente à situação dos títulos individuais.**

:: Estimação dos Betas

Ajuste Estimativas Históricas

O beta calculado com dados históricos é função do beta real que pretendemos determinar e dos erros de amostragem.

Se se calcula uma estimativa muito elevada (reduzida) para o beta de um activo, existe uma probabilidade acrescida de existir um erro de amostragem positivo (negativo)

⇨ Ao longo do tempo os betas devem tender para 1 (Blume e Levy).

Portfolio	7/54–6/61	7/61–6/68
1	0.393	0.620
2	0.612	0.707
3	0.810	0.861
4	0.987	0.914
5	1.138	0.995
6	1.337	1.169

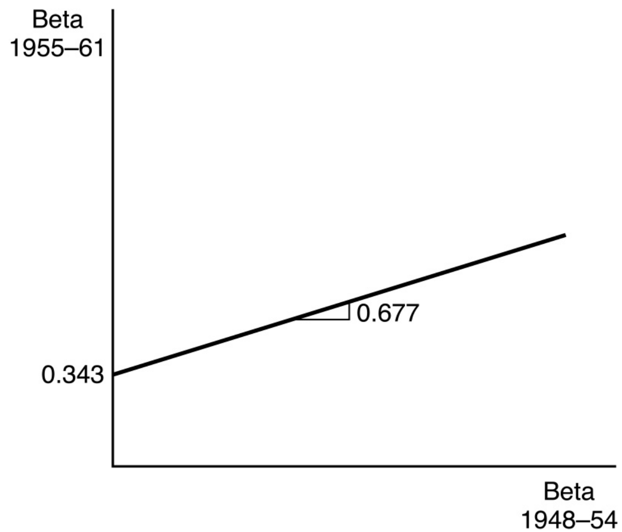
Source: Blume, Marchell. "On the Assessment of Risk," *Journal of Finance*, VI, No. 1 (March 1971).

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

:: Estimação dos Betas

Ajuste Estimativas Históricas: Ajuste de Blume

$$\beta_{i2} = a + b\beta_{i1}$$



:: Estimação dos Betas

Ajuste Estimativas Históricas: Ajuste de Vasicek

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma^2_{\beta_1}}{\sigma^2_{\beta_1} + \sigma^2_{\bar{\beta}_1}} \bar{\beta}_1 + \frac{\sigma^2_{\bar{\beta}_1}}{\sigma^2_{\beta_1} + \sigma^2_{\bar{\beta}_1}} \beta_{i1}$$

:: CAPM modificado

- Hipóteses do CAPM não se verificam mercado;
- CAPM boa descrição do mercado a nível macro mas não a nível micro (investidores)

Validade do CAPM quando as hipóteses não são válidas. A analisar:

- Vendas a descoberto;
- Possibilidade de emprestar e pedir emprestado à taxa de juro sem risco;
- Impostos pessoais;
- Activos não transaccionáveis;
- Expectativas homogéneas;
- Agentes como tomadores de preços;
- Análise multi-períodos.

APT e CAPM

O caso mais simples revelador da consistência entre o APT e o CAPM é obtido considerando que as rentabilidades são geradas por um modelo de índice único da forma

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

Se existir activo sem risco, para não haver oportunidades de arbitragem,

APT ⇨ $$\overline{R}_i = R_f + \beta_i(\overline{R}_M - R_f)$$

= SML! Logo o CAPM é válido

Caso com dois índices:

$$R_i = R_F + b_{i1} I_i + b_{i2} I_2 + e_i \ , \qquad \text{com } E\left[e_i e_j\right] \approx 0.$$

APT ⇨ $\overline{R}_i = R_f + b_{i1}(\overline{R}_1 - R_f) + b_{i2}(\overline{R}_2 - R_f)$

Se o CAPM se verifica

$$\overline{R}_1 = R_f + \beta_1(\overline{R}_M - R_f)$$

$$\overline{R}_2 - R_f = \beta_2(\overline{R}_M - R_f)$$

Substituindo

$$\overline{R}_i = R_f + (b_{i1}\beta_1 + b_{i2}\beta_2)(\overline{R}_M - R_f)$$

Definindo $\beta_i = b_{i1}\beta_1 + b_{i2}\beta_2$ obtém-se a rentabilidade esperada segundo CAPM

$$\overline{R}_i = R_f + \beta_i(\overline{R}_M - R_f)$$